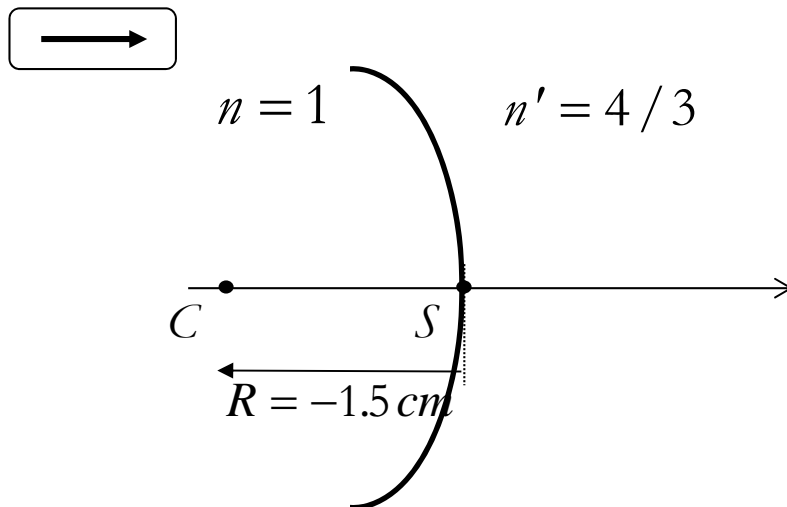


PROBLEMAS DE FÍSICA II. ÓPTICA GEOMÉTRICA

Soluciones del Boletín 4

Problemas

4.1. Considérese una superficie cóncava de radio R que separa dos medios de índices de refracción n y n' . Hállense:
a) Las distancias focales y la potencia para el caso de una superficie de radio 1.5 cm que separa aire y agua.



ECUACIONES GENERALES

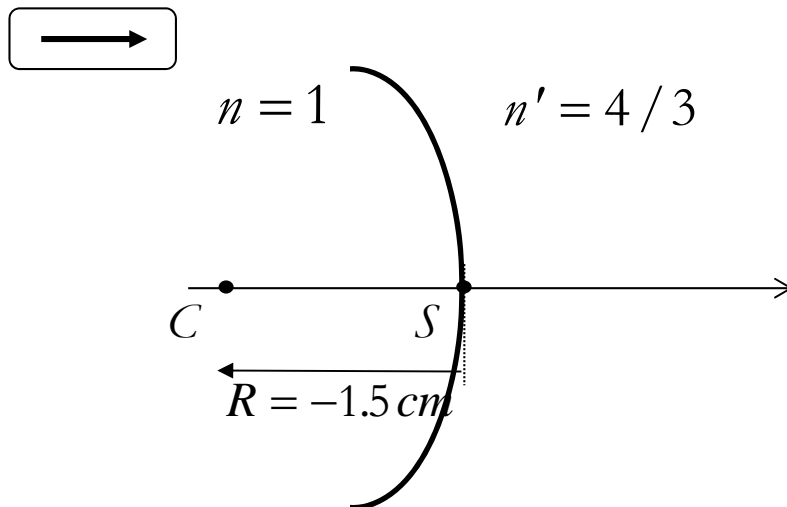
$$f = \frac{n}{n - n'} R \quad f' = \frac{n'}{n' - n} R$$

$$f = \frac{n}{n - n'} R = \frac{1}{1 - 4/3} (-1.5\text{ cm}) = 4.5\text{ cm}$$

$$f' = \frac{n'}{n' - n} R = \frac{4/3}{4/3 - 1} (-1.5\text{ cm}) = -6\text{ cm}$$

Problemas

4.1. Considérese una superficie cóncava de radio R que separa dos medios de índices de refracción n y n' . Hállense:
a) Las distancias focales y la potencia para el caso de una superficie de radio 1.5 cm que separa aire y agua.

