MASTER DE INGENIERÍA BIOMÉDICA.

Métodos de ayuda al diagnóstico clínico.

Tema 7: Lógica Borrosa

Emilio Soria, Antonio José Serrano y José David Martín Dpto Ingeniería Electrónica, ETSE

Objetivos del tema.

Conocer cómo se define un conjunto borroso y su importancia de cara a desarrollar sistemas que imiten la forma de razonar humana

Aprender las reglas de combinación de conjuntos borrosos.

Entender qué es una variable lingüística y su posible uso en elementos de ayuda al diagnóstico médico.

Aprender los elementos que contiene un sistema de inferencia borroso.

Aprender a implementar este tipo de sistemas.

Cambiamos algunos conceptos.

Los conceptos manejados por los sistemas de procesado de la información (dispositivos lógicos, ordenadores, etc) son diferentes a los usados por los humanos; en el primer caso se manejan conceptos absolutos mientras que nosotros usamos conceptos vagos y difusos.

La base de todos nuestros dispositivos de procesado de la información es la lógica clásica que se puede explicar usando teoría de conjuntos. En esta teoría existe un concepto clave que es el de pertenencia a un conjunto que queda definido de la siguiente forma.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \notin A \\ 1, & \text{if } x \in A \end{cases}$$

En este punto tenemos que empezar a hacer una primera división entre los sistemas borrosos y los “clásicos”. En nuestra vida cotidiana existen conceptos que no son absolutos (”alto”, “viejo”, “calvo”, “rápido”....) por lo que no se plantea una pertenencia tan ***dura***; ahora se plantea una pertenencia de diferentes grados; no sólo se tiene 0/1.

$$\mu_A : X \rightarrow [0,1]$$

Destacar que el criterio clásico de pertenencia es un caso particular del difuso. Ahora los elementos del conjunto quedarán representados (aparte de su valor) por un valor de pertenencia al conjunto FUNCIÓN DE PERTENENCIA.

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$$

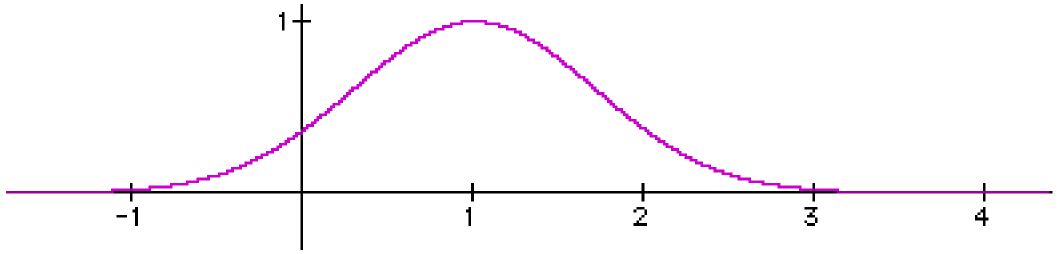
$$\boxed{A = \int_X \mu_A(x) / x}$$

$$\boxed{A = \mu_A(x_1)/x_1 + \ldots + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i}$$

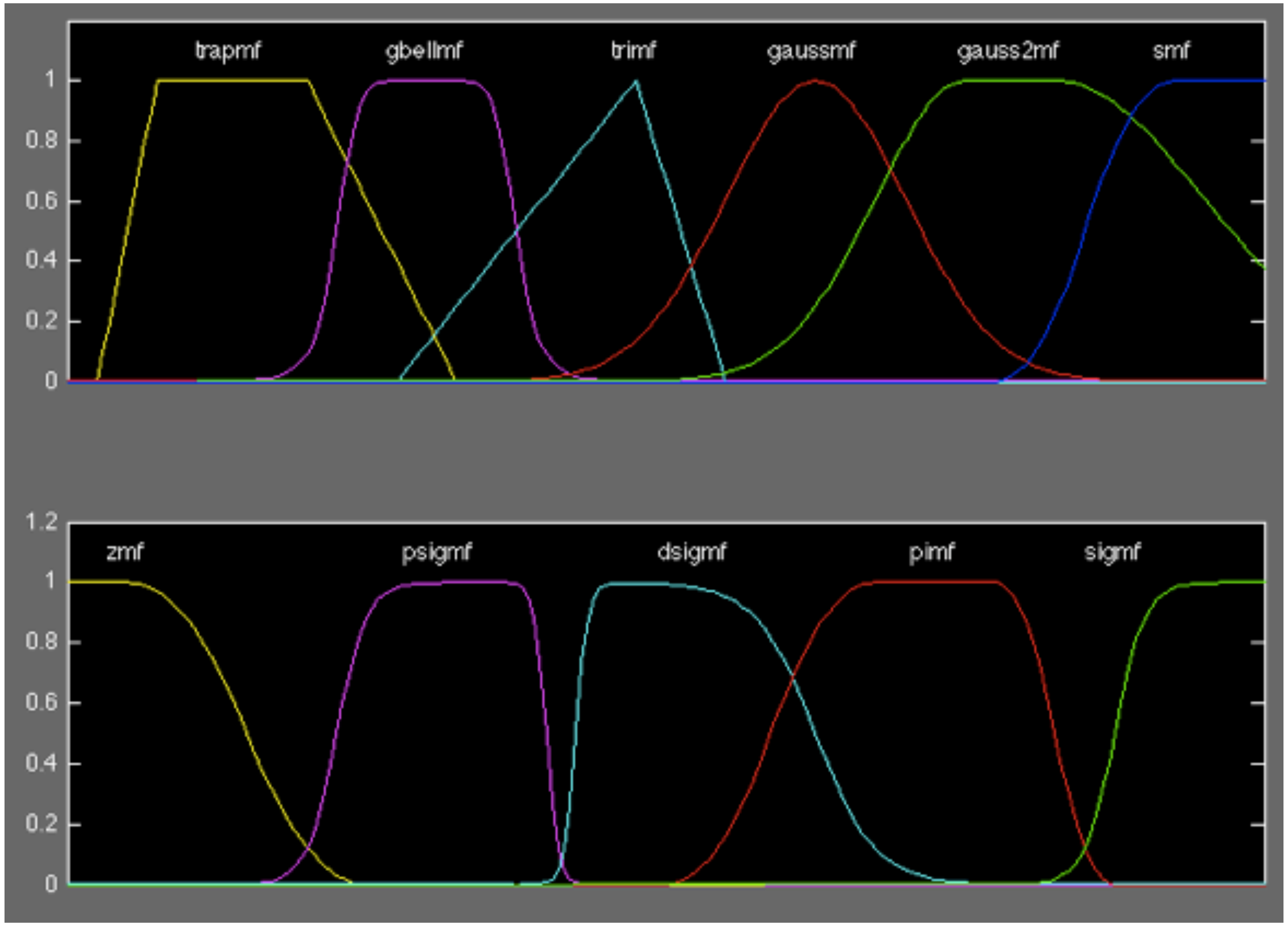
Emilio Soria, Antonio José Serrano y José David Martín Dpto Ingeniería Electrónica, ETSE

Funciones de pertenencia

A modo de ejemplo de lo comentado podemos pensar en el conjunto de los números reales cercanos a 1. Una posible ***función de pertenencia*** podría ser:



Funciones de pertenencia existen muchas, las funciones continuas más usadas son las que aparecen a continuación



La función de pertenencia más extendida en ingeniería es la triangular por la sencillez en su implementación.

No tiene por qué ser continua la función que defina nuestro conjunto, perfectamente puede tener varias partes (mezclar lógica borrosa-lógica clásica; abarcar diferentes zonas de valores, etc).

Son el elemento clave en las aplicaciones prácticas de la lógica borrosa ya que suponen el paso de conceptos vagos a cantidades. Las conocidas como variables lingüísticas utilizan estas funciones para obtener un valor cuantitativo a partir de los conceptos cualitativos de dichas variables.

Operaciones entre conjuntos borrosos

$$A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in X$$
$$A \subset B \Leftrightarrow \mu_A(x) \le \mu_B(x) \quad \forall x \in X$$
$$\forall x \in X : \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$$
$$\forall x \in X : \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$$
$$\forall x \in X : \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

La operación de unión e intersección se puede definir con otro tipo de operadores; t-normas para el caso de la intersección y t-conormas (o s-normas) para el caso de la unión; cumpliendo las siguientes propiedades.

t-normas

(i) $T(x,y) = T(y,x)$

(ii) $T(T(x,y),z) = T(x,T(y,z))$

(iii) $x \le z$ and $y \le v$ implies $T(x,y) \le T(z,v)$

(iv) $T(x,1) = x$

s-normas

(i)-(iii) Same as in the definition of t-norms

(iv) $S(x,0) = x$

Propiedades

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

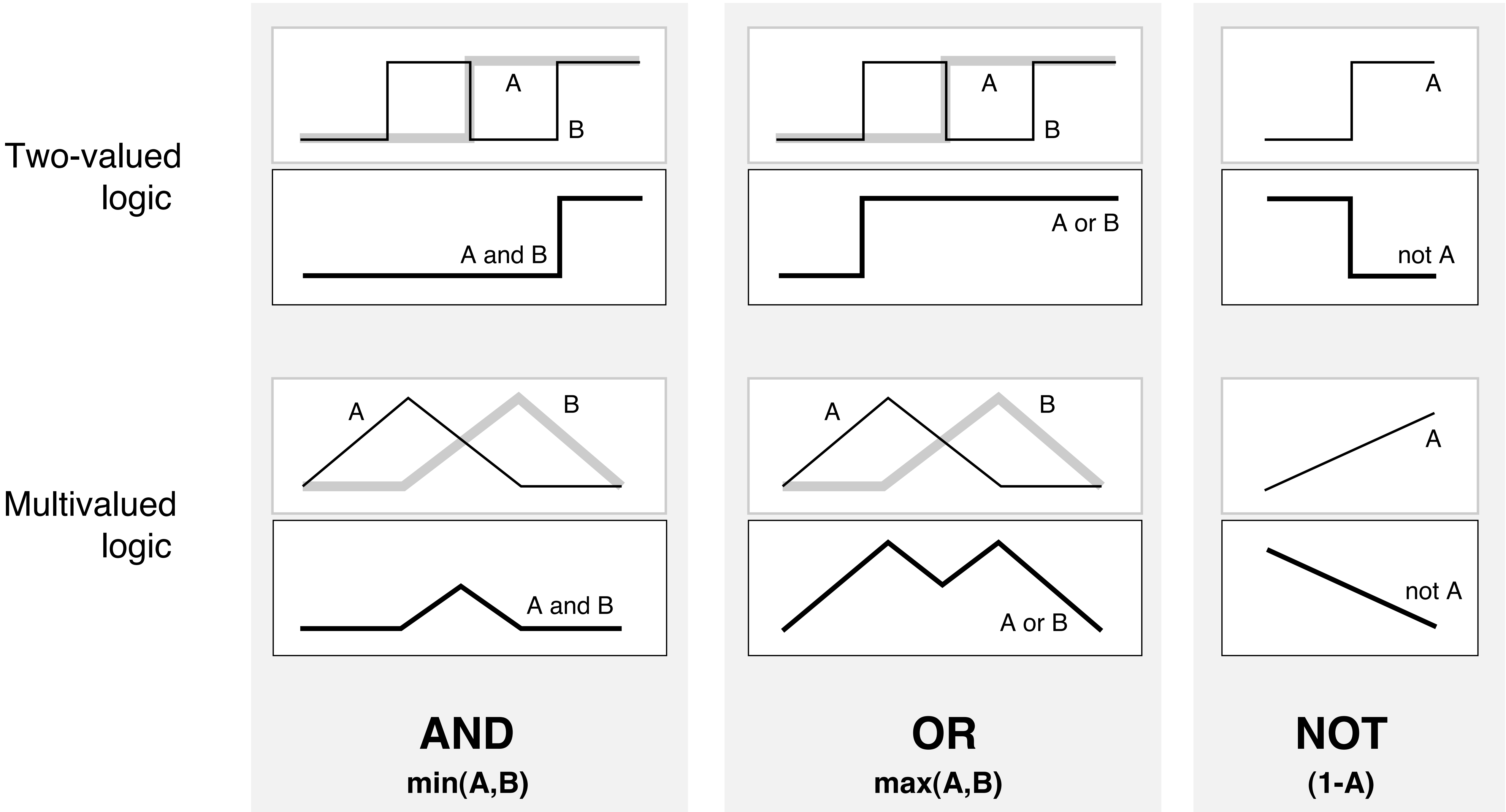
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$

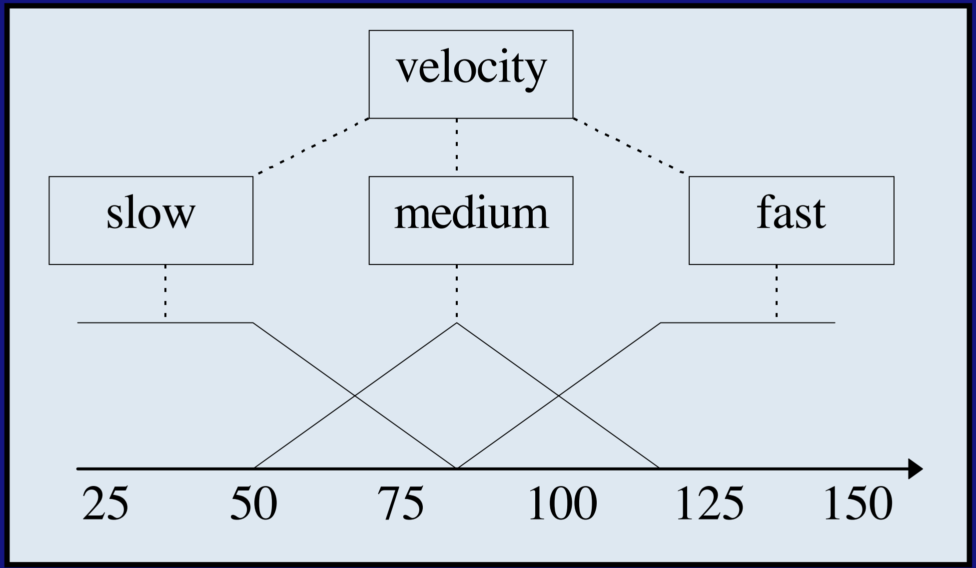
$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Ejemplos de operaciones entre conjuntos borrosos.



