

T. 6 – Estadísticos de posición individual

1. Los porcentajes acumulados

2. Las puntuaciones típicas

2.1. Las escalas derivadas

- Hasta ahora se ha abordado la descripción de los datos de conjuntos de observaciones (variables); en este capítulo, por el contrario, se centra la atención en la descripción de observaciones particulares, en concreto, en estadísticos que nos van a ofrecer información sobre un valor concreto en relación a la posición que ocupa dentro de un conjunto de valores observados.
- En cuanto que se trata de estadísticos que ofrecen información sobre la posición de un valor respecto a un grupo de referencia, nos van a permitir establecer una interpretación relativa de los valores observados.

Ejemplo: Nos dice un amigo que les han pasado a todos los trabajadores de su empresa un test de aptitudes verbales y que ha obtenido una puntuación igual a 134; a continuación, sin más detalles, nos pregunta que si esa puntuación significa que es bueno o malo en aptitudes verbales.

¿Qué información adicional podría sernos de utilidad a fin de poder ofrecerle algún tipo de valoración de esa puntuación?

1. Los porcentajes acumulados

- El porcentaje acumulado ($\%_a$) de un valor concreto de una variable es el porcentaje de casos que obtienen un valor inferior o igual a ese en la variable en cuestión, información que puede obtenerse directamente a partir de la distribución de frecuencias correspondiente a esa variable.

- A estos porcentajes acumulados se les suele denominar más habitualmente, aunque de un modo equívoco, como percentiles (término ya utilizado en el contexto de los estadísticos de posición grupal). Así, es más común escuchar expresiones tales como “Va a ser muy alto, está en el percentil 80 de altura” o “No ha llegado al percentil 5 en la prueba de coordinación óculo-manual”.

Ejemplo de obtención de porcentajes acumulados o percentiles: sea la siguiente distribución de frecuencias de las puntuaciones en un test de inteligencia administrado a una muestra de 250 personas.

- ¿Cuál sería el porcentaje acumulado correspondiente a una puntuación de 97 en ese test?, ¿cómo la interpretaríamos?
- ¿Y si la puntuación fuese igual a 103?
- ¿Y si fuese igual a 91? => interpolación del %_a

CI	n_i	n_a	p_i	p_a	% _a
89	1	1	0,004	0,004	0,4
90	2	3	0,008	0,012	1,2
92	3	6	0,012	0,024	2,4
93	5	11	0,02	0,044	4,4
94	8	19	0,032	0,076	7,6
95	10	29	0,04	0,116	11,6
96	14	43	0,056	0,172	17,2
97	17	60	0,068	0,24	24
98	24	84	0,096	0,336	33,6
99	29	113	0,116	0,452	45,2
100	36	149	0,144	0,596	59,6
101	33	182	0,132	0,728	72,8
102	26	208	0,104	0,832	83,2
103	19	227	0,076	0,908	90,8
104	12	239	0,048	0,956	95,6
105	7	246	0,028	0,984	98,4
107	2	248	0,008	0,992	99,2
110	1	249	0,004	0,996	99,6
114	1	250	0,004	1	100

250

- Los %_a o *percentiles* son muy utilizados en la interpretación de las puntuaciones de los tests. Así, una tabla con la correspondencia entre los posibles valores observados (puntuaciones) en un test y

los correspondientes porcentajes acumulados constituye lo que se conoce como el baremo de un test. Un baremo suele ser elaborado a partir de una muestra representativa de la población a la que pertenezcan los sujetos a los que a posteriori se tiene intención de aplicar ese test.

2. Las puntuaciones típicas

- Señalar en primer lugar que en el contexto de los estadísticos de posición individual es bastante habitual que se utilice el término puntuaciones, o también puntuaciones directas, para hacer referencia a los valores observados de una variable -tal vez motivado porque con frecuencia se hayan obtenido estadísticos de posición individual a partir de los resultados (puntuaciones) de tests, escalas, pruebas de rendimiento académico...
- Una aproximación intuitiva a la interpretación de una puntuación concreta en una variable consiste en obtener la correspondiente puntuación diferencial, esto es, la diferencia entre la puntuación directa y la media de esa variable.

$$x_i = X_i - \bar{X}$$

Interpretación: si es mayor (menor) que 0 es que se trata de una puntuación que está por encima (debajo) de la media, más cuanto más grande sea el valor de esa diferencia en valor absoluto.

