ESTADÍSTICA II

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS INCLUIDOS EN LOS TEMAS 1 a 3 DE ESTADÍSTICA II

Profesores: J Gabriel Molina y María F. Rodrigo
Universitat de València

TEMA 1

1) a) accidental, b) aleatorio simple, c) estratificado, d) accidental, e) accidental, f) conglomerados, g) estratificado, h) conglomerados, i) no hay muestreo

2)

$$\hat{\mu}_X = 15,29;\ \hat{Md}_Y = 3;\ \hat{\sigma}_Y^2 = 1,67;\ \hat{\sigma}_{XY} = 3,5;\ \hat{\rho}_{XY} = 0,945$$

3)

La distribución muestral de la media para muestras *n* = 50 tiene menor dispersión –es más homogénea–, que para muestras *n* = 10, lo cual pone de manifiesto, como sería de esperar, que las estimaciones de la media poblacional son más próximas entre sí cuando se obtienen a partir de muestras de tamaño mayor.

4)

$$\mu_{\bar{X}} = 4,5\cdot 0,05 + 5\cdot 0,14 + 5,5\cdot 0,63 + 6\cdot 0,12 + 6,5\cdot 0,06 = 5,55$$

5)

a) Normal con E(X) = 100 y $EE(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{n}}$

b) $Z_X = \frac{110-100}{15} = 0,67 \rightarrow$ P(X ≥ 110) = 1- 0,7486 = 0,2514

c) $EE(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{20}} = 3,35$

$Z_{\bar{X}} = \frac{110-100}{3,35} = 2,99 \rightarrow$ P($\bar{X}$ ≥ 110) = 1- 0,9986 = 0,0014

d) $Z_{\bar{X}} = \frac{95-100}{3,35} = -1,49 \rightarrow$ P($\bar{X}$ ≤ 95) = 0,0681

$Z_{\bar{X}} = \frac{95-100}{15/\sqrt{100}} = -3,33 \rightarrow$ P($\bar{X}$ ≤ 95) =0,0000

e) 90% central → entre Z = -1,64 y Z = 1,64 → entre X = 75,4 y X = 124,6
95% central → entre Z = -1,96 y Z = 1,96 → entre X = 70,6 y X = 129,4
99% central → entre Z = -2,58 y Z = 2,58 → entre X = 61,3 y X = 138,7

f) *IP*(0,95)($\bar{X}$) = 100 ± 1,96 · 3,35 = [93,4; 106,6]
$EE(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{\sqrt{50}} = 2,12 \rightarrow$ *IP*(0,95)($\bar{X}$) = 100 ± 1,96 · 2,12 = [95,8; 104,2]

g) *IP*(0,90)($\bar{X}$) = 100 ± 1,64 · 3,35 → [94,5; 105,5]

6)

a) Forma: *B*(25; 0,4); E(p_x) = 0,4; $EE(p_x) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{0,4\cdot 0,6}}{\sqrt{25}} = 0,098$

Criterios convergencia a la distribución normal: 25 · 0,4 = 10 (≥5) y 25 · 0,6 ·= 15 (≥5)

Por tanto: $B(25; 0{,}4) \approx N(0{,}4; 0{,}098)$

b) $z_{0,5} = \dfrac{0{,}5 - 0{,}4}{0{,}098} = 1{,}02$ → $P(p > 0{,}5) = P(Z_p > 1{,}02) = 1 - 0{,}8461 = 0{,}1539$

c) $EE(\bar{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{0{,}4 \cdot 0{,}6}}{\sqrt{40}} = 0{,}077$

$z_{0,5} = \dfrac{0{,}5 - 0{,}4}{0{,}077} = 1{,}30$ → $P(p > 0{,}5) = P(Z_p > 1{,}30) = 1 - 0{,}9032 = 0{,}0968$

d) $EE(p_x) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{0{,}4 \cdot 0{,}6}}{\sqrt{20}} = 0{,}11$

$IP(0{,}95)(p_x) = 0{,}4 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}11 = [0{,}184; 0{,}616]$ (Aprox. entre 4 y 12 fumadores)

e) $IP(95\%)(p_x) = 0{,}4 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}077 = [0{,}249; 0{,}551]$ (Aprox. entre 5 y 11 fumadores)

7)

$$s'_X = \frac{s_X \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} = s'_X = \frac{6{,}856 \cdot \sqrt{40}}{\sqrt{39}} = 6{,}94$$