Variables lingüísticas

Una variable lingüística es una variable especificada con conjuntos borrosos teniendo un claro significado lingüístico. Está formada por una serie de elementos, su nombre *“simbólico”* (temperatura, altura, etc); una serie de valores *lingüísticos (alto, medio, etc);* como tercer elemento se tendría el rango de variación cuantitativo de la variable. Finalmente hay que asignarle a cada valor cualitativo un valor cuantitativo usando funciones de pertenencia.



Destacar que existen operaciones para integrar conceptos “comunes” como *más o menos; mucho, muy, etc*.

Mucho-Muy, etc (*concentration*)

$$\mu_{con(A)}(x) = \left(\mu_A(x)\right)^2$$

Más o menos (*dilation*)

$$\mu_{dil(A)}(x) = \left(\mu_A(x)\right)^{1/2}$$

Normalmente el diseñador utiliza su conocimiento del problema para determinar los límites de las diferentes funciones de pertenencia. Existen otras alternativas como son los sistemas neuro-borrosos que, a partir del propio funcionamiento del sistema determinan los valores y límites de las funciones de pertenencia

Reglas borrosas

Ya tenemos los conceptos "cotidianos" codificados como conjuntos borrosos, ya sabemos operar con dichos conjuntos con diferentes operadores lógicos, ¿qué falta?; especificar nuestro problema en forma de reglas lógicas que, al usar sistemas borrosos serán reglas borrosas. Las reglas combinarán diferentes conceptos especificados en las diferentes variables lingüísticas de nuestro problema.

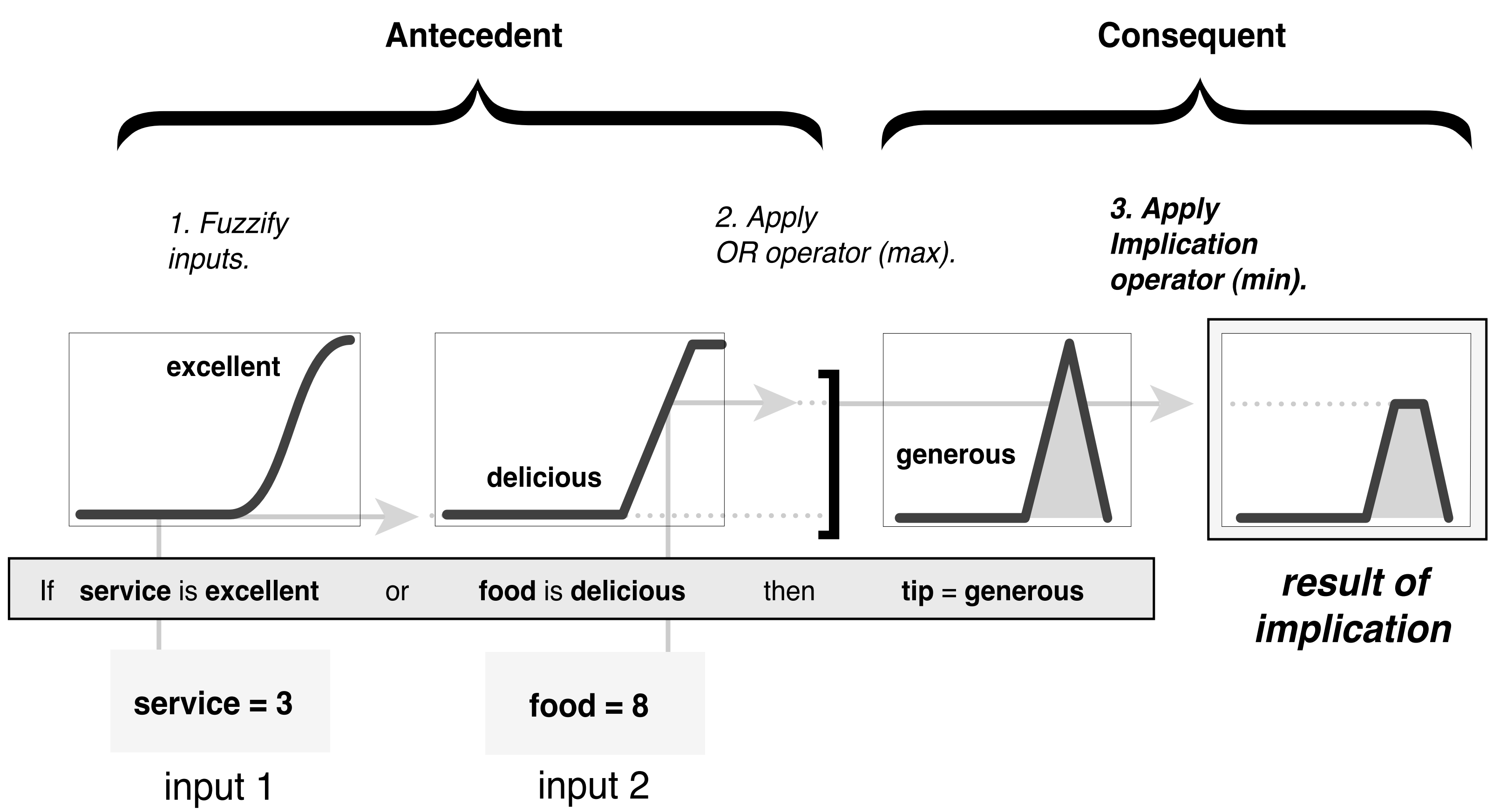
Ejemplo; reglas para la fuerza de frenada en un coche (variables son la velocidad y la distancia al obstáculo).

Si la distancia es pequeña y la velocidad alta la fuerza es grande.
Si la distancia es grande y la velocidad baja la fuerza es baja.
Si la distancia es grande y la velocidad alta la fuerza es media.
Si la distancia es pequeña y la velocidad baja la fuerza es media.

Sistema de inferencia borroso (I)

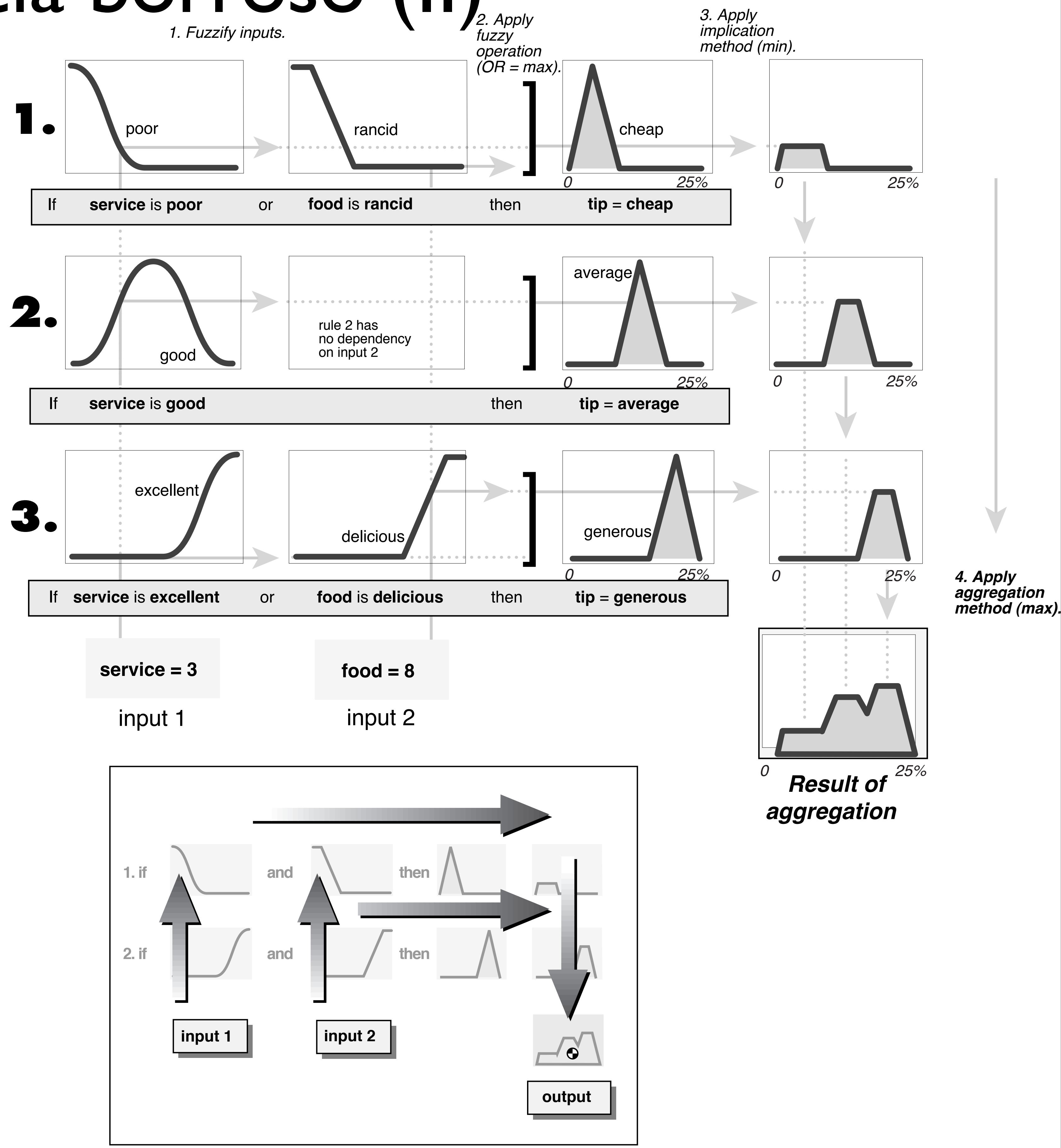
Tenemos un conjunto de reglas pero, ¿cómo se combinan entre sí?; ¿cómo se determina la salida de un sistema a partir de dichas reglas?. Aparece lo que se conoce en sistemas borrosos como el sistema de inferencia que consiste, en combinar las diferentes reglas para obtener una salida que, en principio, será borrosa también.

Con una sola regla es sencillo; en el antecedente se aplica el operador correspondiente t-norma o s-norma (según como estén combinadas las premisas) y para determinar la consecuencia se aplica el operador t-norma.



Sistema de inferencia borroso (II)

¿Qué ocurre cuando se tienen diferentes reglas o cuando se "activan" diferentes reglas a partir de una determinada situación?. En este caso hay que combinar las salidas de las diferentes reglas usando una s-norma (ya que se dan todas sería el equivalente clásico al or). Normalmente la s-norma utilizada es la función maximo aunque esta elección no es obligatoria.



Deborrosificador

Hemos logrado razonar con conceptos cotidianos expresados de forma vaga obteniendo una salida......¡también vaga!. Nuestros sistemas electrónicos necesitan un valor numérico concreto para funcionar.... la tarea de trasladar nuestra salida del sistema de inferencia borroso a un valor numérico se lleva a cabo por el sistema conocido como ***deborrosificador***. Existen muchos procedimientos, los más extendidos son los siguientes:

COG (Centro de Gravedad). Es el más extendido porque proporciona una respuesta continua y "suave". La expresión de este operador es:

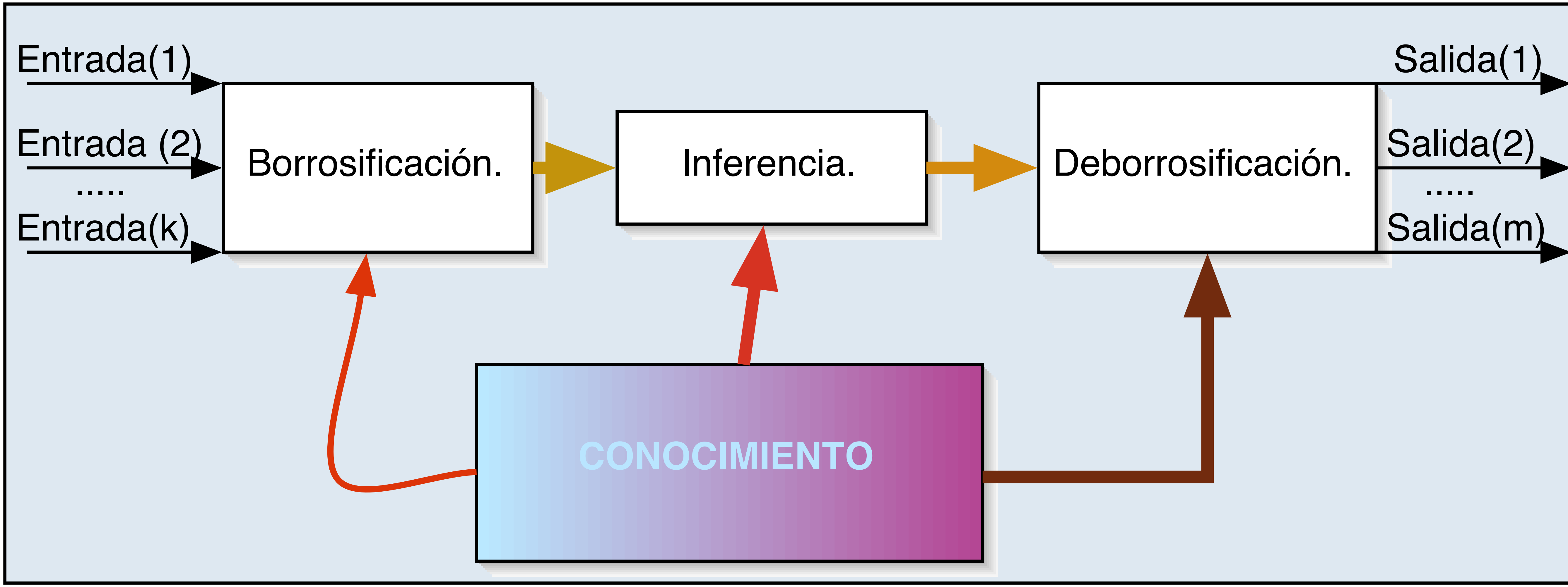
$$salida = \frac{\int_C y \cdot \mu(y) \cdot dy}{\int_C \mu(y) \cdot dy}$$

Máxima Pertenencia. En este caso se plantea utilizar el valor de la variable con mayor función de pertenencia. Si existen varios valores con dicha función de pertenencia se considera el promedio de dichos valores.