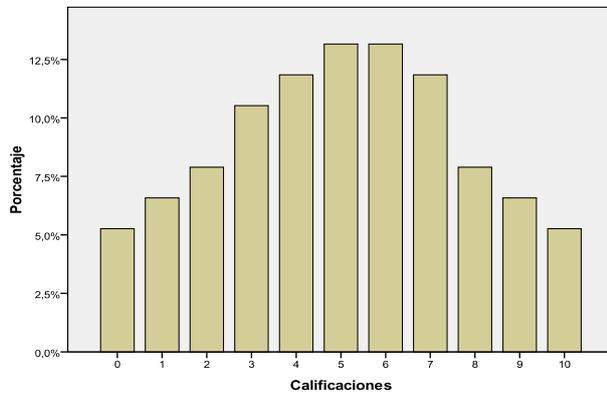
- Un inconveniente se puede plantear cuando se comparen puntuaciones diferenciales procedentes de grupos distintos, pues éstas no tienen en cuenta la posible diferente dispersión de esos grupos.

Ejemplo: Carmen se ha presentado al primer examen de las oposiciones para profesora de enseñanza de secundaria en dos comunidades autónomas diferentes (Andalucía y CV) y ha obtenido una puntuación de 8 en ambos exámenes. Si nos dicen que la media de las puntuaciones en el examen en ambas comunidades ha sido de 5, ¿qué podemos afirmar respecto al rendimiento de Carmen en ambos grupos?

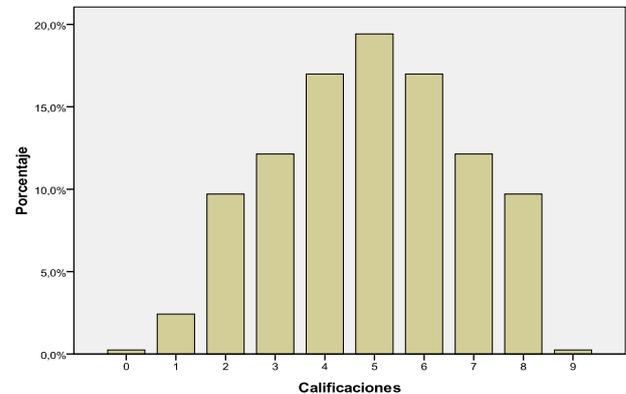
Una respuesta rápida a la anterior pregunta puede dar lugar a una interpretación errónea de los verdaderos resultados de Carmen en ambos exámenes. Así, al observar las distribuciones de

frecuencias de las puntuaciones de los exámenes en ambas comunidades ¿qué podemos decir respecto a dicha interpretación?, ¿en qué comunidad se posiciona mejor Carmen?, ¿dónde obtuvo, por tanto, un mejor resultado?

Andalucía ($\bar{X} = 5$; $S_x = 3$)



CV ($\bar{X} = 5$; $S_x = 2$)



- Una alternativa a este problema lo representan las puntuaciones típicas (estándar o z), una transformación de las puntuaciones directas que tiene en cuenta tanto la tendencia central (media) como la dispersión (desviación típica) de la distribución de frecuencias de la variable. La fórmula para obtenerlas es la siguiente:

$$z_i = \frac{X_i - \bar{X}}{S_x}$$

Ejemplo: ¿cuáles serán las puntuaciones típicas correspondientes a las puntuaciones directas obtenidas por Carmen en ambas comunidades? ($z_{\text{Andalucía}} = ?$; $z_{\text{CV}} = ?$)

$$z_{\text{Andalucía}} = \frac{8-5}{3} = 1 \qquad z_{\text{CV}} = \frac{8-5}{2} = 1,5$$