$EE = 6{,}94/\sqrt{40} = 1{,}097$

$IC(0{,}90) = 123 \pm 1{,}64 \cdot 1{,}097 = [121{,}20; 124{,}80]$

$IC(0{,}95) = 123 \pm 1{,}96 \cdot 1{,}097 = [120{,}85; 125{,}15]$

– En el caso de una muestra de tamaño ***n*=20**

$$s'_X = \frac{s_X \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} = s'_X = \frac{6{,}856 \cdot \sqrt{20}}{\sqrt{19}} = 7{,}034$$

$EE = 7{,}034 / \sqrt{20} = 1{,}573$

$IC(0{,}90) = 123 \pm 1{,}7291 \cdot 1{,}573 = [120{,}28; 125{,}72]$

$IC(0{,}95) = 123 \pm 2{,}0930 \cdot 1{,}573 = [119{,}71; 126{,}29]$

8)

a) $\alpha=0{,}05$ y $n=100 \rightarrow IC(0{,}95)(\mu) = 7 \pm 1{,}96 \cdot \dfrac{2{,}3}{\sqrt{100}} = [6{,}55; 7{,}45]$

b) $\alpha=0{,}05$ y $n=300 \rightarrow IC(0{,}95)(\mu) = 7 \pm 1{,}96 \cdot \dfrac{2{,}3}{\sqrt{300}} = [6{,}74; 7{,}25]$

c) $\alpha=0{,}10$ y $n=300 \rightarrow IC(0{,}90)(\mu) = 7 \pm 1{,}64 \cdot \dfrac{2{,}3}{\sqrt{300}} = [6{,}79; 7{,}21]$

9)

a) $\alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \rightarrow {}_{0,025}t_{19} = -2{,}09$ y ${}_{0,975}t_{19} = 2{,}09$

IC (95%)(μ) = $6{,}5 \pm 2{,}09 \cdot 0{,}54 = [5{,}37; 7{,}63]$

b) $\alpha = 0{,}10 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}05 \rightarrow {}_{0,05}t_{19} = -1{,}73$ y ${}_{0,95}t_{19} = 1{,}73$

IC (90%)(μ) = $6{,}5 \pm 1{,}73 \cdot 0{,}54 = [5{,}57; 7{,}43]$

10)

$$IC(0{,}95) = 0{,}45 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}45 \cdot 0{,}55}{40}} = [0{,}296; 0{,}604]$$

Criterio tamaño satisfecho dado que:

$0{,}296 \cdot 40 = 11{,}84 \geq 5$

$0{,}604 \cdot 40 = 24{,}16 \geq 5$

$(1-0{,}296) \cdot 40 = 28{,}16 \geq 5$

$(1-0{,}604) \cdot 40 = 15{,}84 \geq 5$

11)

a) $IC(99\%)(\pi) = 0,6 \pm 2,58 \cdot \sqrt{\dfrac{0,6 \times 0,4}{80}} = [0,46;\ 0,74]$

b) Convergencia a la distr. normal:
$0,46 \times 80 = 36,8$ y $0,54 \times 80 = 43,2$
$0,74 \times 80 = 59,2$ y $0,26 \times 80 = 20,8$

c) $IC(90\%)(\pi) = 0,6 \pm 1,64 \cdot \sqrt{\dfrac{0,6 \times 0,4}{80}} = [0,51;\ 0,69]$

d) $IC(90\%)(\pi) = 0,6 \pm 1,64 \cdot \sqrt{\dfrac{0,6 \times 0,4}{150}} = [0,53;\ 0,67]$

TEMA 2

1)

a) $H_e : \pi_X > 0,40$

b) $H_e : \mu_X < 230$

c) $H_e : \pi_{FE_{Rural}} \neq \pi_{FE_{Urbano}}$

d) $H_e : \sigma_{X_{Asiaticos}} \neq \sigma_{X_{Europeos}}$ (Otras hipótesis son posibles, por ejemplo, $H_e : CV_{X_{Asiaticos}} \neq CV_{X_{Europeos}}$)

e) $H_e : \mu_{X_E} > \mu_{X_{NE}}$ (Otras hipótesis son posibles, por ejemplo, $H_e : Md_{X_E} > Md_{X_{NE}}$)

f) $H_e : \rho_{XY} \neq 0$

2)

a) $H_o : \pi_X \leq 0.40$

b) $H_o : \mu_X \geq 230$

c) $H_o : \pi_{FE_{Rural}} = \pi_{FE_{Urbano}}$

d) $H_o : \sigma_{X_M} = \sigma_{X_V}$

e) $H_o : \mu_{X_E} \leq \mu_{X_{NE}}$

f) $H_0 : \rho_{XY} = 0$

3)

a) $p = 160 / 500 = 0,32$
Convergencia a la distribución normal:
$0,28 \cdot 500 = 140$ y $0,72 \cdot 500 = 360$
$0,36 \cdot 500 = 180$ y $0,64 \cdot 500 = 320$