El problema de este operador radica en que los "mapeos" entrada-salida no son continuos.

Sistema experto borroso

Si juntamos todas las piezas anteriormente comentadas ya tenemos un sistema experto borroso. Este sistema tendría las siguientes partes.

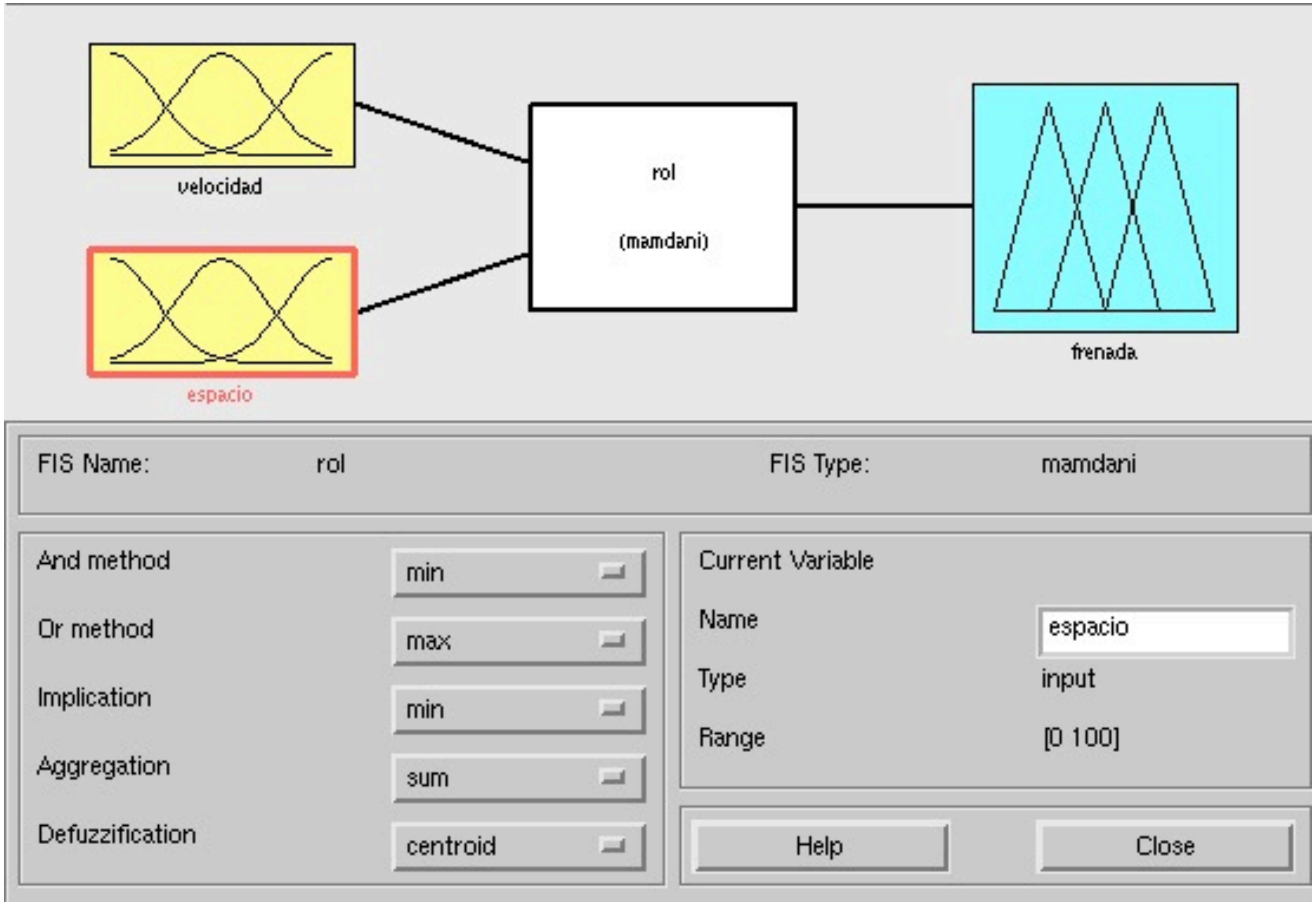


Importante: el conocimiento de los expertos se traduce en las funciones de pertenencia de las variables lingüísticas, las reglas del sistema de inferencia y en la elección de los procedimientos de "deborrosificacion".

Ejemplo: control de frenada de un coche (I)

A la hora de definir el sistema borroso es necesario fijar una serie de elementos que son: **Las variables del problema; funciones de pertenencia borrosas. Las t-normas y s-normas a usar. Las diferentes reglas de nuestro sistema. El operador deborrosificador.**

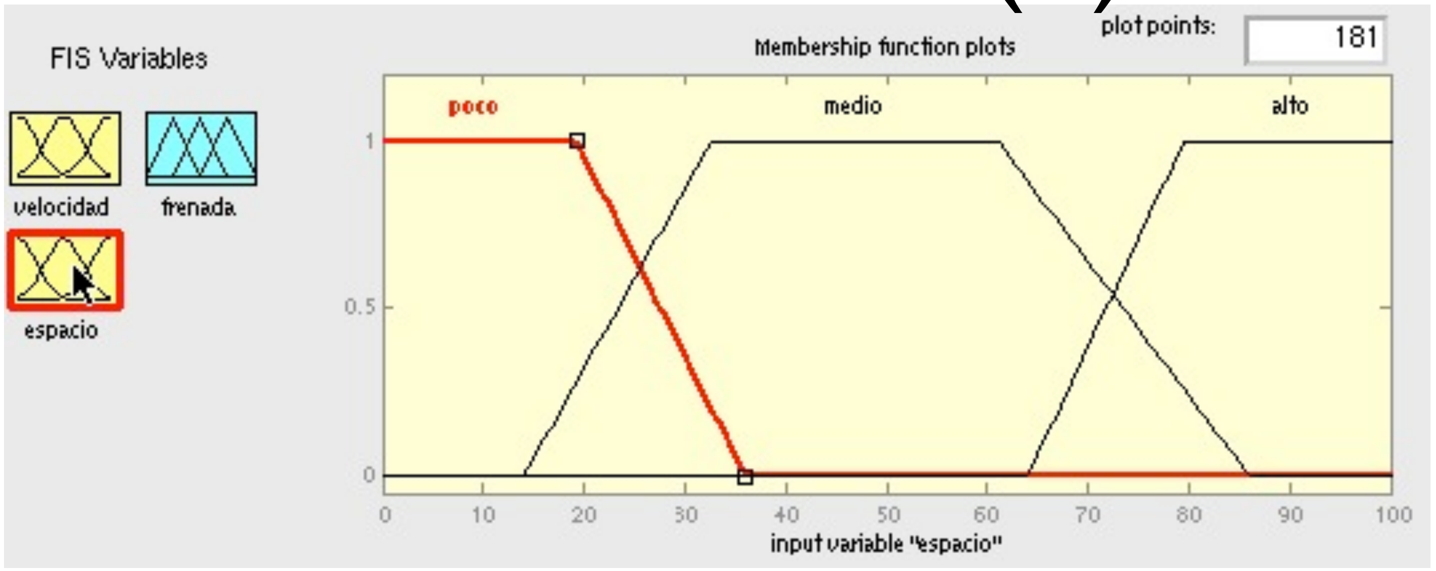
Este interfaz gráfico es de la librería de Matlab Fuzzy Logic. Se le llama con la instrucción fuzzy (¡lógico!)

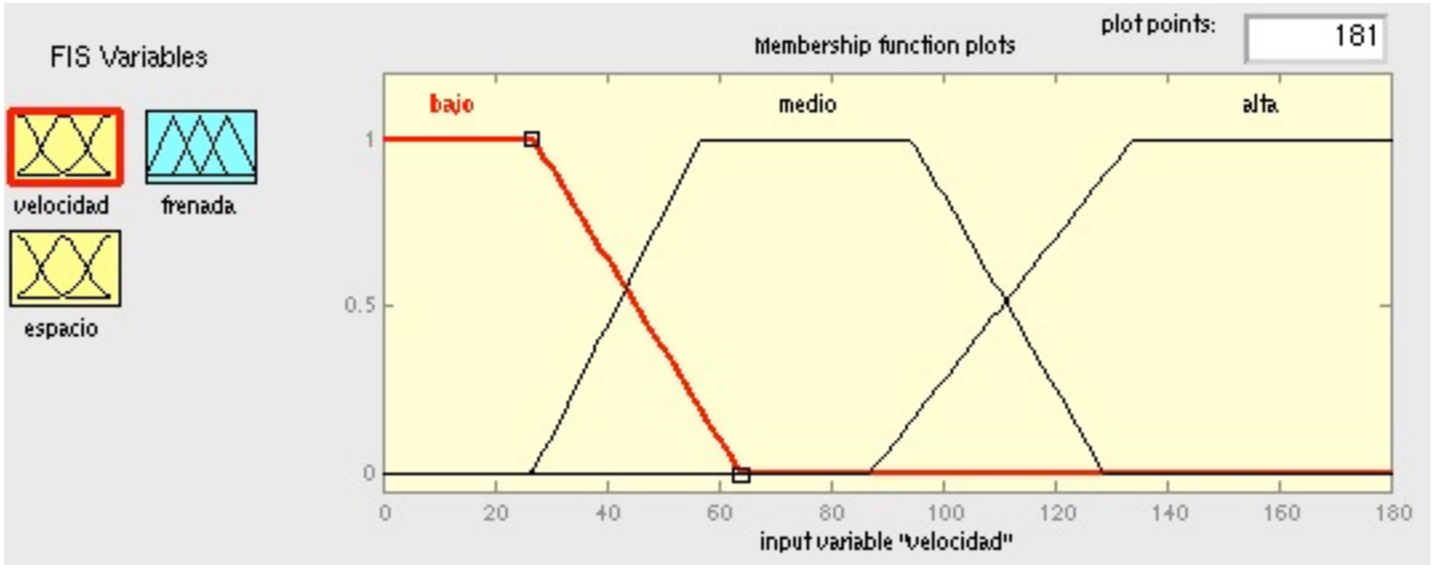


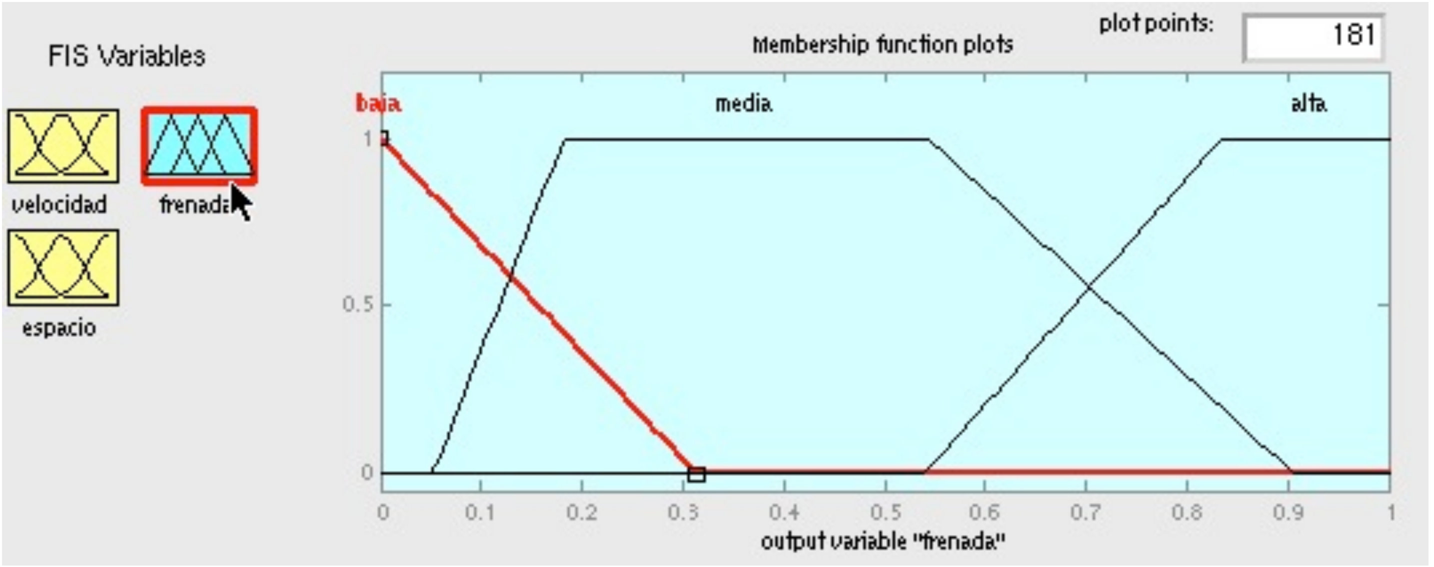
Ejemplo: control de frenada de un coche (II)

Cuando se tienen escogidas las variables de entrada el siguiente paso es definir las diferentes funciones de pertenencia de las variables lingüísticas. Aquí entra el conocimiento del experto del problema. como regla a seguir los manuales de sistemas borrosos aconsejan funciones de pertenencia triangulares con un solape entre conceptos del 50%.

En los sistemas neuro-borrosos estas funciones de pertenencia se pueden obtener por el sistema de forma "automática" usando redes neuronales. Aquí los datos del problema definen la solución a seguir.