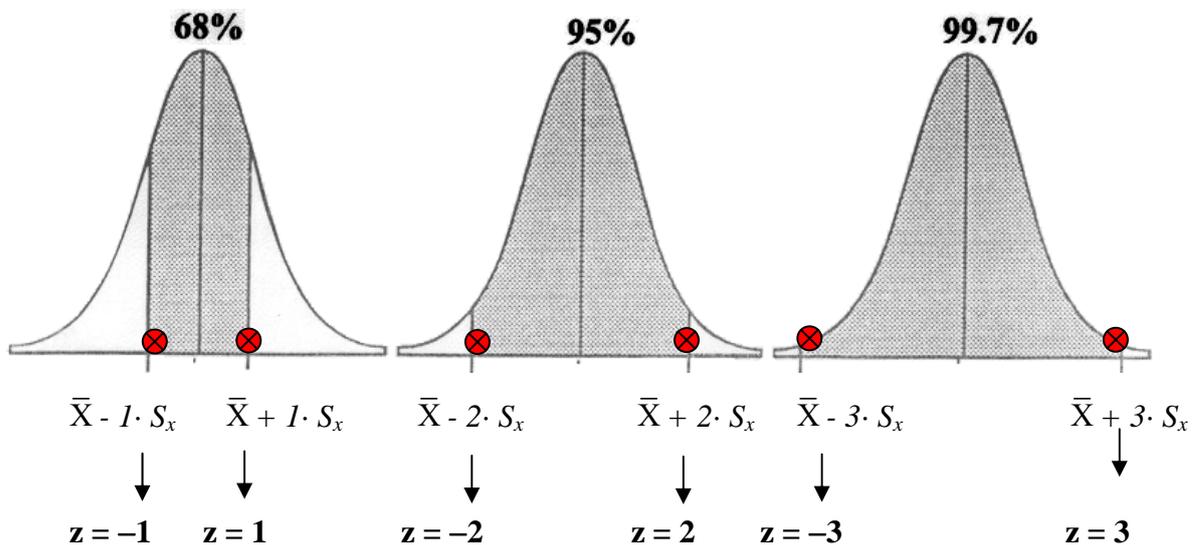
- La puntuación z correspondiente a un determinado valor expresa el número de desviaciones típicas que ese valor dista de la media del conjunto de las observaciones. Así, si Carmen tiene una puntuación típica igual a 1 en Andalucía, ello significa que su puntuación directa está 1 desviación típicas por encima de la media de ese grupo, esto es, su puntuación directa es (aunque ya la sabíamos) igual a $1 \cdot 3 + 5 = 8$. Por su parte, si Carmen tiene una puntuación típica igual a 1,5 en la CV, ello significa que su puntuación directa está 1,5 desviaciones típicas por encima de la media de

dicho grupo, o sea que es igual a $1,5 \cdot 2 + 5 = 8$ (tal como ya en este ejemplo conocíamos). En conclusión, aunque la puntuación directa es la misma en ambas comunidades, Carmen obtiene una mejor puntuación (en términos relativos), es decir, está mejor posicionada en la CV.

Ejercicio 1: ¿Cuál sería la puntuación típica de un opositor que se presentó en la CV y obtuvo una puntuación de 2?; ¿y la de otro opositor con una puntuación de 5? Interpreta estas puntuaciones típicas. ¿Cuál sería la puntuación (directa) de un opositor de Andalucía que tiene una puntuación z igual a 1,5?, ¿y la de otro con una $z = -1$?, ¿y la de un tercero con una $z = 0$?