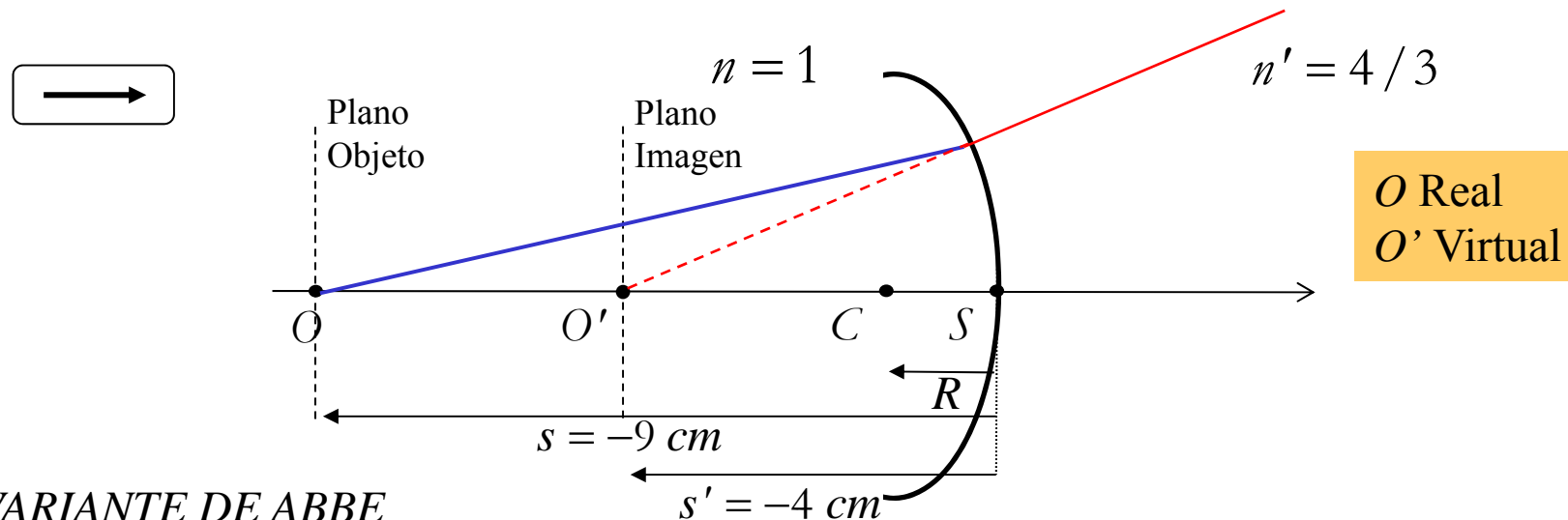


$$\varphi' = \frac{1}{f'}$$

$$\varphi' = \frac{1}{f'} = \frac{1}{-0,06\text{m}} = -16.7 \text{ m}^{-1} = -16.7 \text{ D}$$

Problemas

4.1. b) La distancia imagen y tamaño de un objeto pequeño situado a 9 cm del vértice que mide 3 cm de altura.



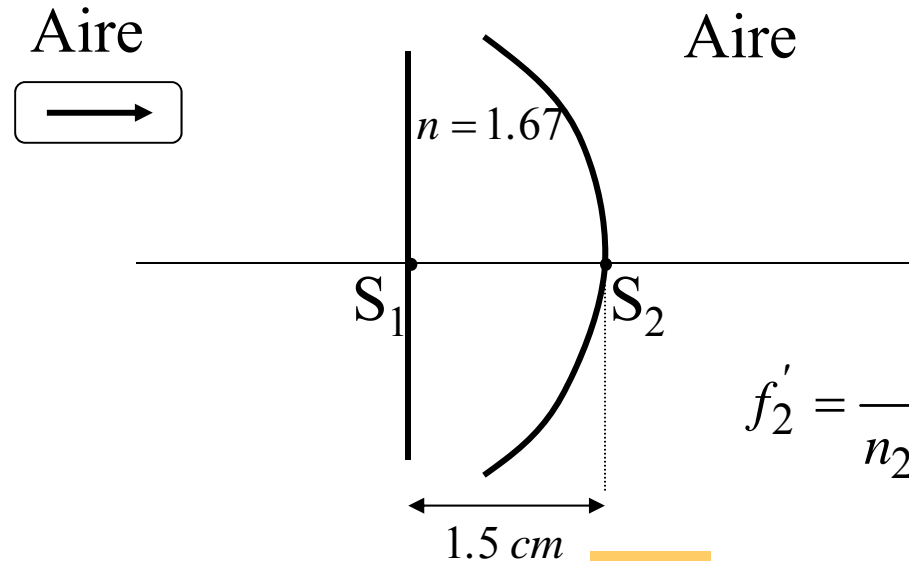
INVARIANTE DE ABBE

$$n \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s} \right) = n' \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s'} \right) \quad 1 \left(\frac{1}{-1.5 \text{ cm}} - \frac{1}{-9 \text{ cm}} \right) = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{-1.5 \text{ cm}} - \frac{1}{s'} \right) \rightarrow s' = -4 \text{ cm}$$