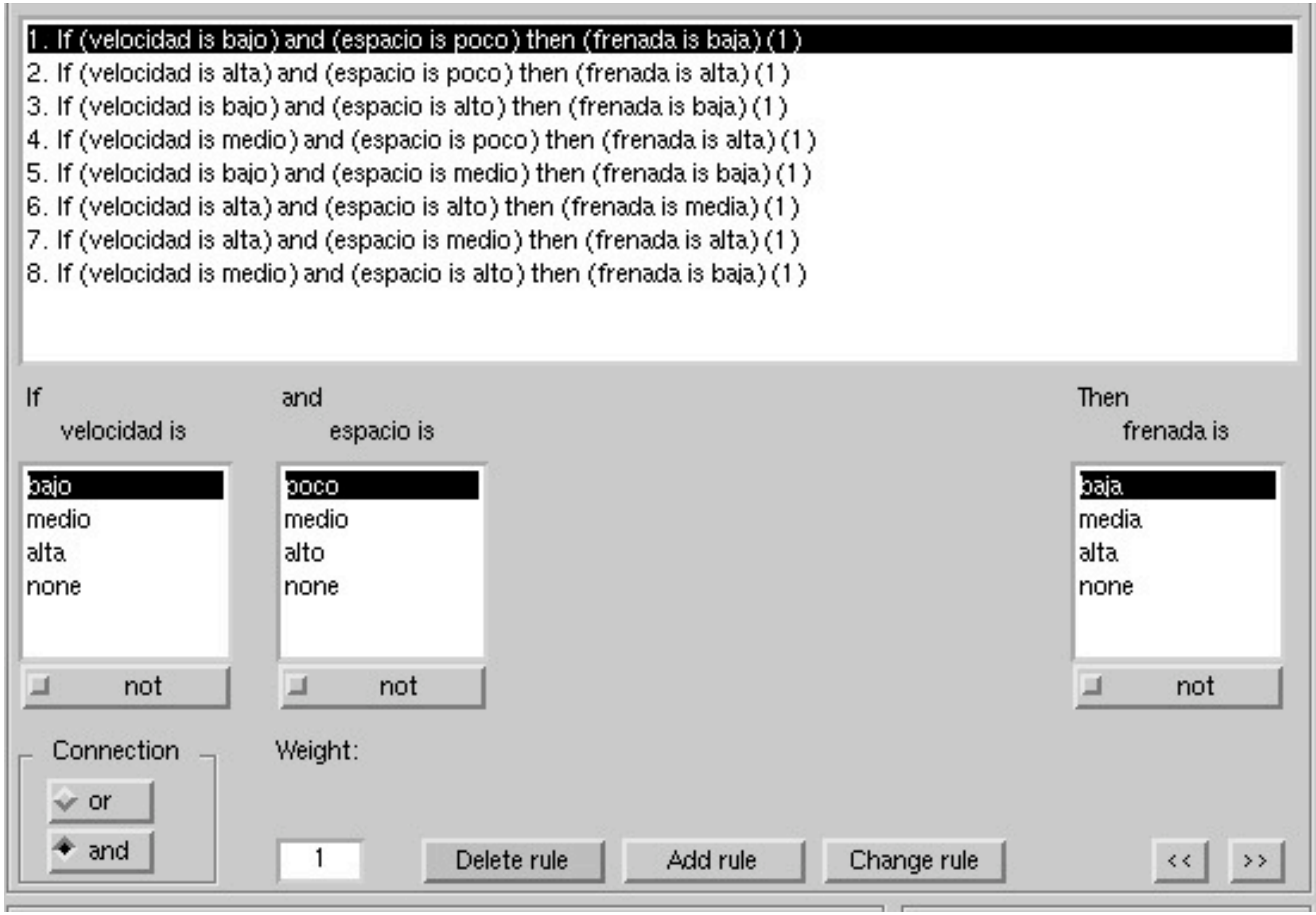






Ejemplo: control de frenada de un coche (III)

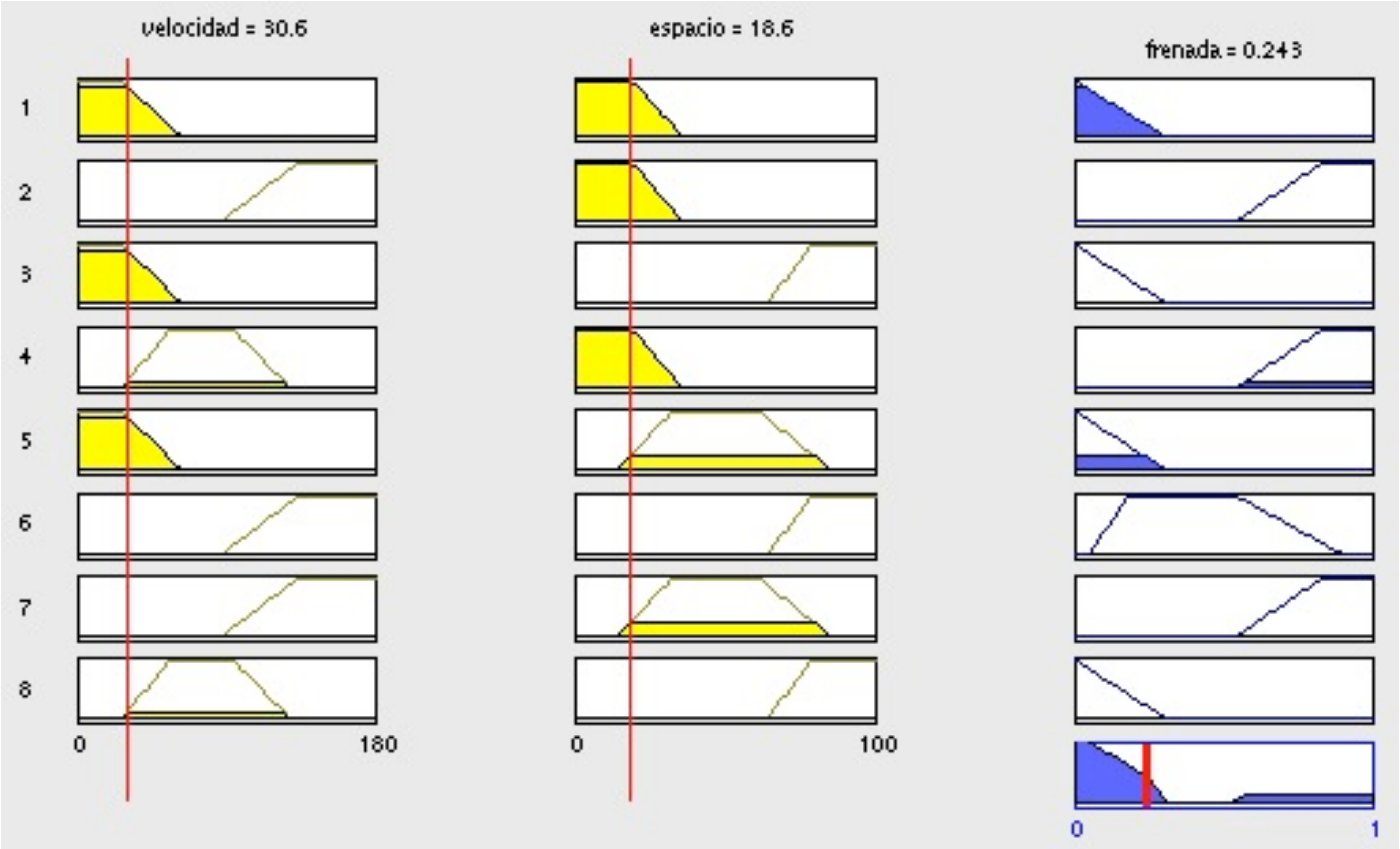
Las reglas es el punto débil de los sistemas borrosos; las diferentes funciones de pertenencia de las variables lingüísticas se pueden obtener con sistemas neuronales pero las reglas son definidas por el experto. Otro punto a tener en cuenta es el crecimiento exponencial del número de reglas en relación al número de variables de entrada y de funciones de pertenencia.



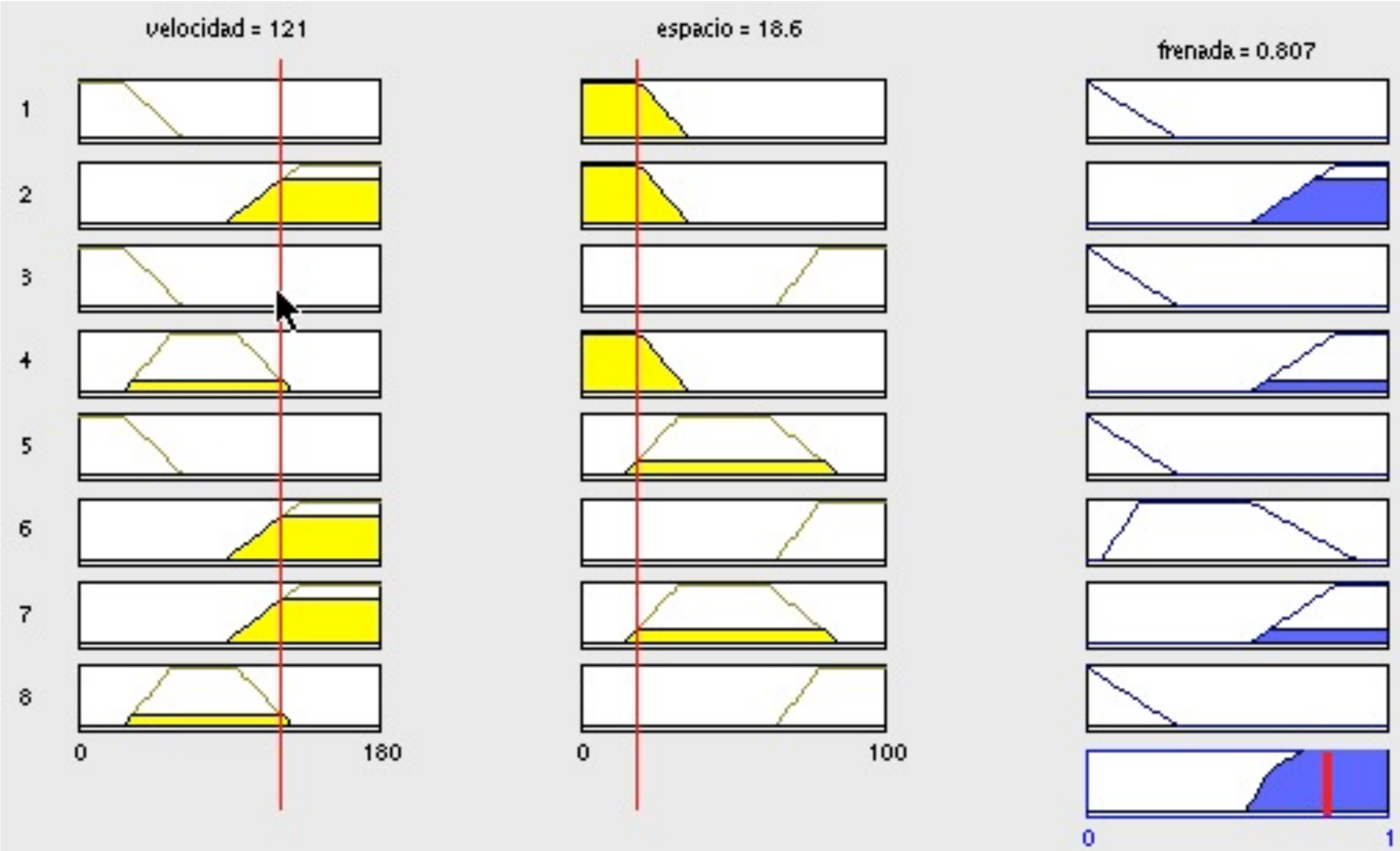
Deben abarcar el mayor número de casos ya que, en definitiva, lo que se persigue es una modelización no lineal de un problema. Si se cubren pocos casos esta modelización no será correcta.

Ejemplo: control de frenada de un coche (IV)

Un valor de las diferentes variables de entrada puede "disparar" diferentes reglas de tal forma que el resultado final es una combinación de las reglas disparadas.



Ejemplo: control de frenada de un coche (V)



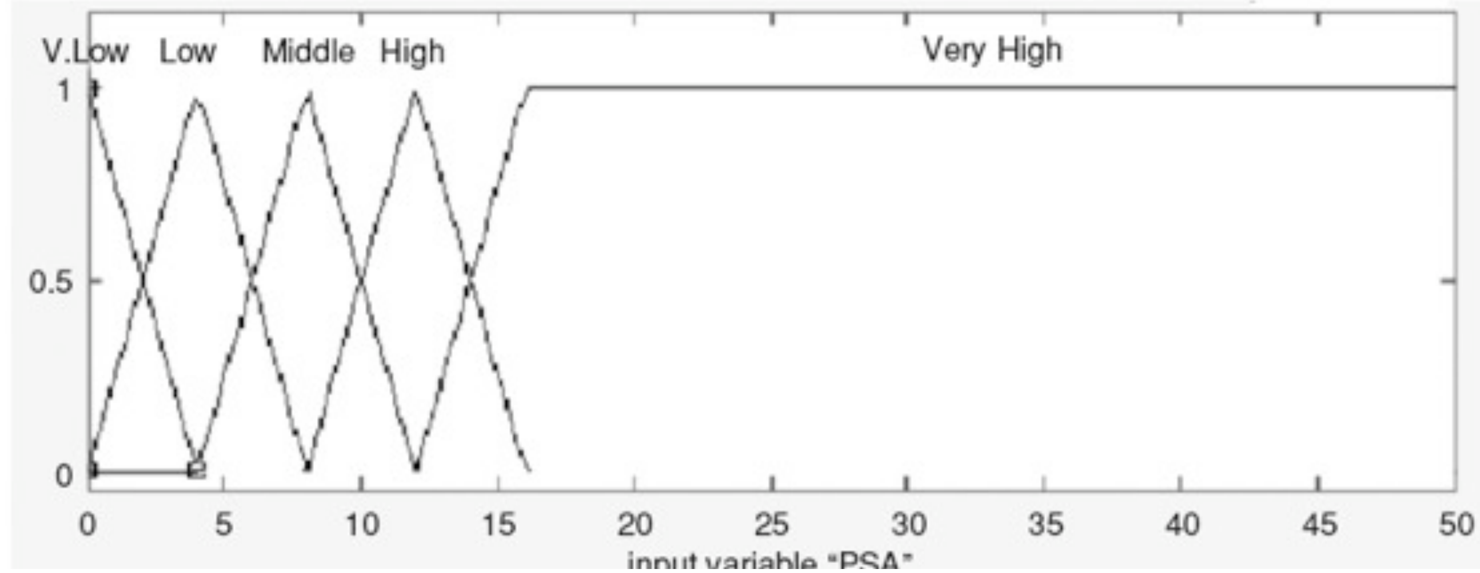
Ejemplo en Ingeniería Biomédica (I)

