# T. 5 – Inferencia estadística acerca de la relación entre variables

**1. El caso de dos variables categóricas**

**2. El caso de una variable categórica y una variable cuantitativa**

**3. El caso de dos variables cuantitativas**

• Tras haberse tratado en el capítulo anterior el contraste de hipótesis de diferentes parámetros relativos a una única variable –en concreto, dos parámetros: la media y la proporción–, se aborda ahora una serie de pruebas de contraste de hipótesis acerca de la relación entre dos variables. Todas ellas tienen en común algo: su amplia utilización en la práctica del análisis estadístico.

## 1. El caso de dos variables categóricas

• Se trata en este caso de valorar la asociación entre dos variables categóricas, considerando si existe una relación entre ambas variables a nivel poblacional. La información a partir de la que valorar dicha asociación viene dada habitualmente en una tabla de contingencia donde las casillas de la misma reflejan la distribución conjunta de ambas variables categóricas (ver capítulo "Organización y representación gráfica de datos multivariados" en el material de Estadística Descriptiva de la *OCW*).

• A continuación se presenta el procedimiento para aplicar la prueba de significación utilizada para evaluar dicha relación, más conocida como prueba ji-cuadrado de Pearson. Cabe señalar que esta prueba se aplicará de la misma manera, independientemente de que la relación de las variables sea simétrica –donde únicamente se asume una hipótesis relacional– o asimétrica –a la que subyace una hipótesis de relación causal–.

• Pasos en la prueba de significación:

1. Se decide el nivel de riesgo ($\alpha$) que se desea asumir en el contraste de hipótesis y se plantean las hipótesis estadística y nula. Así, siendo $A$ y $B$ dos variables categóricas con I y J categorías, respectivamente, la hipótesis estadística plantea que existe relación a nivel poblacional entre

ambas variables, mientras que la hipótesis nula conjetura lo contrario, esto es, que las dos variables son independientes:

$$H_e : \chi^2_{AB} \neq 0$$
$$H_o : \chi^2_{AB} = 0$$

3. Se calcula el estadístico de contraste ji-cuadrado de Pearson ($\chi^2$) que se basa en la comparación de las frecuencias observadas ($n_{ij}$) en cada casilla con las frecuencias esperadas suponiendo cierta la hipótesis nula ($m_{ij}$):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \frac{\left(n_{ij} - m_{ij}\right)^2}{m_{ij}}$$

Las frecuencias esperadas siendo cierta la hipótesis nula son el resultado de la aplicación del teorema de la probabilidad según el cual dos sucesos son independientes si su probabilidad conjunta es igual al producto de sus probabilidades simples, de manera que:

$$m_{ij} = \frac{n_{i+} \cdot n_{+j}}{n}$$

donde $n_{i+}$ y $n_{+j}$ son las frecuencias marginales de las variables de fila y columna, respectivamente y $n$ es el nº total de casos.

4. Se obtiene, en la distribución ji-cuadrado con grados de libertad igual a (I−1)×(J−1), el nivel de significación (*Sig*) asociado al estadístico $\chi^2$ obtenido, es decir, la probabilidad de obtener un valor del estadístico de contraste como el obtenido o superior.
5. Decisión: se mantiene la $H_o$ si $Sig > \alpha$; por contra, se rechaza si $Sig < \alpha$.

**Ejemplo**: Se recogieron datos en una muestra de 500 personas mayores de 70 años sobre las variables “Estado de ánimo” y “Vivir en una residencia” (ejemplo recogido en el capítulo “Organización y representación gráfica de datos multivariados” en el material de Estadística Descriptiva de la *OCW* ). La variable “Estado de ánimo” se midió utilizando una escala que reflejaba 3 categorías ordenadas de estado de ánimo: malo, regular y bueno. En este caso se puede considerar que las variables tienen un rol asimétrico, siendo la variable “Vivir en una residencia” la variable explicativa y se quiere, por tanto, evaluar si tiene relación con el estado de ánimo de los sujetos. Supóngase que los resultados obtenidos fueron los presentados en esta tabla de contingencia:

| | **Malo** | **Regular** | **Bueno** | Total |
|---|---|---|---|---|
| **Sí** | 48 | 42 | 60 | 150 |
| **No** | 70 | 105 | 175 | 350 |

| Total | 118 | 147 | 235 | 500 |
|---|---|---|---|---|

Prueba de significación:

1. Nivel de riesgo ($\alpha$) = 0,05

$$H_e : \chi^2_{AB} \neq 0$$
$$H_o : \chi^2_{AB} = 0$$

2. El estadístico de contraste $\chi^2$ requiere obtener, en primer lugar, las frecuencias esperadas en cada casilla de la tabla de contingencia (suponiendo cierta la hipótesis nula: $\chi^2_{AB} = 0$).

$$m_{11} = \frac{150 \times 118}{500} = 35,4 \qquad m_{12} = \frac{150 \times 147}{500} = 44,1 \qquad m_{13} = \frac{150 \times 235}{500} = 70,5$$

$$m_{21} = \frac{350 \times 118}{500} = 82,6 \qquad m_{22} = \frac{350 \times 147}{500} = 102,9 \qquad m_{23} = \frac{350 \times 235}{500} = 164,5$$

Así, el estadístico de contraste será igual a:

$$\chi^2_{AB} = \frac{(48-35,4)^2}{35,4} + \frac{(42-44,1)^2}{44,1} + \;....+ \frac{(175-164,5)^2}{164,5} = 8,784$$

4. La distribución muestral del estadístico $\chi^2$ es la distribución ji-cuadrado con 2 grados de libertad (1×2). Por lo tanto:

$$Sig = P(\chi^2 \geq 8,784) = 0,012.$$

5. Decisión: 0,012 < 0,05, por tanto, se rechaza la $H_o$ de independencia entre ambas variables.

• La aplicación de la prueba de significación anterior es problemática en el caso de <u>frecuencias esperadas bajas</u>, más concretamente, cuando para más del 20% de las casillas de la tabla de contingencia se tenga que $m_{ij} < 5$, ya que es este caso el estadístico $\chi^2$ no se distribuye según la distribución ji-cuadrado. En este caso la solución más sencilla consiste en agrupar categorías, que tengan sentido teóricamente, hasta conseguir que estas frecuencias no superen el 20% de las casillas.

• El estadístico $\chi^2$ tiene el problema de que está afectado por $n$, de manera que a mayor $n$, aún siendo la relación la misma, se obtienen valores superiores del estadístico y, por tanto, el valor de *Sig* disminuye. Por ello, es conveniente complementar esta prueba con otras medidas de la <u>intensidad de la asociación</u> entre las variables. Estas medidas están basadas en el estadístico $\chi^2$ pero no están afectados por $n$, siendo algunas de las más utilizadas el Coeficiente de contingencia $C$ y el Coeficiente *V de Cramer* (ver capítulo "Estadísticos de asociación entre variables" en el material de Estadística Descriptiva de la *OCW*).