• Algunas características de las puntuaciones típicas:

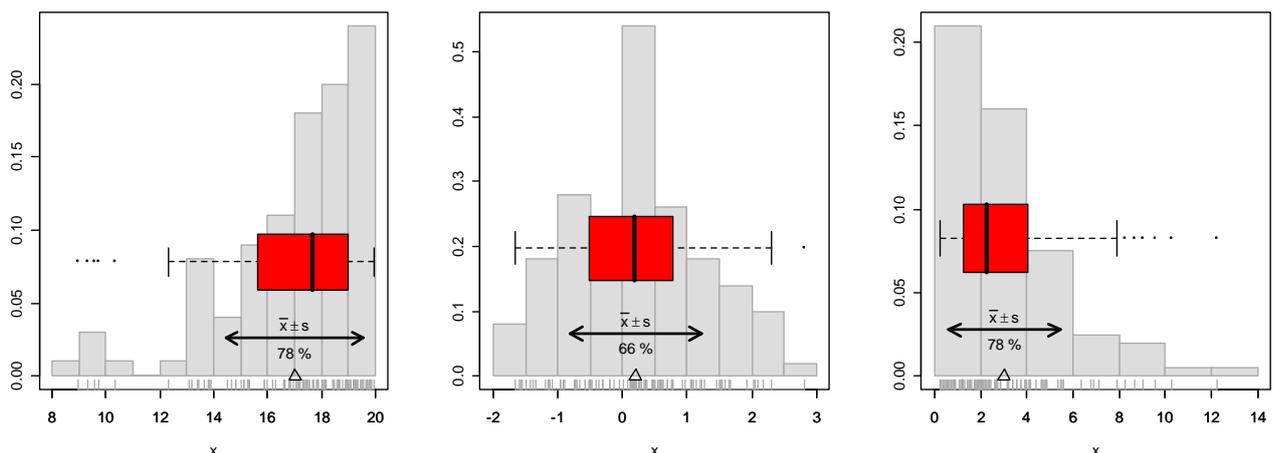
(1) Tal como ya se vio en el tema sobre la dispersión, si una distribución de frecuencias se ajusta a la curva normal, se cumple que entre la media \pm una desviación típica (o sea, entre $z = -1$ y $z = 1$) se encontrará el 68% de los casos. Si se considera la media \pm 2 desviaciones típicas (entre $z = -2$ y $z = 2$), el 95%; y si la media \pm 3 desviaciones típicas (entre $z = -3$ y $z = 3$), el 99,7%. Señalar que estos son 3 casos particulares en que los valores de z son valores enteros, pero que se puede conocer cuál es el % de casos que se encontrarán entre cualesquiera par de valores z (o por encima o por debajo de un determinado valor z) a partir de la consulta de la tabla de la distribución normal tipificada, la cual será presentada en un tema posterior.



A nivel interpretativo, como consecuencia de lo expuesto, puntuaciones típicas tanto mayores que 1, como menores que -1 , pueden considerarse ya como bastante altas y bajas, respectivamente (sólo

un 16% de casos tendrán una puntuación z mayor que 1 y sólo un 16% menor que -1); si mayores/menores que $2/-2$ se trataría de valores muy altos/bajos (sólo un 2,5% de casos tendrán una puntuación z mayor que 2 y sólo un 2,5% menor que -2); y si mayores/menores que $3/-3$ ya merecerían el calificativo de extremos (sólo un 0,15% de casos tendrán una puntuación z mayor que 3 y sólo un 0,15% menor que -3). Esta constituye una característica relevante de las puntuaciones típicas, pues permite ofrecer una interpretación de una puntuación (valor observado) en relación a su grupo de referencia.

Señalar, por último, que en el caso de distribuciones que no se ajusten a la curva normal, los porcentajes son diferentes a los presentados y, además, desconocidos a priori. A título ilustrativo, en el ejemplo siguiente se muestra el % de sujetos entre los valores z -1 y 1 para 3 variables con distribuciones de frecuencias marcadamente diferentes, pudiendo observarse como para el caso de las dos distribuciones más asimétricas ese valor se aleja bastante (al alza) del 68%:



(2) Si transformamos los valores de una variable cualquiera en puntuaciones típicas, esos nuevos valores tendrán siempre una media igual a 0 y una desviación típica igual a 1.

$$\bar{z}_X = 0; \quad S_{z_X}^2 = S_{z_X} = 1$$

Consecuencia de lo anterior, transformar 2 (o más) variables a la escala de las puntuaciones típicas supone hacerlas directamente comparables entre sí, pues se encontrarán en una misma escala con media igual a 0 y desviación típica igual a 1. Ello va a permitir no solo comparar la posición relativa de un sujeto en una variable, sino también comparar las puntuaciones de un mismo sujeto en variables diferentes.