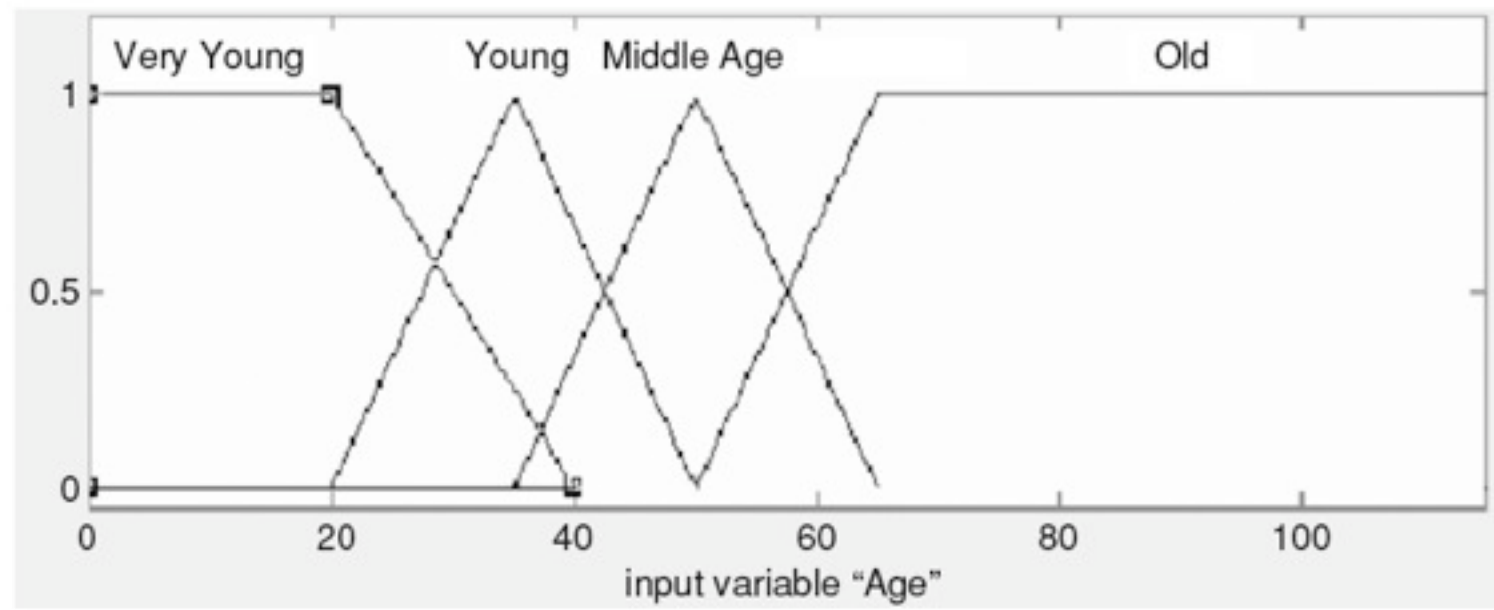
Sistema borroso de ayuda a la decisión para el diagnóstico de cáncer de próstata.

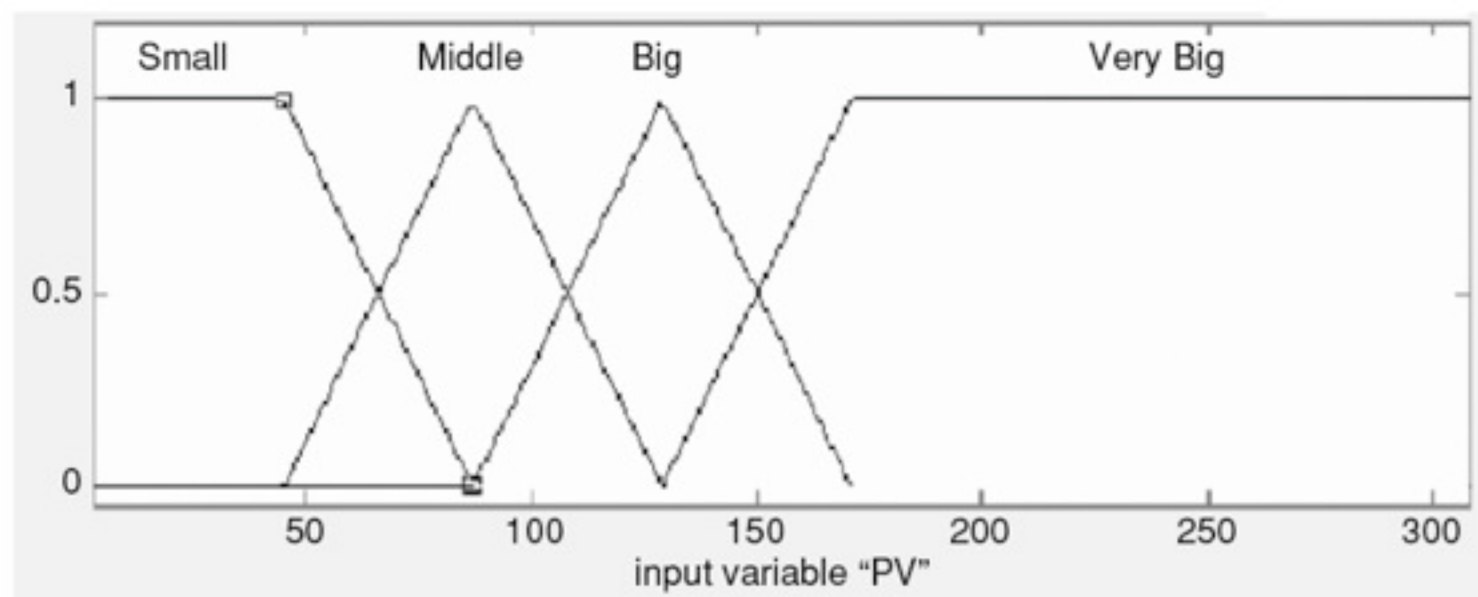
Seker H, Odetayo M, Petrovic D, Naguib RNG (2003) A fuzzy logic based method for prognostic decision making in breast and prostate cancers. IEEE Trans Inform Technol Biomed (in press)

Las entradas al sistema borroso son el antígeno específico (PSA) el volumen de la próstata (PV) y la edad del paciente.

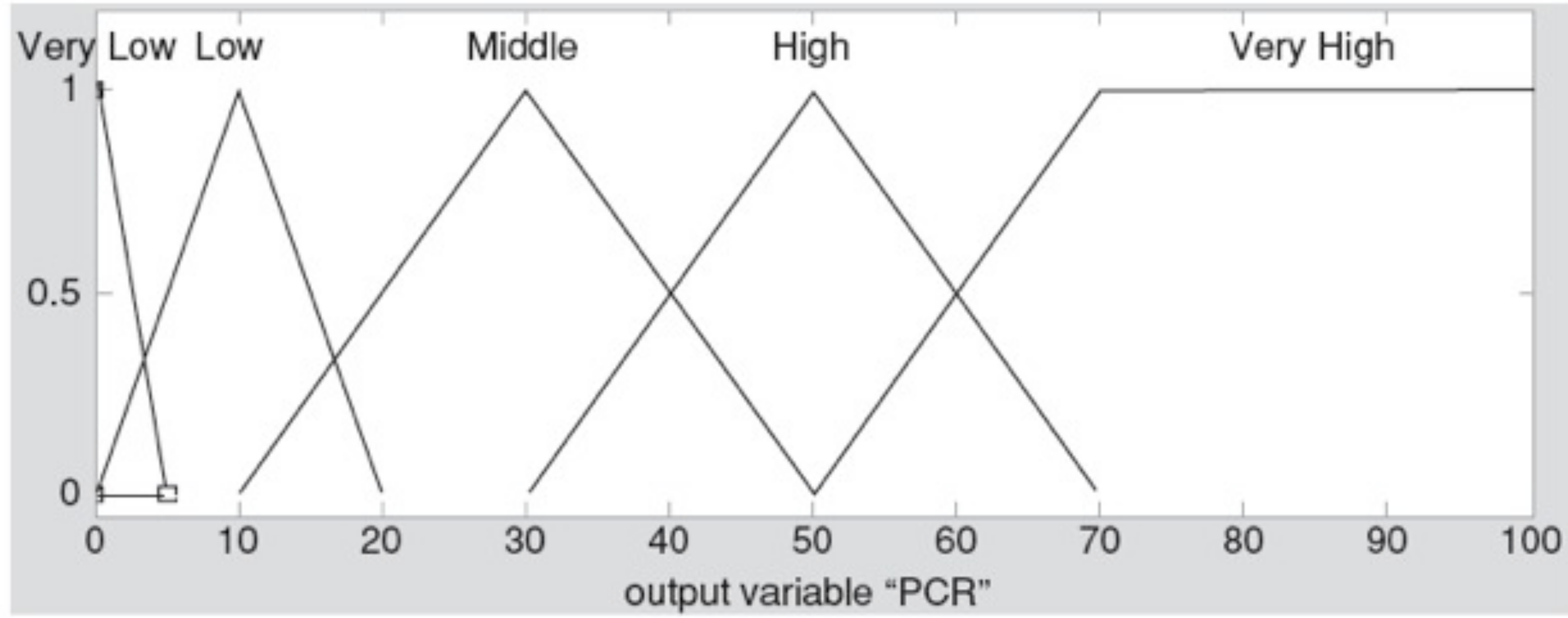
Como referencia se considera el conocimiento del médico para obtener las reglas.



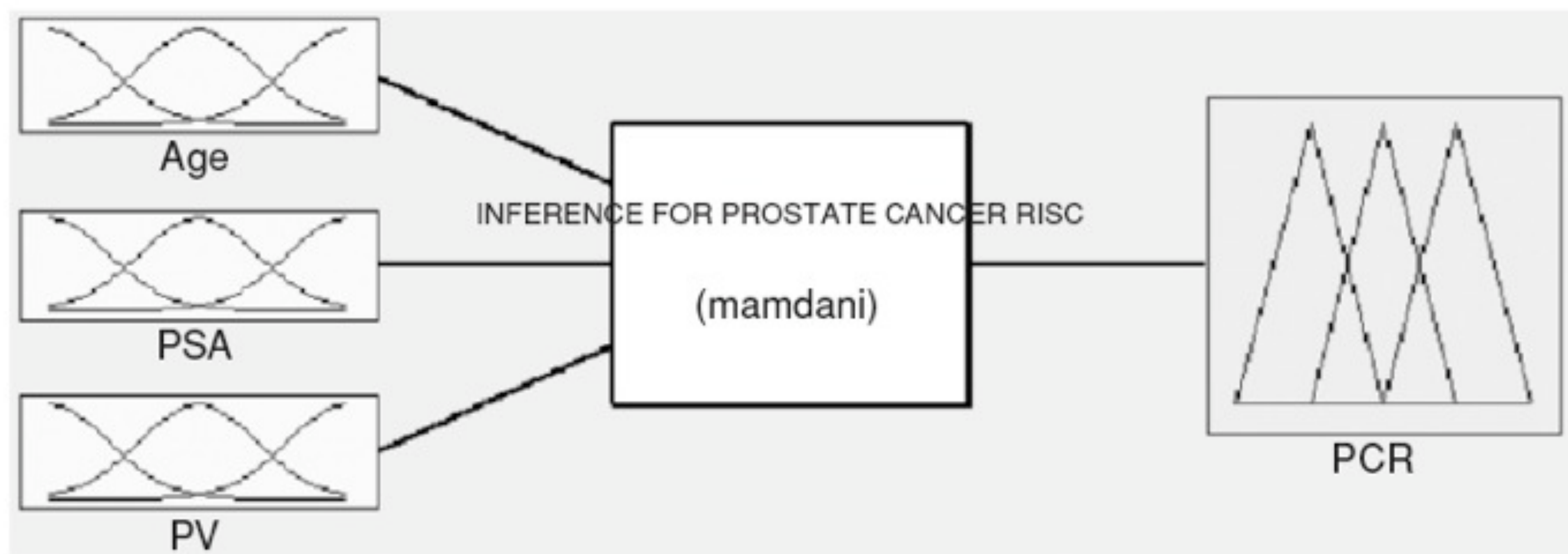




Ejemplo en Ingeniería Biomédica (II)



Hay que destacar que las variables lingüísticas se pueden obtener también por métodos neuronales

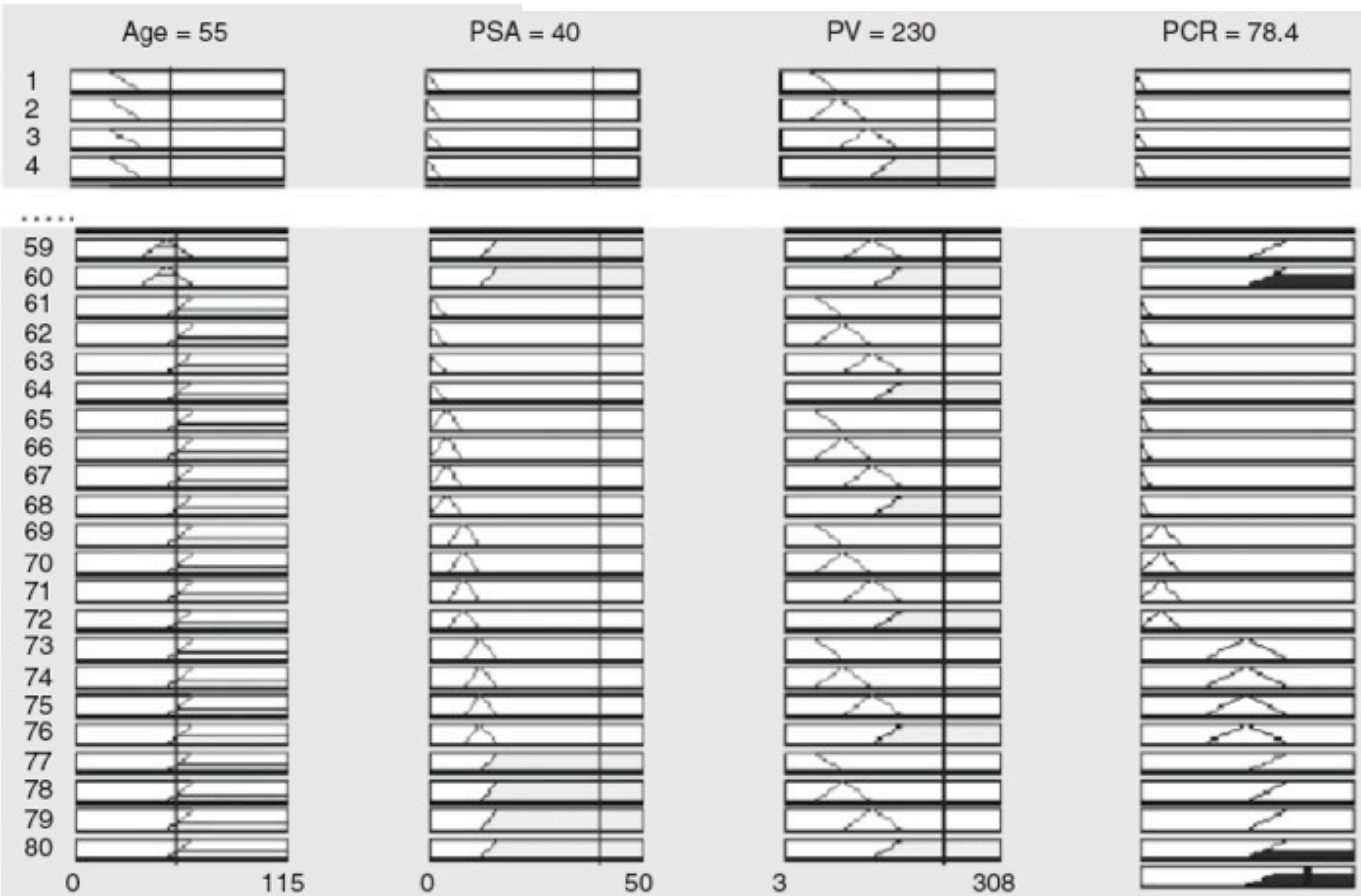


Para la inferencia se utiliza un sistema de Mandani del tipo max-min.