• <u>Los resultados obtenidos con SPSS</u> a través del comando "Tablas de contingencia" del menú Análisis permite obtener la tabla de contingencia con las frecuencias esperadas en cada casilla, así como los resultados de la *prueba ji-cuadrado,* y las medidas complementarias de intensidad de la asociación.

**SPSS: Analizar | Estadísticos descriptivos | Tablas de contingencia:**

**Tabla de contingencia Vivir residencia * Estado ánimo**

| | | | Estado ánimo | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | malo | regular | bueno | |
| Vivir residencia | sí | Recuento | 48 | 42 | 60 | 150 |
| | | Frecuencia esperada | 35,4 | 44,1 | 70,5 | 150,0 |
| | no | Recuento | 70 | 105 | 175 | 350 |
| | | Frecuencia esperada | 82,6 | 102,9 | 164,5 | 350,0 |
| Total | | Recuento | 118 | 147 | 235 | 500 |
| | | Frecuencia esperada | 118,0 | 147,0 | 235,0 | 500,0 |

**Pruebas de chi-cuadrado**

| | Valor | gl | Sig. asintótica (bilateral) |
|---|---|---|---|
| Chi-cuadrado de Pearson | 8,784[a] | 2 | ,012 |
| Razón de verosimilitudes | 8,507 | 2 | ,014 |
| Asociación lineal por lineal | 7,788 | 1 | ,005 |
| N de casos válidos | 500 | | |

a. 0 casillas (,0%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. La frecuencia mínima esperada es 35,40.

**Medidas simétricas**

| | | Valor | Sig. aproximada |
|---|---|---|---|
| Nominal por nominal | Phi | ,133 | ,012 |
| | V de Cramer | ,133 | ,012 |
| | Coeficiente de contingencia | ,131 | ,012 |
| N de casos válidos | | 500 | |

**Ejercicio 1**: A partir de una encuesta realizada a un grupo de 173 estudiantes sobre algunos aspectos relacionados con su vida académica se quiere evaluar si existe relación entre el sexo de los estudiantes y si compaginan estudios y trabajo (escala de respuesta: no trabajo; trabajo a tiempo completo; trabajo a tiempo parcial). ¿Qué se puede decir respecto a la cuestión de partida? Realiza la prueba de significación correspondiente ($\alpha$ = 0,05) y obtén los índices relativos a la magnitud de la asociación entre ambas variables La siguiente tabla presenta las frecuencias observadas en cada casilla de la tabla de contingencia y las frecuencias esperadas, suponiendo cierta la hipótesis nula.

**Tabla de contingencia sexo * Compaginar estudios con trabajo**

| | | | Compaginar estudios con trabajo | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | no | sí, tiempo completo | sí, tiempo parcial | |
| sexo | Hombre | Recuento | 20 | 5 | 6 | 31 |
| | | Frecuencia esperada | 20,8 | 2,7 | 7,5 | 31,0 |
| | Mujer | Recuento | 96 | 10 | 36 | 142 |
| | | Frecuencia esperada | 95,2 | 12,3 | 34,5 | 142,0 |
| Total | | Recuento | 116 | 15 | 42 | 173 |
| | | Frecuencia esperada | 116,0 | 15,0 | 42,0 | 173,0 |

## 2. El caso de una variable categórica y una variable cuantitativa

• Se aborda ahora un tipo de contraste en el que aparecen implicadas dos variables de diferente naturaleza, si bien, nos limitaremos aquí a tratar el caso en que la variable categórica sea dicotómica. Este tipo de contraste, siguiendo la estrategia planteada en el análisis de la relación entre una variable categórica y una cuantitativa (ver capítulo "Estadísticos de asociación entre variables" en el material de Estadística Descriptiva de la *OCW*), se basa en comprobar la existencia de diferencias entre las medias en la variable cuantitativa de los dos conjuntos de observaciones definidos por la variable categórica, eso sí, se trata ahora de extraer conclusiones a nivel poblacional. En el caso que la variable categórica fuese politómica, la comparación pasa a ser de dos a varias medias, y el procedimiento de análisis tradicionalmente aplicado en este caso es conocido como *análisis de varianza*.

• Se pueden diferenciar dos variantes de este tipo de contraste de hipótesis en que una variable es cuantitativa y la otra categórica dicotómica:

### 2.1. El caso de dos medias independientes

• Se trata del contraste de hipótesis acerca de la diferencia de dos medias obtenidas para una misma variable en dos muestras que representan a dos poblaciones distintas. De ahí que a este contraste se haga referencia como contraste de hipótesis de dos medias independientes. La variable categórica definirá los dos subgrupos dentro de la muestra de datos, mientras que la media la obtendremos en la variable cuantitativa para esos dos subgrupos.

• El objetivo de este contraste de hipótesis es decidir si las medias empíricas obtenidas en dos muestras proceden, o no, de poblaciones con idéntica media. Veamos cómo abordar este contraste de hipótesis a partir de la realización de una prueba de significación y, posteriormente, a partir del intervalo de confianza para la diferencia entre ambas medias.

*(A) Procedimiento basado en la prueba de significación: esta prueba recibe el nombre de* Prueba t de Student *para grupos o muestras independientes.*

1. Se decide el nivel de riesgo ($\alpha$) que se desea asumir en el contraste de hipótesis y se plantean las hipótesis estadística y nula.

   Si A y B representan a dos poblaciones, una posible hipótesis estadística sería: $H_e : \mu_B > \mu_A$

   y, complementariamente, $H_o : \mu_B \leq \mu_A$

   Otra forma de plantear esas mismas hipótesis con un único parámetro es la siguiente:

$$H_e : \mu_B > \mu_A \;=\; H_e : \mu_B - \mu_A > 0 \;=\; H_e : \delta > 0 \;\; (donde\, \delta = \mu_B - \mu_A)$$

$$H_o : \mu_B \leq \mu_A \;=\; H_o : \mu_B - \mu_A \leq 0 \;=\; H_o : \delta \leq 0 \;\; (donde\, \delta = \mu_B - \mu_A)$$

   - En el caso de tratarse la hipótesis de forma bilateral:

$$H_e : \mu_B \neq \mu_A \;=\; H_e : \delta \neq 0$$
$$H_o : \mu_B = \mu_A \;=\; H_o : \delta = 0$$