$IC(0,05)(\pi) = 0,32 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\dfrac{0,32 \cdot 0,68}{500}} = [0,279;\ 0,361]$

b) $IC(0,10)(\pi) = 0,32 \pm 1,64 \cdot \sqrt{\dfrac{0,32 \cdot 0,68}{500}} = [0,286;\ 0,354]$

c) He: $\pi \neq 0,27$; Ho: $\pi = 0,27$
$IC(0,95)(\pi) = [0,279;\ 0,361] \rightarrow$ Se rechaza la H_O

Prueba de significación bilateral de la proporción:

$$Z = \frac{0,32 - 0,27}{\sqrt{\dfrac{0,27 \cdot 0,73}{500}}} = 2,52$$

$P = P(Z \geq 2.52) + P(Z \leq -2.52) = 0.0059 \cdot 2 = 0.0118 \longrightarrow$ Se rechaza la H_O

d) $IC(0{,}90)(\pi) = [0{,}286;\ 0{,}354]$ → Se rechaza la H_o

e) $IC(0{,}99)(\pi) = [0{,}266;\ 0{,}374]$ → Se mantiene la H_o

4)

a) $IC(95\%)(\mu) = 195 \pm 1{,}96 \cdot 4{,}38 = [186{,}42;\ 203{,}58]$

b) $IC(95\%)(\mu) = 195 \pm 1{,}96 \cdot 2{,}4 = [190{,}3;\ 199{,}7]$

c) $IC(99\%)(\mu) = 195 \pm 2{,}58 \cdot 4{,}38 = [183{,}72;\ 206{,}28]$

d) H_e: $\mu > 191$; H_o: $\mu \leq 191$ → $IC(95\%)(\mu) = [186{,}42;\ 203{,}58]$ → Se mantiene la H_o

Prueba de significación unilateral de la media: $\overline{X} = 195$; μ (Ho)=190

$$Z = \frac{195 - 191}{4.38} = 0{,}913 \rightarrow P(Z \geq 0{,}913) = 0.1814 \rightarrow \text{Se mantiene la } H_o$$

e) n = 100 → $IC(95\%)(\mu) = [190{,}3;\ 199{,}7]$ → Se mantiene la H_o
n = 170 → $IC(95\%)(\mu) = [191{,}4;\ 198{,}6]$ → Se rechaza la H_o
n = 240 → $IC(95\%)(\mu) = [191{,}9;\ 198{,}1]$ → Se rechaza la H_o

5)

a) p = 11/25 = 0,44

H_e : $\pi > 0{,}30$; H_o: $\pi \leq 0{,}30$

Convergencia con la distribución normal:

$0{,}25 \cdot 25 = 6{,}25$ y $0{,}75 \cdot 25 = 18{,}75$

$0{,}63 \cdot 25 = 15{,}75$ y $0{,}37 \cdot 25 = 9{,}25$

$$IC(95\%)(\pi) = 0{,}44 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}44 \cdot 0{,}56}{25}} = [0{,}25;\ 0{,}63] \rightarrow \text{Se mantiene la } H_o$$

Prueba de significación unilateral de la proporción:

$$Z = \frac{0{,}44 - 0{,}30}{\sqrt{\frac{0{,}30 \cdot 0{,}70}{25}}} = 1{,}53$$

$P(Z \geq 1{,}53) = 0{,}0630$ → Se mantiene la H_o

b) Y si la hipótesis hubiera sido bilateral:

H_e : $\pi \neq 0{,}30$; H_o: $\pi = 0{,}30$

$Sig = 0{,}0630 \cdot 2 = 0{,}126$

6)

a) $IC(95\%)(\mu) = 76 \pm 1{,}96 \cdot \frac{15}{\sqrt{70}} = [72{,}49;\ 79{,}51]$

b) H_e: $\mu > 71$; H_o: $\mu \leq 71$ → Se rechaza la H_o

Prueba de significación unilateral de la media:

$$Z = \frac{76 - 71}{\frac{15}{\sqrt{70}}} = 2.79$$

P ($Z \geq 2.79$)=0.0026 → Rechazo Ho

7)

a) Diferencia significativa tanto desde un punto de vista estadístico como práctico.
b) Diferencia estadísticamente significativa pero no concluyente en la práctica.
c) Diferencia estadísticamente significativa pero no concluyente en la práctica.
d) Diferencia estadísticamente significativa pero no relevante desde un punto de vista práctico.