Ejemplo en Ingeniería Biomédica (III)

Se tienen un total de 80 reglas.

Rule No	PSA	Age	PV	PCR
Rule 1	VL	Very young	VS	VL
...				
Rule 43	VL	MA	H	VL
...				
Rule 77	VH	Old	VS	H
...				

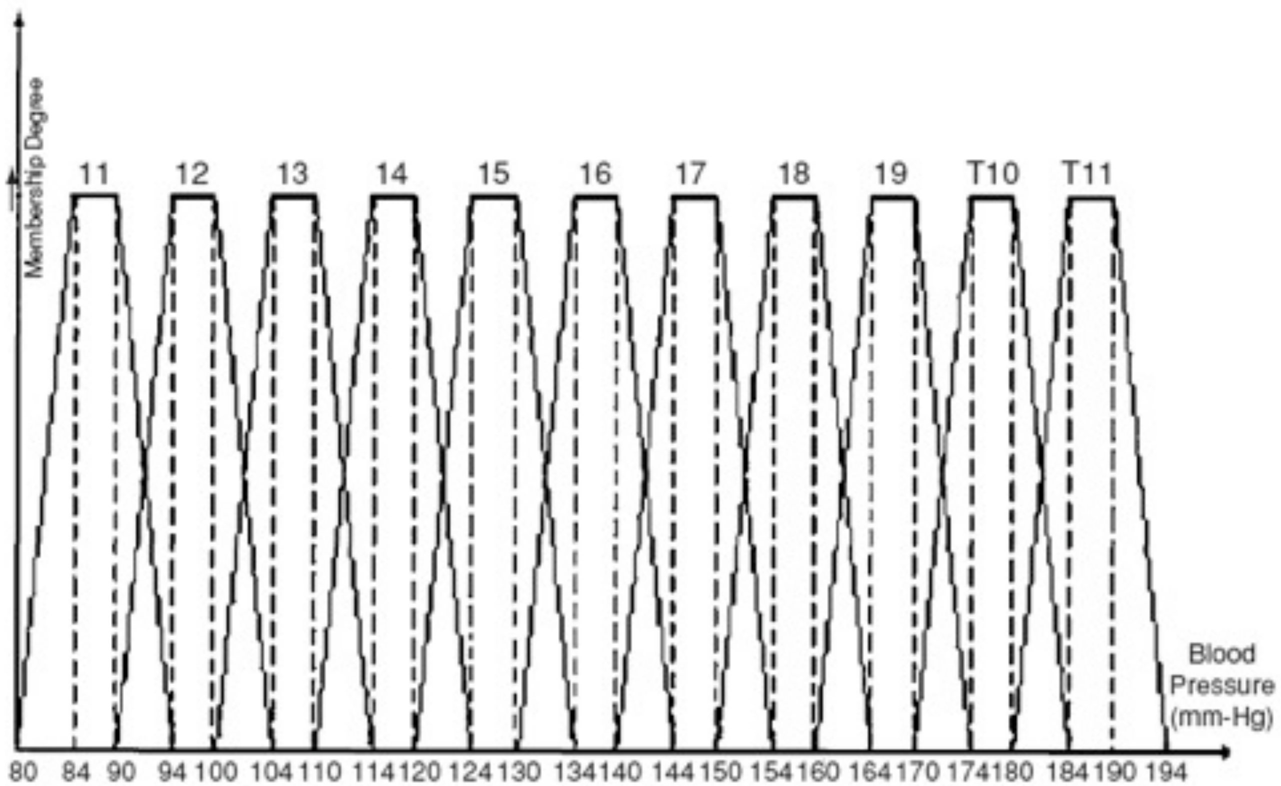


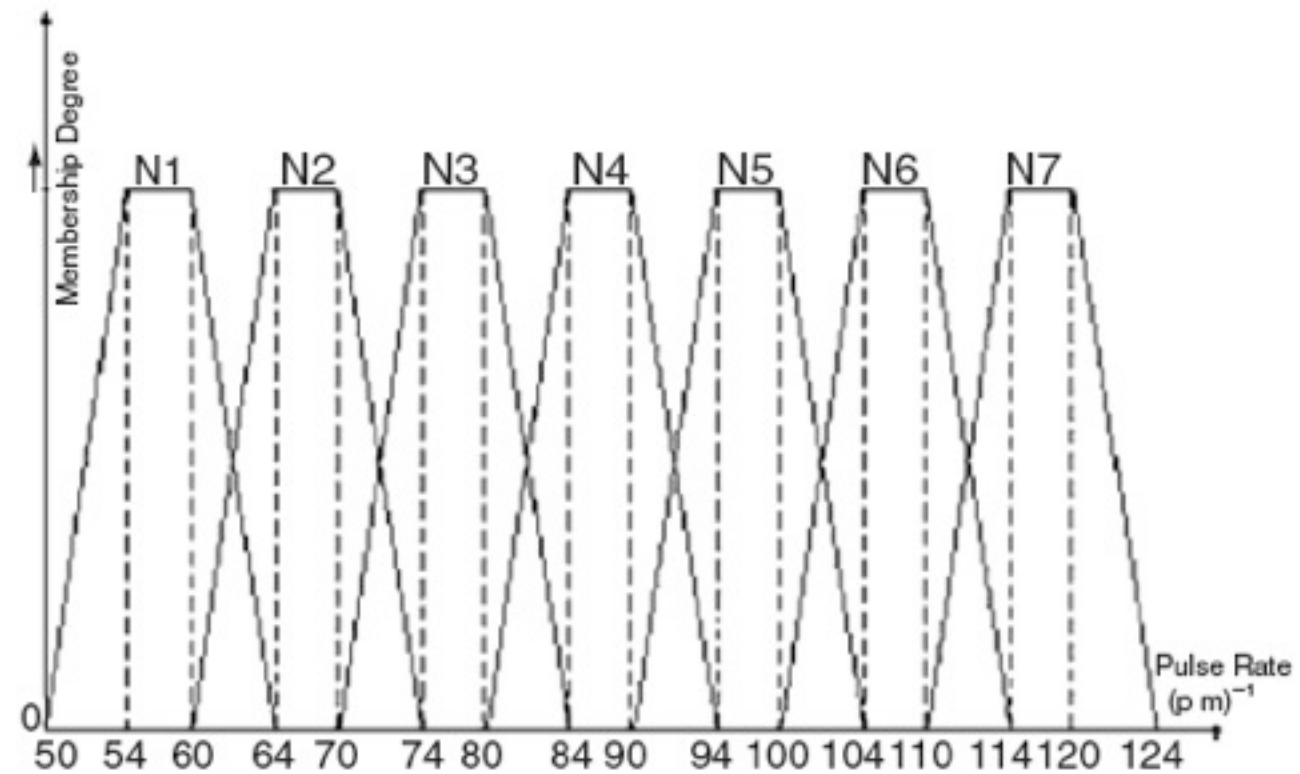
Sistema de control de anestesia (I).

Introduction to Fuzzy Logic Using Matlab, Springer

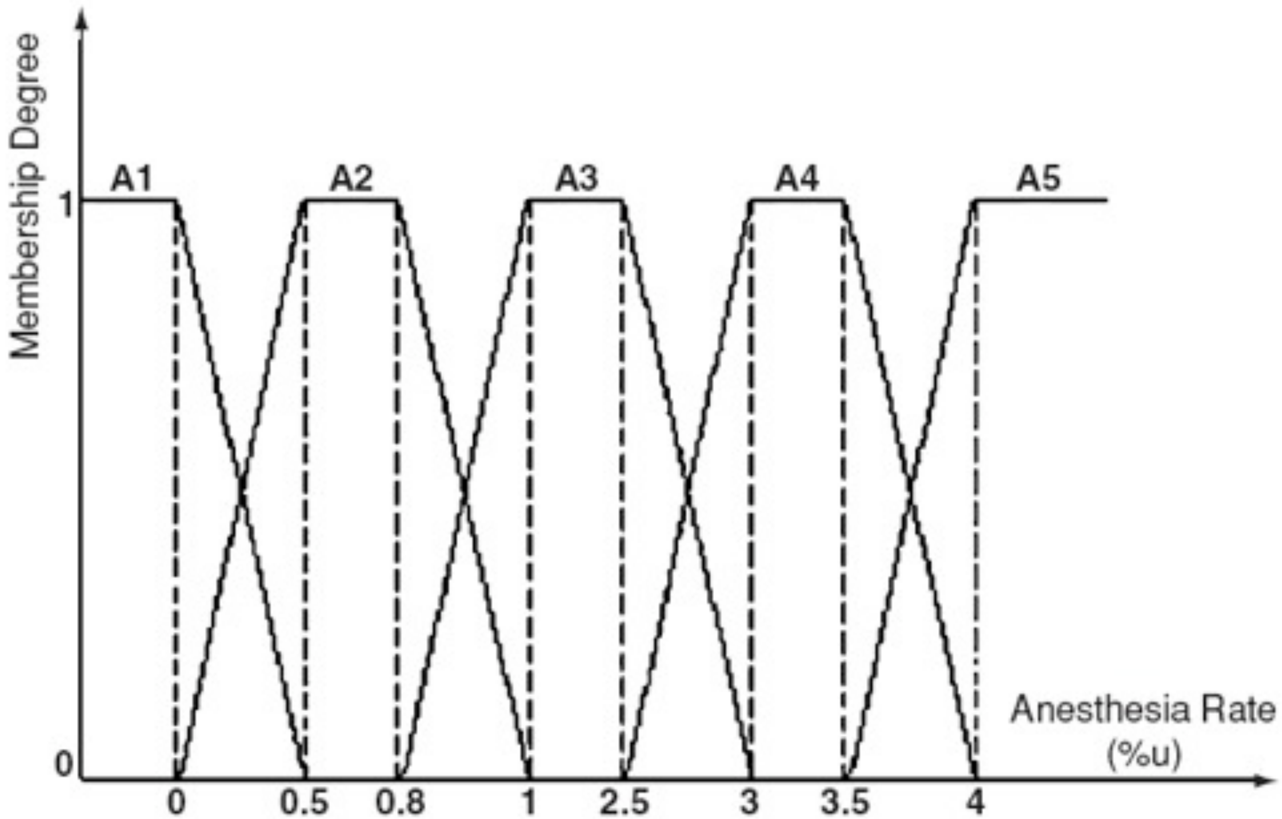
Variable	Minimum value	Maximum value
Blood Pressure (mmHg)	60	220
Pulse Rate (p m^{-1})	40	150
Anesthesia Ratio (%u)	0	4

Linguistic variables	Very low	Low	Normal	High	Very high
Blood pressure (mmHg)	< 80	90	100–140	160–170	> 190
Puse rate $(\text{p m})^{-1}$	< 50	60	70–90	95–110	> 120
Anesthesia ratio (%u)	0	0.5–0.8	1–2.5	3–3.6	4





Sistema de control de anestesia (II).



No todas las combinaciones van a ser posibles.

Blood pressure	Pulse rate	Anesthesia rate
High	Very_low	Invalid condition
Very_high	Very_low	Invalid condition
High	Low	Invalid condition
Very_high	Low	Invalid condition
Very_low	High	Invalid condition
Low	High	Invalid condition
Very_low	Very_high	Invalid condition
Low	Very_high	Invalid condition

Sistema de control de anestesia (III).