2. Explorar si las medias empíricas obtenidas parecen apoyar, en principio, la hipótesis estadística planteada. En caso contrario, no tiene sentido continuar con los siguientes pasos del contraste de hipótesis y se mantendría la $H_o$. El resultado puede resultarnos de interés a la hora de plantear hipótesis estadísticas más afinadas en el futuro.
3. Se calcula el siguiente estadístico de contraste:

$$t = \frac{d - E(d)}{EE(d)}$$

   donde *d* es el valor de la diferencia entre las dos medias muestrales, *E(d)* es el valor esperado de la distribución muestral del estadístico de la diferencia entre dos medias independientes bajo el supuesto de la hipótesis nula (o sea, que para este contraste de hipótesis será igual a 0), y *EE(d)* es el error estándar de la citada distribución. Este último se calcula, en el caso más habitual de no conocerse la varianza en las respectivas poblaciones, como:

$$EE(d) = \sqrt{\frac{s_1'^2(n_1 - 1) + s_2'^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

4. Se obtiene en la distribución *t* de Student con $n_1+n_2-2$ grados de libertad la probabilidad de obtener un valor como el obtenido con el estadístico de contraste o más extremo, esto es, el nivel de significación (*Sig*). En el caso de ser el contraste bilateral, multiplicar el *Sig* obtenido por 2. (Nota: si ambas muestras son superiores a 30 se puede utilizar la distribución normal en vez de la distribución *t*).

5. Decisión: se mantiene la $H_o$ si $Sig > \alpha$; por contra, se rechaza si $Sig < \alpha$.

**Ejemplo**: Loftus y Burns (1982) realizaron un experimento para comprobar en qué medida un choque emocional puede alterar el recuerdo. Para ello proyectaron a dos grupos de sujetos una misma película con dos versiones de la misma: en una de ellas aparecía una escena de gran violencia que podía producir un choque emocional en los sujetos, pero esta escena no aparecía en la otra película. Posteriormente se hacía una prueba de memoria y se medía el recuerdo de los sujetos de ambos grupos. Supóngase que los resultados obtenidos fueron:

**Informe**

Recuerdo

| Choque_Emocional | Media | Desv. típ. | N |
|---|---|---|---|
| No | 15,00 | 2,121 | 5 |
| Sí | 11,00 | 1,581 | 5 |
| Total | 13,00 | 2,749 | 10 |

En este ejemplo, la variable cuantitativa es la puntuación obtenida en la prueba de memoria, mientras que la variable categórica es el haber visto una película u otra. A continuación se muestran los pasos en la prueba de significación orientada a contrastar si existen diferencias estadísticamente significativas entre las medias de los dos grupos a nivel poblacional:

1. Nivel de riesgo ($\alpha$) = 0,05

$H_e : \mu_{NO} \neq \mu_{Sí} \rightarrow \delta \neq 0$ (contraste de hipótesis bilateral)

$H_o : \mu_{NO} = \mu_{Sí} \rightarrow \delta = 0$

2. Las medias muestrales (15 y 11) parecen apoyar, en un principio, la hipótesis de que el recuerdo difiere en ambos grupos.
3. Cálculo del estadístico de contraste $t$:

$$EE(d) = \sqrt{\frac{2{,}12^2(5-1)+1{,}58^2(5-1)}{5+5-2}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)} = 1{,}183$$

$$t = \frac{d - E(d)}{EE(d)} = \frac{-4-0}{1{,}183} = -3{,}38$$

Señalar que, al igual que en el caso del contraste de hipótesis sobre una media, este estadístico de contraste es una estandarización de la diferencia de las medias obtenidas en la muestra ya que, si es cierta la $H_o$ ($E(d) = 0$), la distribución muestral de la diferencia de medias obtenidas en muestras de $n = 5$ extraídas al azar de una población en que los dos subgrupos tienen la misma media seguirá una distribución $t$ con parámetros $E(d) = 0$ y $EE(d) = 1{,}183$

4. La distribución muestral del estadístico $t$ es la distribución $t$ de Student con 8 grados de libertad (5+5−2) y, por tanto, para un contraste unilateral:

$$Sig = P(t \leq -3{,}38) = 0{,}0048$$

Y si el contraste es bilateral:

$$Sig = 0{,}0048 \times 2 = 0{,}0096$$

5. Decisión: 0,0096 < 0,05, por tanto, se rechaza la $H_o$ y se concluye que hay una relación estadísticamente significativa entre ambas variables o, dicho de otro modo, que ambas muestras proceden de poblaciones con diferente media.

• La correcta aplicación de la prueba de significación anterior requiere del cumplimiento de una serie de supuestos, a saber:

- La variable de respuesta ha de ser cuantitativa.
- Las puntuaciones deben ser estadísticamente independientes unas de otras.
- Homocedasticidad: Igualdad de las varianzas poblacionales de la variable de respuesta en cada grupo. El cumplimiento de este supuesto es evaluado habitualmente mediante la *prueba de Levene* y, en caso de que no se satisfaga este supuesto, es necesario realizar un cálculo diferente del denominador del estadístico $t$ y de los grados de libertad de su distribución muestral (véase, p. ej., Pardo y San Martín, 1998).

• Los resultados obtenidos con SPSS al ejecutar la prueba t para la comparación de medias en muestras independientes incluyen el resultado de la prueba de Levene. Véase un ejemplo de la salida de SPSS para este análisis:

**SPSS: Analizar | Comparar medias | Prueba T para muestras independientes:**

**Prueba de muestras independientes**

| | | Prueba de Levene para la igualdad de varianzas | | Prueba T para la igualdad de medias | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | 95% Intervalo de confianza para la diferencia | |
| | | F | Sig. | t | gl | Sig. (bilateral) | Diferencia de medias | Error típ. de la diferencia | Inferior | Superior |
| Recuerdo | Se han asumido varianzas iguales | ,400 | ,545 | -3,381 | 8 | 0,0096 | -4,000 | 1,183 | -6,729 | -1,271 |
| | No se han asumido varianzas iguales | | | -3,381 | 7,396 | 0,0108 | -4,000 | 1,183 | -6,768 | -1,232 |

En este ejemplo, por lo que respecta al supuesto de homocedasticidad, dado el nivel de significación obtenido para la prueba de Levene ($Sig$ = 0,545), se puede mantener la hipótesis nula de igualdad de varianzas en la población. En caso contrario, nos deberemos fijar en el valor *t* y en el nivel de significación de la fila inferior de la tabla de resultados.

*(B) Procedimiento basado en la utilización de intervalos de confianza:*

1. El *IC* para este tipo de contraste se plantea para el valor de la diferencia entre las dos medias poblacionales ($\delta$) como:

$$IC(1-\alpha)(\delta) = d \pm (t_{n_1+n_2-2;1-\alpha/2} \cdot EE(d))$$

(Nota: el *EE(d)* y los grados de libertad para fijar el valor *t* se obtienen tal y como se expuso en el apartado anterior al describir la prueba de significación. De nuevo, si el tamaño de ambas muestras es superior a 30 se puede utilizar la distribución normal en vez de la distribución *t*).