TEMA 3

1) $\chi^2 = 2{,}84$ $Sig = 0{,}24$
$\varphi = 0{,}128$ $V = 0{,}128$
No existe relación a nivel poblacional, con un nivel de confianza del 95%, entre las variables 'Compaginar estudios y trabajo' y 'Sexo' ($\chi^2 = 2{,}84$; $P > 0{,}05$). El valor de los coeficientes *phi* y *V de Cramer* (= 0,128) pone de manifiesto la baja intensidad de la asociación entre ambas variables.

2) En principio, no es posible aplicar la prueba porque el porcentaje de casillas en que la frecuencia esperada es menor que 5 es superior a 20, en concreto, el 58,3% de las casillas de la tabla de contingencia.

4) $\alpha = 0{,}05$ $H_e : \mu_{X_{SI}} \neq \mu_{X_{NO}}$ $H_o : \mu_{X_{SI}} = \mu_{X_{NO}}$
Prueba de significación:
$t = 6/1{,}01 = 5{,}92$ $Sig \approx 0$ $\rightarrow$ Se rechaza la H_o
Intervalo de confianza:
$IC(0{,}95)(\delta) = [4{,}01 ; 7{,}99]$ $\rightarrow$ Se rechaza la H_o

5)
$n = 20$ $\alpha = 0{,}01$ $H_e : \mu_{X_{POST}} > \mu_{X_{PRE}}$ $H_o : \mu_{X_{POST}} \leq \mu_{X_{PRE}}$
Prueba de significación:
$T = 3/1{,}4 = 2{,}14$ $Sig = 0{,}023$ $\rightarrow$ Se mantiene la H_o
Intervalo de confianza:
$IC(0{,}99)(\delta) = 3 \pm 2{,}86 \cdot 1{,}4 = [-1{,}004; 7{,}004]$ $\rightarrow$ Se mantiene la H_o

6)
$n = 200$ $\alpha = 0{,}01$ $H_e : \mu_{X_{POST}} > \mu_{X_{PRE}}$ $H_o : \mu_{X_{POST}} \leq \mu_{X_{PRE}}$
Prueba de significación:
$T = 3/0{,}34 = 8{,}82$ $Sig \approx 0$ $\rightarrow$ Se rechaza la H_o
Intervalo de confianza:
$IC(0{,}99)(\delta) = 3 \pm 2{,}58 \cdot 0{,}34 = [2{,}12; 3{,}87]$ $\rightarrow$ Se rechaza la H_o

7)
$\alpha = 0{,}10$ $H_e : \rho_{XY} \neq 0$ $H_o : \rho_{XY} = 0$
Prueba de significación:
$T = 0{,}2/0{,}1 = 2$ $Sig = 0{,}048$ $\rightarrow$ Se rechaza la H_o
Intervalo de confianza:
$z_{rxy} = 0{,}203$

$$IC(1-\alpha)(z_{\rho_{XY}}) = \left[0{,}203 - 1{,}64 \cdot \frac{1}{\sqrt{95}} \ ; \ 0{,}203 + 1{,}64 \cdot \frac{1}{\sqrt{95}}\right] = [0{,}035 \ ; \ 0{,}371]$$

$$IC(1-\alpha)(\rho_{XY}) = \left[\frac{e^{2\cdot 0{,}035} - 1}{e^{2\cdot 0{,}035} + 1}; \frac{e^{2\cdot 0{,}371} - 1}{e^{2\cdot 0{,}371} + 1}\right] = \left[\frac{0{,}072}{2{,}072}; \frac{1{,}1}{3{,}1}\right] = [0{,}035 \ ; 0{,}355] \rightarrow$$ se rechaza la H_o

8)
$\alpha = 0{,}05$ $H_e : \beta_1 \neq 0$ $H_o : \beta_1 = 0$
Prueba de significación:
$EE\ (b_1) = 0{,}047$
$T = 0{,}2/0{,}047 = 4{,}25$ $Sig \approx 0$ $\rightarrow$ Se rechaza la H_o
Intervalo de confianza:

$$IC(1-\alpha)(\beta_1) = 0{,}20 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}047 = [0{,}108; 0{,}292]$$ $\rightarrow$ Se rechaza la H_o