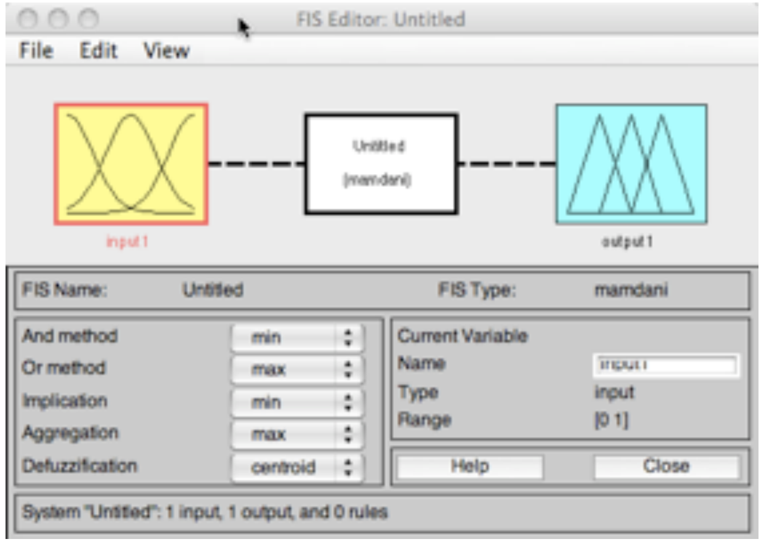
Table 8.7. Rule base for T and N fuzzy inputs

	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N7
T1	A1	A1	A2	A2	A2	S	S
T2	A2	A2	A3	A3	A3	A4	A4
T3	A2	A3	A3	A3	A3	A4	A4
T4	A2	A3	A3	A3	A3	A4	A4
T5	A2	A3	A3	A3	A3	A4	A4
T6	A2	A3	A3	A3	A3	A4	A4
T7	A2	A3	A3	A3	A3	A4	A4
T8	S	A4	A4	A4	A4	A5	A5
T9	S	A4	A4	A4	A4	A5	A5
T10	S	A4	A4	A4	A4	A5	A5
T11	S	A5	A5	A5	A5	A5	A5

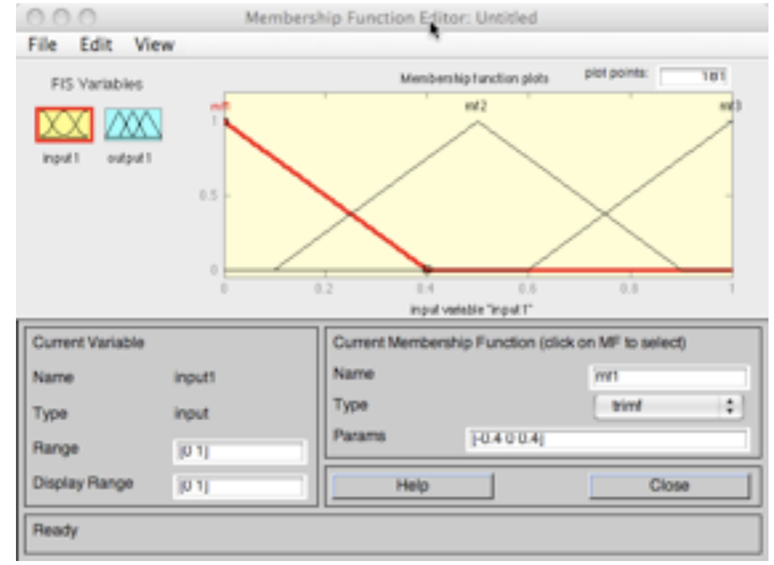
$$\mathrm{AO} = \frac{\sum_{x=a}^{b} \mu_{\mathrm{A}}(x)x}{\sum_{x=a}^{b} \mu_{A}(x)},$$

Toolbox de Lógica Borrosa en Matlab (I).

Editor FIS (se abre con *fuzzy*)

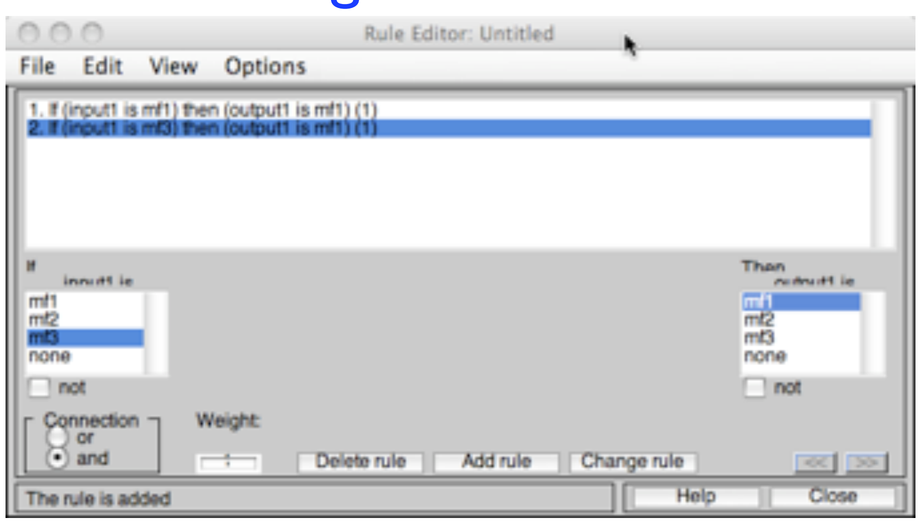


Aquí se definen los operadores borrosos

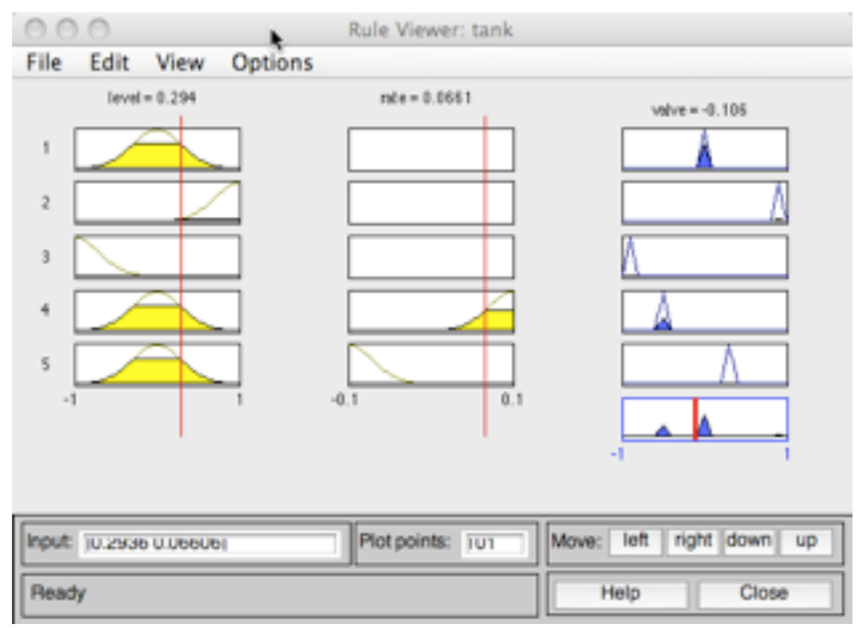


Editor de las variables lingüísticas definidas anteriormente

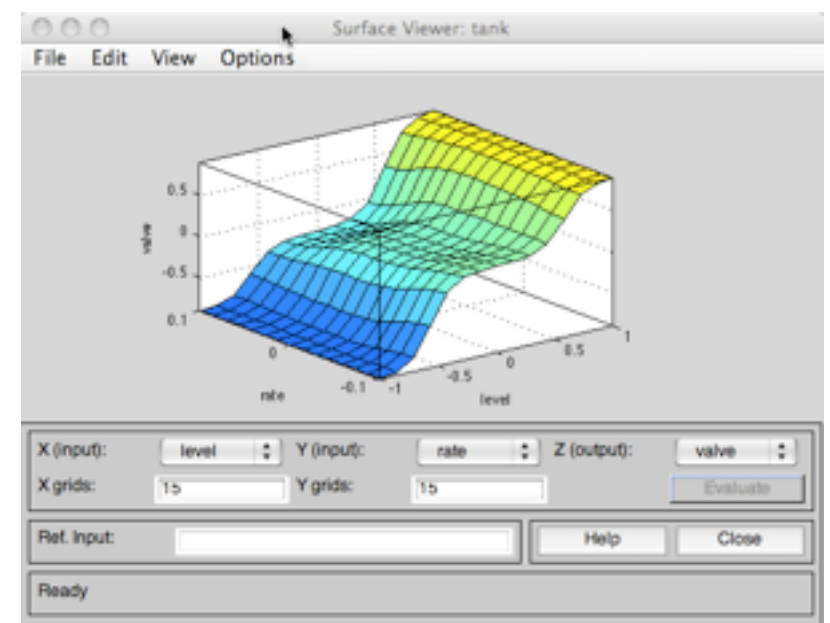
Editor para construir las reglas borrosas



Visor de reglas.



Visor de la superficie generada



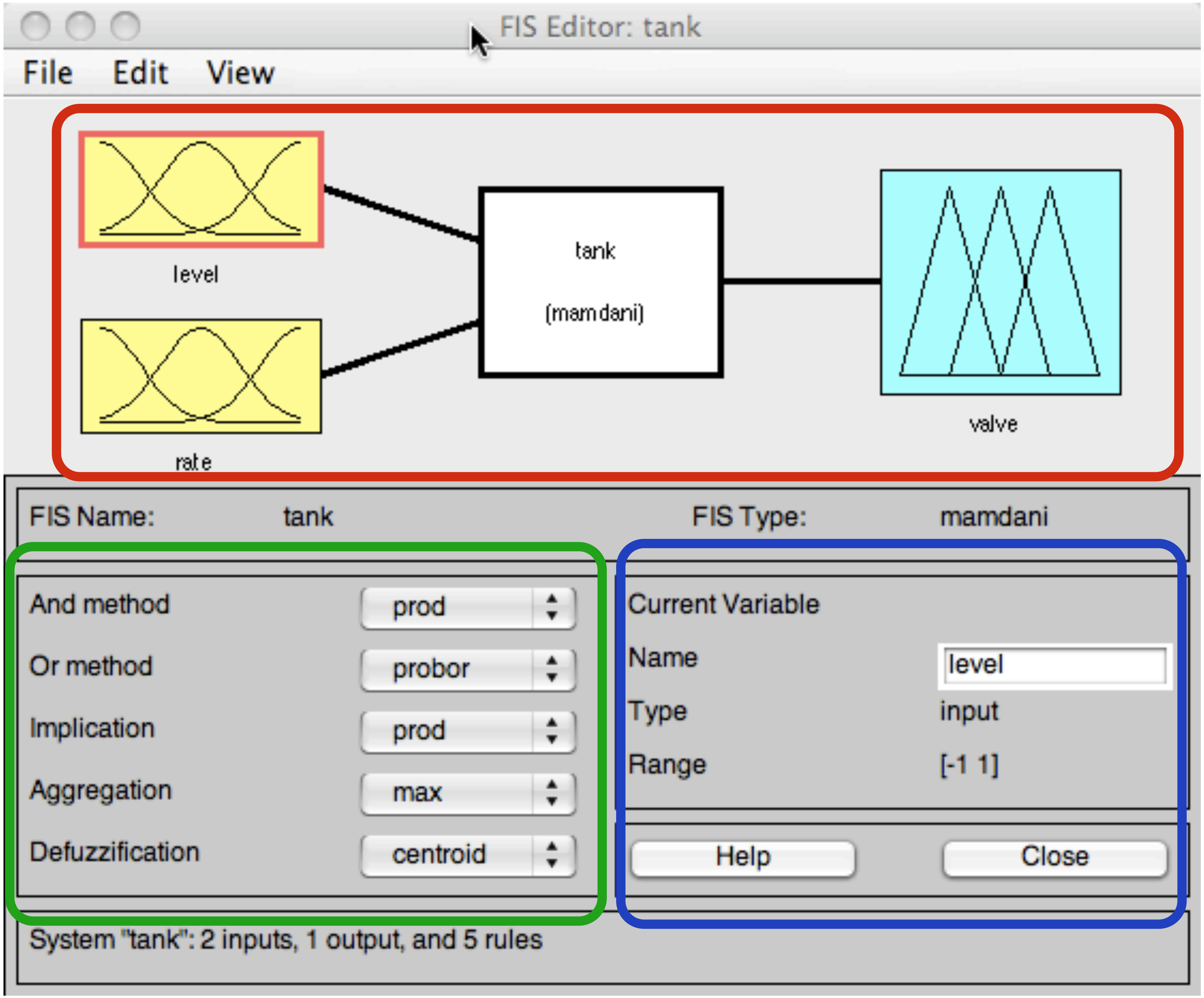
Toolbox de Lógica Borrosa en Matlab (II).

>>fuzzy

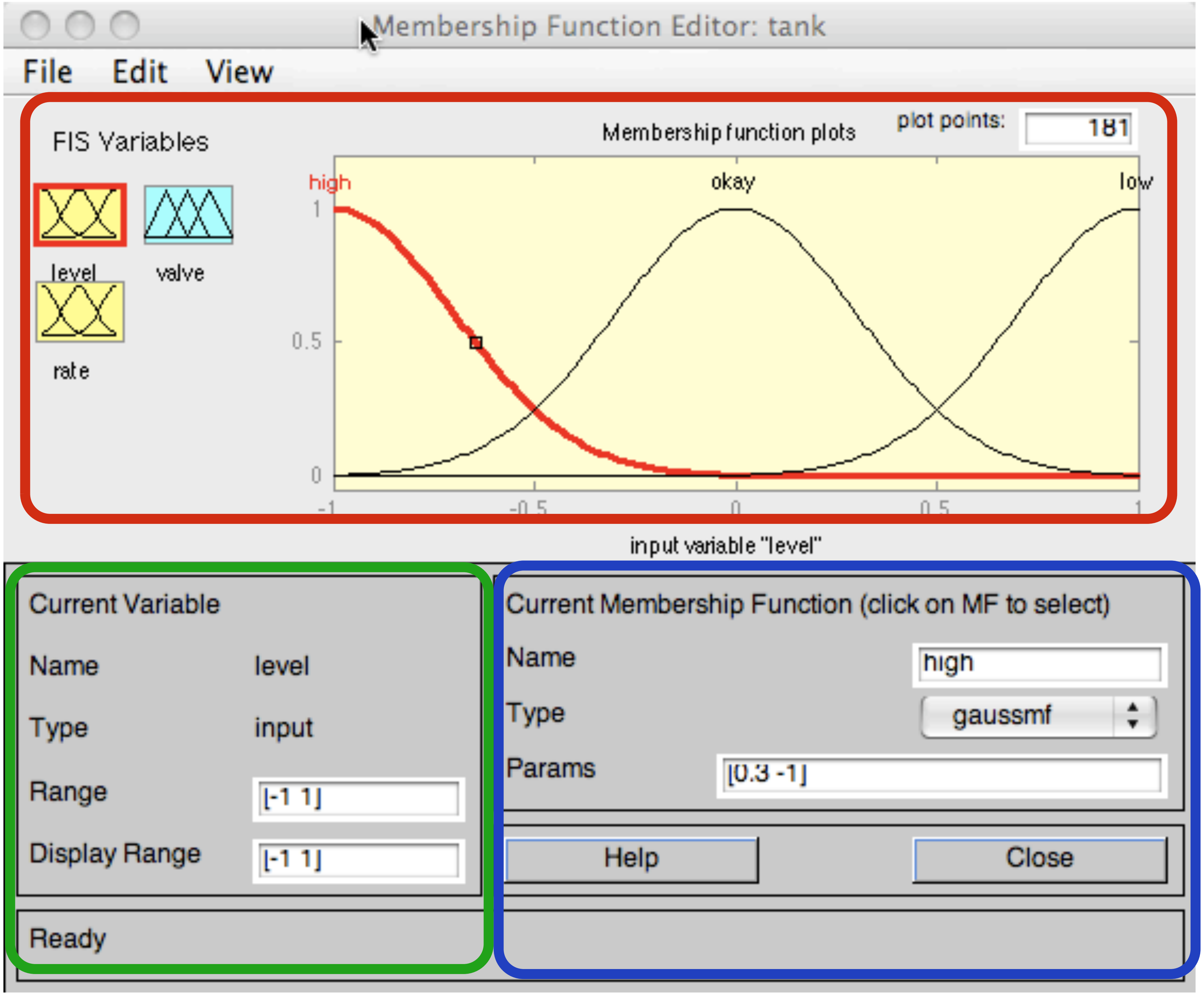
Definimos el número de variables y el tipo de sistema borroso

Se definen los operadores del sistema borroso

Se editan las entradas/ salidas del sistema



Toolbox de Lógica Borrosa en Matlab (III).