2. Se decide el rechazo de la $H_o$ cuando el *IC* de la diferencia entre ambas medias no se corresponde con la diferencia expresada en la $H_o$; en caso contrario, se mantiene la $H_o$. Un aspecto positivo de la creación del *IC* es que, además de permitirnos llevar a cabo el contraste de hipótesis, resulta informativo acerca de la magnitud de la diferencia de las medias en la población.

**Ejemplo**: para el ejemplo anterior sobre choque emocional y recuerdo, el *IC* de la diferencia de medias se obtiene como:

$$IC(95\%)(\delta) = 4 \pm (2{,}306 \cdot 1{,}183) = [1{,}27; 6{,}73]$$

Dado que el intervalo anterior no incluye el valor 0, se rechazaría la $H_o$. Además, este *IC* permite concluir que la diferencia entre las medias poblaciones se encuentra, con una confianza del 95%, entre los valores de 1,27 y 6,73, siendo superior el recuerdo en el grupo de ausencia de choque emocional. Véase también este *IC* en los resultados obtenidos con SPSS que fueron presentados en un ejemplo anterior.

**Ejercicio 2**: En una importante empresa de seguros se desea valorar si el hecho de que los comerciales sean extravertidos o introvertidos puede afectar su capacidad para las ventas. Para ello, se seleccionan al azar 72 comerciales (36 introvertidos y 36 extravertidos) y, después de 1 año, el número medio de seguros contratados semanalmente y la cuasi-desviación estándar en cada grupo fueron: $\bar{X}_I = 24 \quad s'_I = 16 \quad \bar{X}_E = 30 \quad s'_E = 21$. ¿Qué se puede decir respecto a la cuestión de partida? Realiza la prueba de significación correspondiente, así como el intervalo de confianza de la diferencia de medias ($\alpha$ = 0,05).

### 2.2. El caso de dos medias relacionadas o dependientes

• Es el caso del contraste de la diferencia de dos medias obtenidas para una misma muestra de sujetos, pudiendo corresponder esas dos medias, bien a dos variables distintas (siempre y cuando sean comparables sus escalas de medida), bien a una misma variable medida en dos momentos temporales distintos (diseño de medidas repetidas o intra-sujeto). A este tipo de contraste se le suele denominar como contraste de hipótesis de dos medias dependientes. Veamos cómo llevar a cabo este contraste de hipótesis a partir de la realización de una prueba de significación y, posteriormente, a partir del intervalo de confianza para la diferencia entre ambas medias.

*A) Procedimiento basado en la prueba de significación: esta prueba recibe el nombre de Prueba t de Student para grupos o muestras relacionados.*

1. Se decide el nivel de riesgo ($\alpha$) que se desea asumir en el contraste de hipótesis y se plantean las hipótesis estadística y nula.

   Si una determinada población es medida en dos variables A y B, o lo que es más habitual, en una misma variable medida en dos momentos temporales A y B distintos, una posible hipótesis estadística sería: $H_e : \mu_B > \mu_A$ y, complementariamente, $H_o : \mu_B \leq \mu_A$

   Análogamente a como se hizo para la prueba de significación para dos medias independientes, las hipótesis anteriores se pueden expresar con un único parámetro ($\delta$):

$$H_e : \mu_B > \mu_A \;=\; H_e : \mu_B - \mu_A > 0 \;=\; H_e : \delta > 0 \;\; (donde\, \delta = \mu_B - \mu_A)$$

$$H_o : \mu_B \leq \mu_A \;=\; H_o : \mu_B - \mu_A \leq 0 \;=\; H_o : \delta \leq 0 \;\; (donde\, \delta = \mu_B - \mu_A)$$

   - En el caso de tratarse la hipótesis de forma bilateral:

$$H_e : \mu_B \neq \mu_A \;=\; H_e : \delta \neq 0$$
$$H_o : \mu_B = \mu_A \;=\; H_o : \delta = 0$$

2. Explorar si la diferencia de las medias obtenidas para A y para B en la muestra ($d$) parece apoyar, en principio, la hipótesis estadística planteada. Si esa diferencia es 0 o muy próxima a 0 no tendrá sentido continuar con los siguientes pasos del contraste de hipótesis y se mantendría la $H_o$.
3. Se calcula el siguiente estadístico de contraste:

$$t = \frac{d - E(d)}{EE(d)}$$

   donde $d$ es el valor de la diferencia entre las dos medias muestrales, $E(d)$ es el valor esperado de la distribución muestral del estadístico de la diferencia entre dos medias relacionadas bajo el supuesto de la hipótesis nula (o sea, que para este contraste de hipótesis será igual a 0), y *EE(d)* es el error estándar de esta distribución muestral. Este último se calcula como:

$$EE(d) = \frac{s'_{DIF}}{\sqrt{n}}$$

siendo $$s'_{DIF} = \sqrt{\frac{\sum (d - \bar{d})^2}{n-1}}$$

La última fórmula representa la cuasi-desviación estándar de la variable (*DIF*) resultante de obtener, para cada sujeto, la diferencia entre su valor en A y su valor en B (ver ejemplo a continuación).

4. Se obtiene en la distribución *t* de Student con *n*−1 grados de libertad, la probabilidad de obtener un valor como el obtenido con el estadístico de contraste o más extremo, esto es, el nivel de significación (*Sig*). (Nota: si la muestra es superior a 30 se puede utilizar la distribución normal en vez de la distribución *t*).
5. Decisión: se mantiene la $H_o$ si $Sig > \alpha$; por contra, se rechaza si $Sig < \alpha$.

**Ejemplo**: Supongamos un diseño pre-test/post-test en que 6 sujetos son sometidos a un tratamiento contra la ansiedad y tenemos mediciones, en una escala de 0 a 10, de la ansiedad antes y después de la aplicación del tratamiento. Las puntuaciones obtenidas y la diferencia entre ellas (*DIF*) fueron:

| *ID* | *Pre-test* | *Post-test* | *DIF* |
|---|---|---|---|
| S 1 | 9 | 6 | 3 |
| S 2 | 10 | 8 | 2 |
| S 3 | 8 | 7 | 1 |
| S 4 | 7 | 6 | 1 |
| S 5 | 8 | 4 | 4 |
| S 6 | 6 | 5 | 1 |

siendo $\text{Media}(\text{Pre-test}) = 8$, $\text{Media}(\text{Post-test}) = 6$, $\text{Media}(\text{DIF}) = 2$ y $S'_{DIF} = 1{,}265$

1. Nivel de riesgo ($\alpha$) = 0,05. Contraste de hipótesis bilateral:

$$H_e : \mu_B \neq \mu_A \;=\; H_e : \delta \neq 0$$
$$H_o : \mu_B = \mu_A \;=\; H_o : \delta = 0$$