Ejercicio 2: Dada una variable $X: \{3, 6, 5, 2\}$, transformar los valores observados en puntuaciones típicas (tipificar). Calcular después la media y la desviación típica de las puntuaciones típicas obtenidas.

Ejercicio 3: Una psicóloga especializada en psicología clínica infantil observó a un niño de 5 años mientras jugaba con otros niños en una situación estándar de observación. Así, la psicóloga registró que, durante el tiempo de observación, el niño había interactuado verbalmente 6 veces con los otros niños. ¿Cómo se interpretaría ese valor observado teniendo en cuenta que en estudios previos en esa misma situación de observación la media de interacciones verbales de otros niños es 12 y la varianza 9? Asumiendo que esta variable se distribuye normalmente, ¿qué porcentaje de niños es de esperar que obtengan una puntuación igual o inferior a la del niño en cuestión?

Ejercicio 4: Completar la tabla con las puntuaciones directas, diferenciales y típicas para 4 sujetos en una variable X de la que se obtuvo para una muestra de 1250 sujetos en que: $\bar{X} = 18$; $S_X = 4$

Caso	X_i	x_i	z_i
1	20		
2		-3	
3			3
4			-2

Ejercicio 5: Mariona y Lucía, tras terminar sus estudios en 2 grados diferentes, *Psicología* y *Ciencias Empresariales*, reciben ofertas de trabajo con la siguiente remuneración económica neta: Mariona, 11420 €; Lucía, 12320 €. De acuerdo a estudios estadísticos a nivel nacional, los salarios para primer empleo en ambos grados tienen en la actualidad las siguientes características:

<i>Psicología</i> (Mariona)	<i>CC. Empresariales</i> (Lucía)
$\bar{X} = 10217$ €	$\bar{X} = 10818$ €
$S_x = 510$ €	$S_x = 901$ €

A partir de los datos anteriores, ¿cuál de las dos se puede decir que tiene una oferta mejor en relación a los salarios para sus grados en primer empleo?

2.1 Las escalas derivadas

- Una dificultad con las puntuaciones típicas se puede plantear a la hora de comunicar resultados debido a las posiciones decimales y valores negativos inherentes a las mismas. Es por ello que se han propuesto algunas transformaciones lineales de las puntuaciones típicas que pretenden hacerlas más intuitivamente interpretables.
- Todas estas escalas derivadas de la escala de las puntuaciones típicas se basan en una transformación genérica del tipo:

$$D_i = a \cdot z_i + b,$$

Consecuencia inmediata de este tipo de transformación, las nuevas puntuaciones D pasarán de tener una media 0 y una desviación típica 1, a una media b y una desviación típica a .

- Diversas propuestas de escalas derivadas han sido planteadas sin que se haya generalizado el uso concreto de ninguna de ellas. Entre las que han tenido más repercusión, las siguientes:

- La escala T \rightarrow $T_i = 10 \cdot z_i + 50$ ($\bar{T} = 50$ $s_T = 10$)

- La escala S o de estatinos \rightarrow $S_i = 2 \cdot z_i + 5$ ($\bar{S} = 5$ $s_S = 2$)

- La escala CI \rightarrow $CI_i = 15 \cdot z_i + 100$ ($\bar{CI} = 100$ $s_{CI} = 15$)

Ejercicio 6: Transformar los datos de la variable X : $\{3, 6, 5, 2\}$, de los que ya se obtuvo las puntuaciones típicas en un ejercicio anterior, a las 3 escalas introducidas.