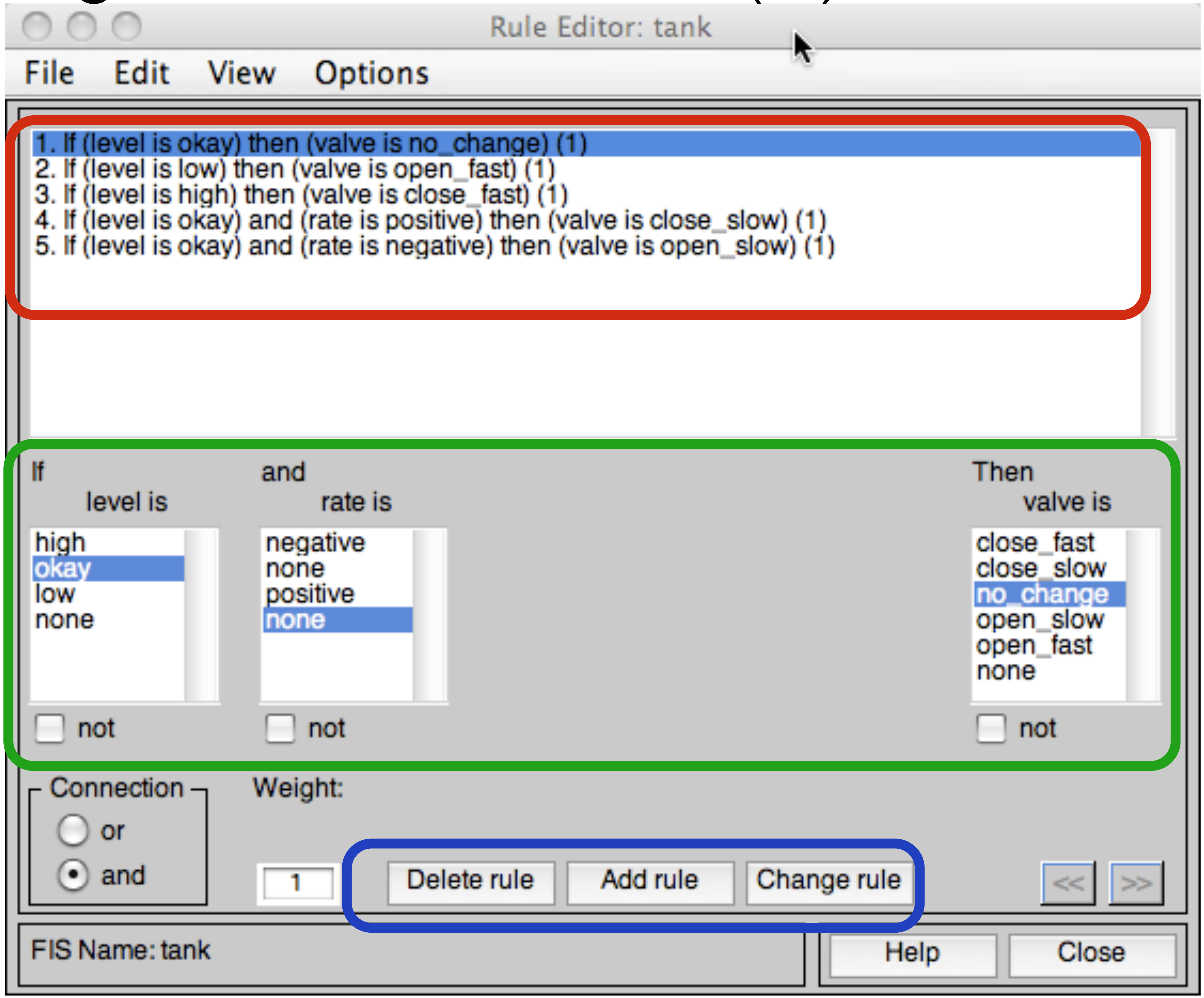
Se modifican las funciones de pertenencia del sistema borroso.

Modifica el rango de la variable y su visualización.

Modifica la función de pertenencia seleccionada

Toolbox de Lógica Borrosa en Matlab (IV).

Se representan las diferentes reglas del sistema de inferencia borroso.



Define el antecedente y consecuente de las diferentes reglas borrosas.

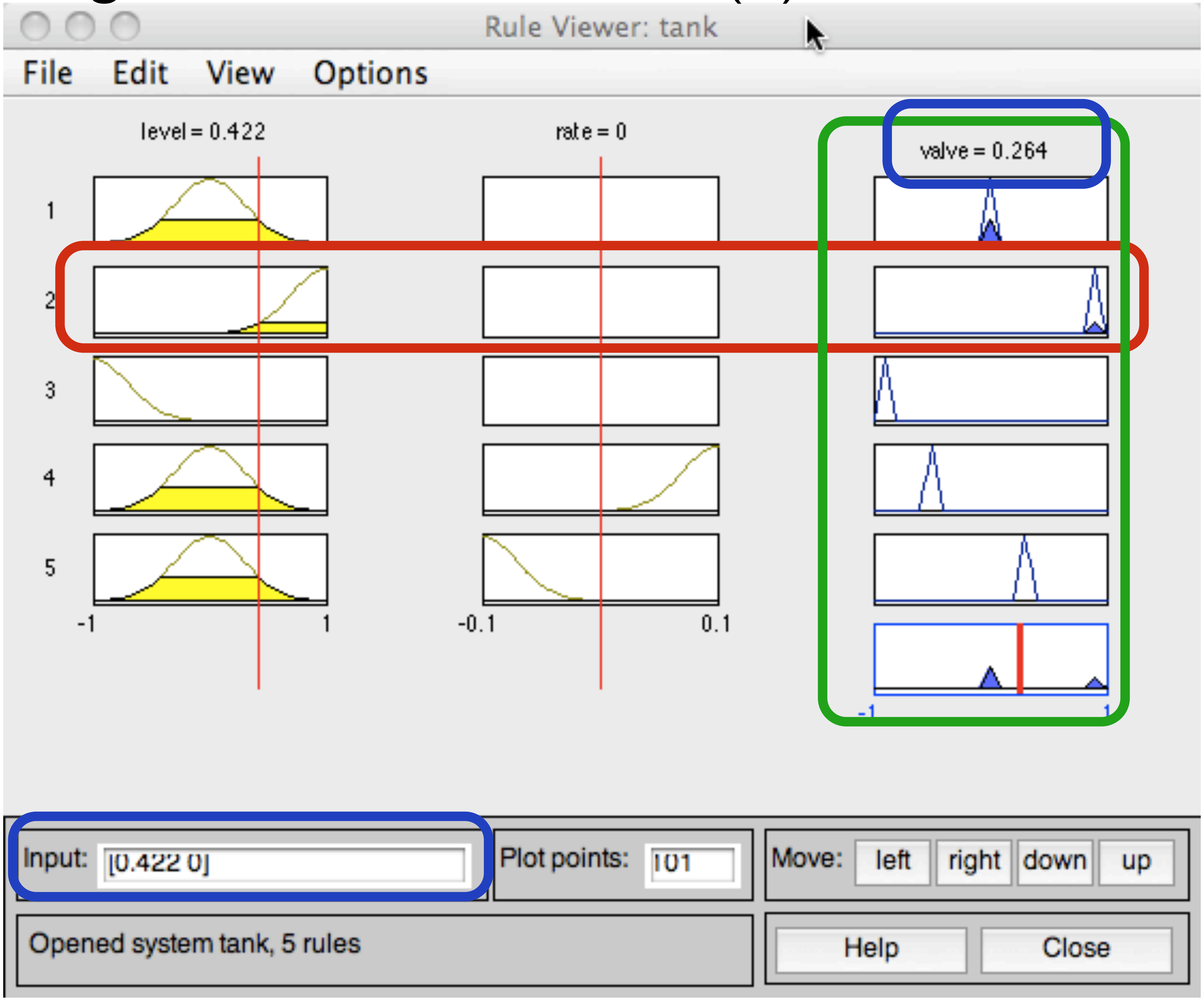
Borra/Añade o cambia reglas.

Toolbox de Lógica Borrosa en Matlab (V).

Dado el valor de cada variable de entrada define el grado de pertenencia a cada variable.

Define el consecuente según el grado de disparo de cada regla.

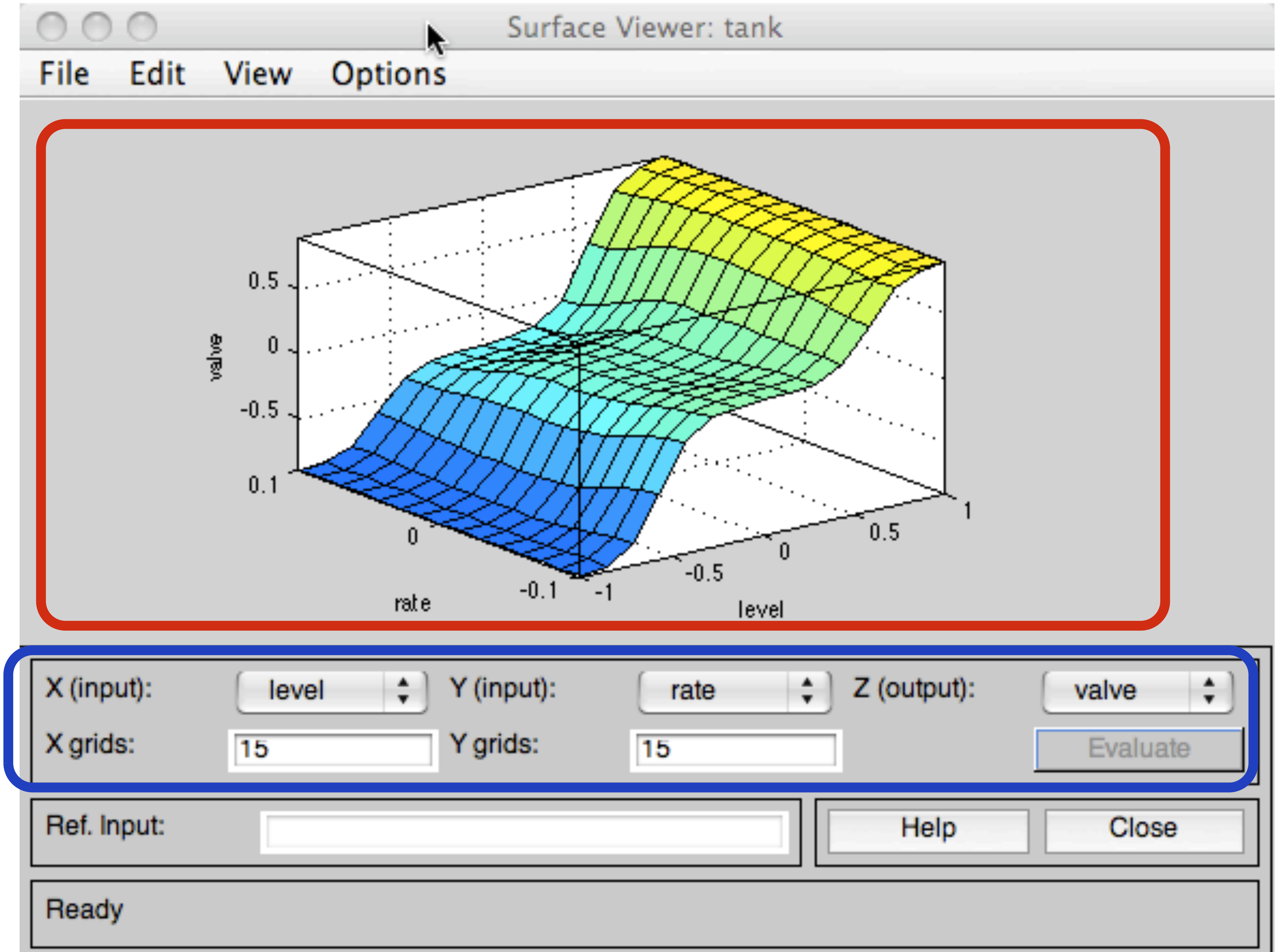
Define las entradas (parte inferior) y proporciona la salida (parte superior).



Toolbox de Lógica Borrosa en Matlab (VI).

Se representa los valores de salida frente a diferentes intervalos en los valores de las entradas.

Define los valores de las entradas



VNIVERSITAT DE VALÈNCIA

MASTER DE INGENIERÍA BIOMÉDICA.

Métodos de ayuda al diagnóstico clínico.

Tema 7: Lógica Borrosa

Emilio Soria, Antonio José Serrano y José David Martín Dpto Ingeniería Electrónica, ETSE