2. La diferencia de las medias muestrales (8 – 6 = 2) sustenta, en un principio, la hipótesis de que este valor es diferente de 0 a nivel poblacional.
3. Cálculo del estadístico de contraste *t* para medias de muestras dependientes:

$$EE_{DIF} = \frac{1{,}265}{\sqrt{6}} = 0{,}516$$

$$t = \frac{2-0}{0,516} = 3,87$$

Al igual que en el caso del contraste sobre dos medias independientes, este estadístico de contraste es una estandarización de la media de las diferencias obtenida en la muestra ya que, si es cierta $H_o$, la distribución muestral de la diferencia de dos medias relacionadas en muestras de $n$ = 6 extraídas al azar de una población seguirá una distribución $t$ con parámetros $E(d) = 0$ y $EE(d) = 0,516$

4. La distribución muestral del estadístico $t$ es la distribución $t$ de Student con 5 grados de libertad (6−1) y, por tanto, para un contraste unilateral:

$$Sig = P(t \geq 3,87) = 0,006$$

Y, dado que el contraste es bilateral:

$$Sig = 0,006 \cdot 2 = 0,012$$

5. Decisión: 0,012 < 0,05, por tanto, se rechaza la $H_o$. Este resultado aporta evidencia empírica a favor del tratamiento contra la ansiedad objeto de estudio, pues la media de la variable de ansiedad es significativamente menor después del tratamiento.

• Los resultados obtenidos con SPSS al ejecutar la prueba $t$ para muestras relacionadas de este ejemplo se muestran en la siguiente tabla:

**SPSS: Analizar | Comparar medias | Prueba T para muestras relacionadas:**

**Prueba de muestras relacionadas**

| | Diferencias relacionadas | | | | | t | gl | Sig. (bilateral) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 95% Intervalo de confianza para la diferencia | | | | |
| | Media | Desviación tip. | Error típ. de la media | Inferior | Superior | | | |
| Par 1 Pretest - Postest | 2,000 | 1,265 | ,516 | ,673 | 3,327 | 3,873 | 5 | ,012 |

*B) Procedimiento basado en la utilización de intervalos de confianza:*

1. El $IC$ para este tipo de contraste se plantea para el valor de la diferencia entre las dos medias poblacionales ($\delta$) como:

$$IC(1-\alpha)(\delta) = d \pm (t_{n-1;1-\alpha/2} \cdot EE(d))$$

Nota: el *EE(d)* y los grados de libertad para obtener el valor *t* se obtienen tal y como se expuso en el apartado anterior al describir la prueba de significación. Si el tamaño de la muestra es superior a 30 se puede utilizar la distribución normal en vez de la distribución *t*.

2. Se decide el rechazo de la $H_o$ cuando el *IC* de la media de las diferencias no se corresponde con la diferencia expresada en la $H_o$; en caso contrario, se mantiene la $H_o$. Además este *IC* nos informa acerca de la magnitud de la media de las diferencias en la población.

**Ejemplo**: En el caso del ejemplo anterior sobre el estudio de la efectividad del tratamiento para la ansiedad, el *IC* se obtiene como:

$$IC\left(0,95\right)(\delta) = 2 \pm (2,57 \cdot 0,516) = \left[0,67;3,33\right]$$

Véase también este *IC* en los resultados de SPSS presentados en el apartado anterior.
Dado que el intervalo anterior no incluye el valor 0, se rechazaría la $H_o$. Además, este *IC* permite afirmar que, a nivel poblacional (con un nivel de confianza del 95%), la media en el pre-test se encuentra entre 0,67 y 3,33 unidades por encima de la media en el post-test.

**Ejercicio 3**: Según sugieren algunos trabajos, la realización de ejercicios de magia por parte de los niños puede afectar positivamente al desarrollo de su psicomotricidad fina. Con el fin de obtener evidencia adicional sobre esta afirmación, en una investigación se seleccionó una muestra aleatoria de 20 niños de 6 años y se evaluó su psicomotricidad fina. Después se les entrenó durante tres meses en la realización de ejercicios de magia y, terminada la intervención, se volvió a evaluar su capacidad psicomotriz. Las medias pre-test y post-test obtenidas fueron: 78,8 y 81,8, respectivamente. ¿Hay suficiente evidencia empírica para afirmar, con un $\alpha$ del 0,01, que la intervención mejoró la psicomotricidad de los niños?
Realiza la prueba de significación correspondiente, así como el intervalo de confianza de la diferencia de medias. Datos de interés para la resolución del ejercicio: $t_{(19)(0,995)} = 2,86$; $EE(d) = 1,4$.

**Ejercicio 4**: Realiza el mismo ejercicio considerando una muestra de 200 niños, en cuyo caso $EE(d) = 0,34$.

## 3. El caso de dos variables cuantitativas.

• Se trata aquí el contraste de hipótesis relativo al parámetro del coeficiente de correlación de Pearson ($\rho_{XY}$), el índice estadístico más utilizado a la hora de evaluar la asociación entre dos variables cuantitativas, así como el correspondiente a los parámetros de la ecuación de regresión lineal simple.

Como veremos, el contraste del parámetro de la pendiente de la ecuación de regresión se encuentra directamente ligado al contraste del coeficiente de correlación de Pearson.

### 3.1. Contraste de hipótesis acerca de la existencia de relación entre dos variables

• Este contraste está orientado a comprobar, para una determinada población, la hipótesis estadística $H_e : \rho_{XY} \neq 0$, frente a la hipótesis nula $H_o : \rho_{XY} = 0$ (hipótesis de independencia entre las dos variables), a partir del valor del coeficiente de correlación de Pearson ($r_{XY}$) obtenido en una muestra de esa población para dos variables cuantitativas $X$ e $Y$. Veamos cómo abordar este contraste de hipótesis a partir de la realización de una prueba de significación y, alternativamente, a través de la creación del intervalo de confianza correspondiente.

*(A) Procedimiento basado en la realización de pruebas de significación estadística*

1. Se decide el nivel de riesgo ($\alpha$) que se desea asumir en el contraste de hipótesis y se plantean las hipótesis estadística y nula. En este caso, asumiendo la realización de un contraste bilateral:

$$H_e : \rho_{XY} \neq 0$$
$$H_o : \rho_{XY} = 0$$

2. Explorar si el coeficiente de correlación de Pearson obtenido en la muestra apoya, en principio, la hipótesis estadística planteada. En caso contrario, no tiene sentido continuar con los siguientes pasos del contraste de hipótesis y se mantendría la $H_o$.
3. Se calcula el estadístico de contraste correspondiente a esta prueba de significación:

$$t = \frac{r_{XY} - E(r_{XY})}{EE(r_{XY})}$$

   donde $r_{XY}$ es el valor del coeficiente de correlación de Pearson obtenido a nivel muestral y $E(r_{XY})$es el valor esperado de la distribución muestral del estadístico del coeficiente de correlación bajo el supuesto de que sea cierto lo expresado en la hipótesis nula ($H_o : \rho_{XY} = 0$) y que, por tanto, para este contraste de hipótesis será siempre igual a 0. Respecto al denominador del estadístico de contraste, éste se obtiene de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$EE(r_{XY}) = \sqrt{\frac{1 - r_{XY}^2}{n-2}}$$

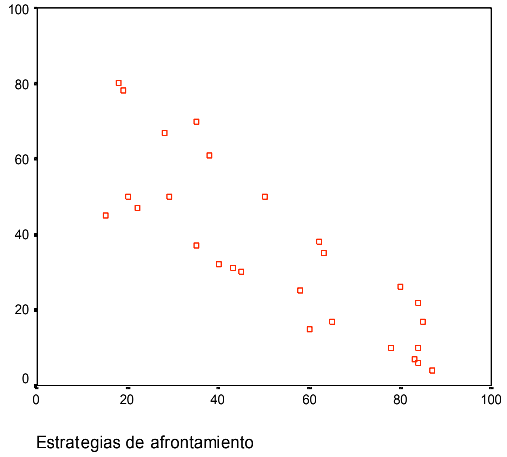
4. Se obtiene en la distribución $t$ con $n$-$2$ grados de libertad, la probabilidad de obtener un valor como el obtenido con el estadístico de contraste o más extremo, esto es, el nivel de significación (*Sig*).

Si el contraste es bilateral, se multiplica el nivel de significación por 2. Por otra parte, si la muestra es grande ($n > 30$), se puede utilizar la distribución normal en vez de la distribución $t$.

5. Decisión: se mantiene la $H_o$ si $Sig > \alpha$; por contra, se rechaza si $Sig < \alpha$. En el caso que se rechace la $H_o$, se suele expresar este resultado diciendo que la relación entre $X$ e $Y$ es estadísticamente significativa o, equivalentemente, que la relación entre ambas variables a nivel poblacional es, con un nivel de confianza del (1 -$\alpha$)%, distinta de cero.

**Ejemplo** (tomado de Losilla y cols., 2005)**:** A continuación se presentan los algunos de los resultados de un estudio realizado con una muestra de 27 personas adultas, cuyo objetivo fue investigar si existe relación entre el nivel de estrategias de afrontamiento ($X$) de los sujetos y su nivel de estrés ($Y$).

$r_{XY} = -0{,}847$




Vamos a realizar a continuación la prueba de significación que permita comprobar si existe una relación estadísticamente significativa entre ambas variables:

1. Nivel de riesgo ($\alpha$) = 0,05. Hipótesis:

$$H_e : \rho_{XY} \neq 0 \rightarrow H_o : \rho_{XY} = 0$$

2. El coeficiente de correlación de Pearson obtenido a nivel muestral ($r_{XY}$= -0,847) es muy distinto de 0, por tanto, la evidencia empírica parece apoyar la hipótesis de que existe relación entre ambas variables.

3. Obtención del estadístico de contraste $t$:

$$EE(r_{XY}) = \sqrt{\frac{1-(-0{,}847)^2}{27-2}} = 0{,}1065$$

$$t = \frac{-0{,}847-0}{0{,}1065} = -7{,}95$$

Al igual que para otras pruebas de significación ya tratadas, este estadístico de contraste consiste en una estandarización del estadístico obtenido en la muestra. Así, si es cierta la $H_o$ ($\rho_{XY} = 0$), la distribución muestral del coeficiente de correlación de Pearson obtenido en muestras de 27 casos extraídas al azar de la población, seguirá una distribución $t$ con parámetros $E(r_{XY})= 0$ y $EE(r_{XY})= 0{,}1065$.

4. La distribución muestral del estadístico $t$ en este ejemplo se ajustará a la de la distribución $t$ de Student con 25 grados de libertad (27 – 2 = 25). Al buscar en esta distribución cuál es la probabilidad de obtener un valor como el obtenido para t o menor, se obtiene que es igual a 0,000000013

$$Sig = P(t \leq -7{,}95) = 0{,}000000013$$

Por ser el contraste bilateral: $Sig = 0{,}000000013 \cdot 2 = 0{,}000000026$

5. Decisión: 0,000000026 < 0,05, por tanto, se rechaza la $H_o$ y se concluye que hay una relación estadísticamente significativa entre ambas variables o, dicho de otro modo, que ambas muestras proceden de una población en la que $\rho_{XY} \neq 0$.

• Cuando se obtiene en SPSS el coeficiente de correlación de Pearson entre 2 variables, los resultados son presentados en forma de matriz –la conocida como matriz de correlaciones–, donde para todas las variables analizadas se muestra el coeficiente de correlación por pares. En el caso de que la prueba de significación evidencie una relación estadísticamente significativa, se añade un asterisco ($\alpha$ = 0,05) o dos ($\alpha$ = 0,01) junto al valor del correspondiente coeficiente.

Para el **ejemplo** de las variables Estrategias de afrontamiento" y Estrés", la matriz inferior muestra el resultado proporcionado por SPSS al obtener el coeficiente de correlación de Pearson entre ambas variables.

**SPSS: Analizar | Correlaciones | Bivariadas…**

**Correlaciones**

| | | Puntuación escala de estrés | Estrategias de afrontamiento |
|---|---|---|---|
| Puntuación escala de estrés | Correlación de Pearson | 1 | -,847** |
| | Sig. (bilateral) | | ,000 |
| | N | 27 | 27 |
| Estrategias de afrontamiento | Correlación de Pearson | -,847** | 1 |
| | Sig. (bilateral) | ,000 | |
| | N | 27 | 27 |

**. La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

*(B) Procedimiento basado en la utilización de intervalos de confianza*

1. Se establece el nivel de riesgo ($\alpha$).

$$H_e : \rho_{XY} \neq 0 \rightarrow H_o : \rho_{XY} = 0$$

2. Obtención del *IC*: Se aplica primero la transformación '*z de Fisher*' sobre el valor de correlación muestral ($r_{XY}$ => $z_{r_{XY}}$):

$$z_{r_{XY}} = 0.5 \cdot \ln \left[ \frac{1 + r_{XY}}{1 - r_{XY}} \right]$$

Se calcula el *IC* transformado de acuerdo a la siguiente expresión:

$$IC(1-\alpha)(z_{\rho_{XY}}) = \left[ z_{r_{XY}} \pm z_{(1-\alpha/2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-3}} \right] = [a; b]$$

Finalmente, tras calcular el *IC* de $z_{\rho_{XY}}$, debemos realizar la transformación inversa a fin de obtener el *IC* de $\rho_{XY}$:

$$IC(1-\alpha)(\rho_{XY}) = \left[ \frac{e^{2 \cdot a} - 1}{e^{2 \cdot a} + 1}; \frac{e^{2 \cdot b} - 1}{e^{2 \cdot b} + 1} \right]$$

3. Se decide el rechazo de la $H_o$ cuando el *IC* de la correlación no contiene el valor 0 expresado en la $H_o$. En caso contrario, se mantiene la $H_o$.

Para el **ejemplo** de las variables "Estrategias de afrontamiento" y Estrés", el *IC* de la correlación para un nivel de confianza del 0,95 vendría dado por la siguiente expresión:

$$z_{r_{XY}} = 0.5 \cdot \ln \left[ \frac{1 - 0,847}{1 + 0,847} \right] = -1,24$$

$$IC(0,95)(z_{\rho_{XY}}) = \left[ -1,24 \pm 1,96 \cdot \frac{1}{\sqrt{24}} \right] = [-1,64; -0,84]$$

$$IC(1-\alpha)(\rho_{XY}) = \left[ \frac{e^{2 \cdot -1,64} - 1}{e^{2 \cdot -1,64} + 1}; \frac{e^{2 \cdot -0,84} - 1}{e^{2 \cdot -0,84} + 1} \right] = \left[ \frac{0,038 - 1}{0,038 + 1}; \frac{0,186 - 1}{0,186 + 1} \right] = [-0.926; -0,657]$$

A partir del resultado obtenido, se decide el rechazo de la $H_o$ porque el *IC* de la correlación no contiene el valor expresado en la $H_o$, esto es, que es igual a cero. En consecuencia, se concluye que hay una relación estadísticamente significativa entre ambas variables o, dicho de otro modo, que ambas muestras proceden de una población en la que $\rho_{XY} \neq 0$.

**Ejercicio 5**: Se sospecha que existe algún tipo de relación entre la cantidad ingerida de un determinado ansiolítico y el tiempo de reacción ante señales acústicas. Para comprobarlo, se realizó un estudio con una muestra de 98 sujetos, obteniéndose un coeficiente de correlación de Pearson entre ambas variables de 0,20. ¿Qué se puede concluir, a partir de la evidencia empírica obtenida, respecto a la existencia de relación entre ambas variables a nivel poblacional? Para contestar, realizad la prueba de significación y el intervalo de confianza correspondiente ($1-\alpha = 0{,}90$).

### 3.2. Contraste de hipótesis acerca del parámetro de la pendiente de la ecuación de regresión

• Se pueden plantear contrastes de hipótesis para los dos parámetros del modelo de regresión lineal simple, sin embargo, nos vamos a centrar aquí únicamente en el parámetro asociado a la variable predictora ($\beta_1$) -la pendiente de la ecuación de regresión- y no en el parámetro del origen de la ecuación ($\beta_0$), pues el contraste de hipótesis más habitual en la práctica es acerca de si $\beta_1$ es significativamente distinto de 0. Precisamente, el objetivo principal en la aplicación de este contraste ($H_e$: $\beta_1 \neq 0$) suele consistir en valorar si se puede considerar como significativamente distinta de cero la contribución de la variable explicativa ($X$) como predictora de la variable de respuesta ($Y$). En cambio, no suele resultar ya tan relevante en la práctica el evaluar si el parámetro de la constante de la ecuación de regresión ($\beta_0$) es significativamente distinto de 0 ($H_e$: $\beta_0 \neq 0$).

*(A) Procedimiento basado en la realización de pruebas de significación estadística*

1. Se decide el nivel de riesgo ($\alpha$) que se desea asumir en el contraste de hipótesis y se plantean las hipótesis estadística y nula, en este caso (asumiendo la realización de un contraste bilateral):

$$H_e : \beta_1 \neq 0$$
$$H_o : \beta_1 = 0$$

2. Explorar si el estadístico de la pendiente obtenido en la muestra ($b_1$) apoya, en un principio, la hipótesis estadística planteada. En caso contrario, no tiene sentido continuar con los siguientes pasos del contraste de hipótesis y se mantendría la $H_o$.
3. Se calcula el estadístico de contraste correspondiente a esta prueba de significación:

$$t = \frac{b_1 - E(b_1)}{EE(b_1)}$$

donde $b_1$ es el valor de la pendiente obtenido en la muestra y $E(b_1)$ es el valor esperado de la distribución muestral del estadístico de la pendiente bajo el supuesto de que sea cierto lo expresado en la hipótesis nula ($H_o : \beta_1 = 0$) y que, para este contraste de hipótesis, es igual a 0. Respecto al denominador del estadístico de contraste (el error estándar de la distribución muestral del estadístico de la pendiente bajo el supuesto de que sea cierto lo expresado en la hipótesis nula), éste se obtiene según la siguiente fórmula:

$$EE(b_1) = \sqrt{\frac{SCE}{(n-2)\cdot SC_X}}$$

Nota: para la obtención de las *Sumas de Cuadrados (SC)* ver capítulo "El modelo de regresión lineal" en el material de Estadística Descriptiva de la *OCW*.

4. Dado que el estadístico de contraste se distribuye de acuerdo a la distribución *t* con $n-2$ grados de libertad, se obtiene para el valor de *t* que se haya obtenido según la fórmula anterior, su correspondiente nivel de significación (*Sig*), esto es, la probabilidad de obtener un valor como el obtenido o más extremo. En caso de contraste bilateral, se multiplica por dos el valor *Sig* obtenido. Si la muestra es grande (> 30), se puede utilizar la distribución normal en vez de la distribución *t*.

5. Decisión: se mantiene la $H_o$ si $Sig > \alpha$; por contra, se rechaza si $Sig < \alpha$. En el caso que se rechace la $H_o$, se suele expresar este resultado diciendo que el valor de la pendiente es estadísticamente significativo, esto es, que el valor de la pendiente de la ecuación de regresión a nivel poblacional es, con un nivel de confianza del $(1-\alpha)$%, distinto de cero.

**Ejemplo:** Siguiendo con el ejemplo de las variables "Estrategias de afrontamiento" y "Estrés" utilizado para el contaste de hipótesis del coeficiente de correlación de Pearson, supongamos ahora que se haya planteado un modelo predictivo en que la variable "Estrategias de afrontamiento" es considerada como variable explicativa ($X$) y la variable "Estrés" como variable de respuesta ($Y$), y que este modelo predictivo se haya plasmado en la obtención, a partir de datos empíricos ($n$ = 27), de la siguiente ecuación de regresión lineal:

$$Estres' = 75,4 - 0,763 \cdot Afrontamiento$$

Los resultados obtenidos con SPSS asociados a este análisis de regresión son los que se muestran a continuación:

**Coeficientes[a]**

| Modelo | | Coeficientes no estandarizados B | Coeficientes no estandarizados Error típ. | Coeficientes estandarizados Beta | t | Sig. | Intervalo de confianza para B al 95% Límite inferior | Intervalo de confianza para B al 95% Límite superior |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (Constante) | **75.425** | 5.532 | | 13.634 | .000 | **64.031** | **86.819** |
| | Estrategias de afrontamiento | **-.763** | .096 | -.847 | -7.951 | .000 | **-.961** | **-.566** |

a. Variable dependiente: Puntuación escala de estrés

**ANOVA[b]**

| Modelo | | Suma de cuadrados | gl | Media cuadrática | F | Sig. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Regresión | 9320.650 | 1 | 9320.650 | 63.216 | .000[a] |
| | Residual | 3686.017 | 25 | 147.441 | | |
| | Total | 13006.667 | 26 | | | |

a. Variables predictoras: (Constante), Estrategias de afrontamiento

b. Variable dependiente: Puntuación escala de estrés

A partir de la estimación del parámetro de la pendiente de la ecuación de regresión ($b_1$ = −0,76), vamos a realizar la prueba de significación que permita contrastar la hipótesis de que ese parámetro es distinto de 0 a nivel poblacional:

1. Nivel de riesgo ($\alpha$) = 0,05. Hipótesis asumiendo un contraste bilateral:

$$H_e : \beta_1 \neq 0 \rightarrow H_o : \beta_1 = 0$$

2. El valor de la pendiente obtenido a nivel muestral (–0,763), distinto de 0, apoya la hipótesis estadística planteada.

3. Obtención del estadístico de contraste $t$:

(Un dato necesario para poder obtener $EE(b_1)$: la varianza de la variable "Estrategias de afrontamiento es igual a 592,25)

$$EE(b_1) = \sqrt{\frac{3686,02}{(27-2)\cdot 15990,7}} = 0,096$$

$$t = \frac{-0,763 - 0}{0,096} = -7,95$$

Al igual que para otras pruebas de significación ya tratadas, este estadístico de contraste consiste en una estandarización del estadístico obtenido en la muestra. Así, la distribución muestral del estadístico de la pendiente de la ecuación de regresión obtenido en muestras de 27 casos extraídas al azar de una población en que ese parámetro sea 0 ($\beta_1 = 0$), seguirá una distribución $t$ con parámetros $E(\beta_1)$= 0 y $EE(\beta_1)$= 0,096.

4. La distribución muestral del estadístico $t$ en este ejemplo será la distribución $t$ de Student con 25 grados de libertad (27 − 2). Al buscar en esta distribución cuál es la probabilidad de obtener un valor como el obtenido para $t$ o más extremo, se obtiene que es igual a 0,000000013

$$Sig = P(t \leq -7{,}95) = 0{,}000000013$$

Por ser el contraste bilateral: $Sig = 0{,}000000013 \cdot 2 = 0{,}000000026$

5. Decisión: 0,000000026 < 0,05, por lo tanto, se rechaza la $H_o$ y se concluye que el valor del parámetro de la pendiente es distinto de 0 (con un nivel de confianza del 95%) o, en otros términos más aplicados, que la variable "Estrategias de afrontamiento" es un predictor estadísticamente significativo del "Estrés".

Nota importante: Si comparamos el valor del estadístico de contraste obtenido en la prueba de significación de este ejemplo con el obtenido en el ejemplo anterior de la prueba de significación del coeficiente de correlación de Pearson, llegaremos a una conclusión importante: en efecto, si para el coeficiente de correlación entre dos variables obtenemos un resultado estadísticamente significativo, también lo obtendremos para la pendiente de la ecuación de regresión simple de una variable sobre la otra.

*(B) Procedimiento basado en la utilización de intervalos de confianza*

1. Se establece el nivel de riesgo ($\alpha$) y la hipótesis a contrastar. En el caso de un contraste de hipótesis bilateral:

$$H_e : \beta_1 \neq 0 \rightarrow H_o : \beta_1 = 0$$

2. Se obtiene el $IC$ específico para este tipo de contraste:

$$IC(1-\alpha)(\beta_1) = \left[ b_1 \pm (t_{n-2;1-\alpha/2} \cdot EE(b_1) \right]$$

donde:

$$EE(b_1) = \sqrt{\frac{SCE}{(n-2) \cdot SC_X}}$$

Recordar que a partir de $n \geq 30$, la distribución normal y la distribución $t$ son muy próximas entre sí y, por tanto, se pueden utilizar los valores de la distribución normal asociados al nivel de confianza que se establezca.

3. Se decide el rechazo de la $H_o$ cuando el $IC$ de la pendiente de regresión [ $IC(1-\alpha)(\beta_1)$ ] no contiene el valor 0 expresado en la $H_o$. En caso contrario, se mantiene la $H_o$.

Para el **ejemplo** de las variables "Estrategias de afrontamiento" y Estrés", el *IC* del parámetro de la pendiente de regresión vendría dado por la siguiente expresión (siendo α = 0,05): (Algunos datos de interés para su cálculo: $EE(b_1)$=0,096; $t_{25;0,975} = 2,06$)

$$IC(0,95)(\rho_{XY}) = \left[-0,763 \pm 2,06 \cdot 0,096\right] = \left[-0,961; -0,566\right]$$

Dado que el *IC* no contiene el valor 0, se rechaza la $H_o$ y, por lo tanto, se considera el parámetro de la pendiente como significativamente distinto de cero.

**Ejercicio 6**: En un estudio en enseñanza primaria en que se pretendía poner de manifiesto la posible influencia de las expectativas que de los estudiantes tienen los profesores sobre el rendimiento académico de los mismos, se obtuvo a partir de una muestra de 200 estudiantes la siguiente ecuación de regresión: $Y' = 5,7 + 0,20 \cdot X$ A partir de este resultado, ¿se puede considerar estadísticamente significativa la contribución de la variable "Expectativas del profesor" (*X*) a la hora de predecir el "Rendimiento académico" (*Y*) de los estudiantes?
Realiza la prueba de significación correspondiente, así como el intervalo de confianza de la diferencia de medias (α = 0,05). Datos de interés: $s^2_X = 9$; $s^2_Y = 4$.

## Referencias

Losilla, J. M., Navarro, B., Palmer, A., Rodrigo, M. F., y Ato, M. (2005). *Del contraste de hipótesis al modelado estadístico.* Tarrasa: CBS (www.edicionsapeticio.com).

Loftus, E. F., y Burns, T. E. (1982). Mental shock can produce retrograde amnesia. *Memory and Cognition, 10,* 318-323.

Pardo, A., y San Martín, R. (1998). *Análisis de datos en psicología II* (2ª edición). Madrid: Pirámide.