$$\beta' = \frac{n}{n'} \frac{s'}{s} = \frac{y'}{y} \quad \beta' = \frac{1}{4/3} \frac{(-4) \text{ cm}}{(-9) \text{ cm}} = \frac{1}{3}; \quad \frac{1}{3} = \frac{y'}{y} \rightarrow y' = \frac{3 \text{ cm}}{3} = 1 \text{ cm}$$

Problemas

4.3. Considérese el acoplamiento de un dioptrio plano y otro esférico, de radio de curvatura -13.4 cm . Entre los dioptrios, separados 1.5 cm , el medio tiene un índice de refracción $n=1.67$, y en el exterior hay aire. Obténgase la posición de los planos principales y la potencia del acoplamiento.



Calculamos f' de los dioptrios

$$f_1' = \frac{n_1'}{n_1' - n_1} R_1 = \infty$$

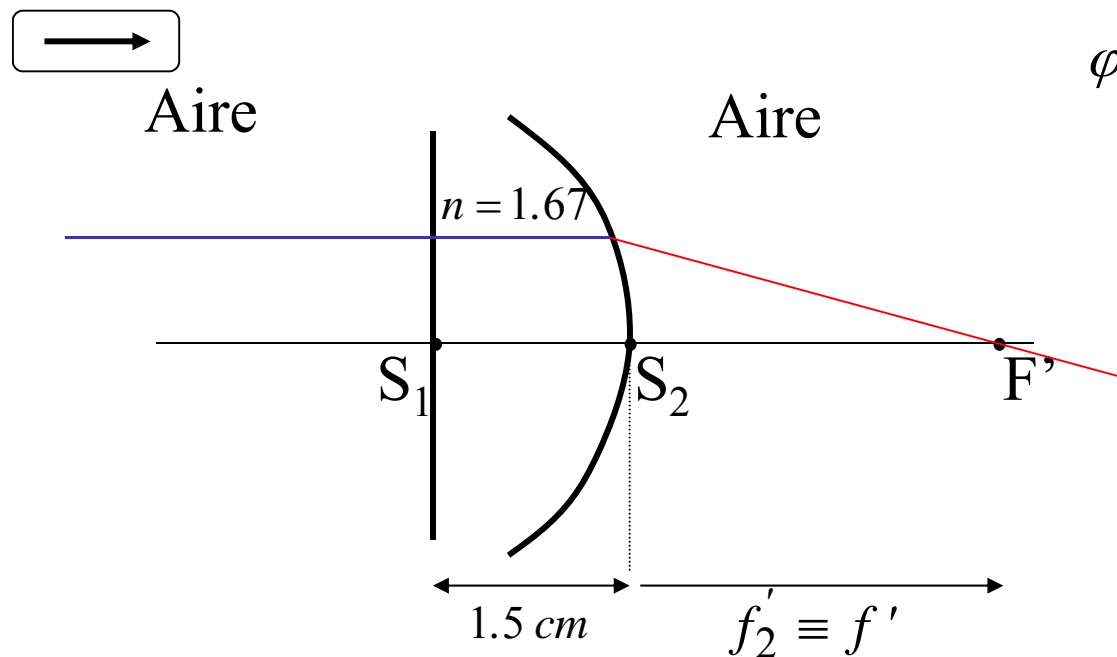
↑
 $R_1 = \infty$

$$f_2' = \frac{n_2'}{n_2' - n_2} R_2 = \frac{1}{1 - 1.67} (-13.4 \text{ cm}) = 20.1 \text{ cm}$$

$$\varphi' = \frac{n_2'}{n_2} \varphi_1' + \varphi_2' - e \varphi_1' \varphi_2' = \varphi_2' = \frac{1}{f_2'} = \frac{1}{0.201 \text{ m}} \cong 5D$$

Problemas

4.3. Considérese el acoplamiento de un dioptrio plano y otro esférico, de radio de curvatura -13.4 cm . Entre los dioptrios, separados 1.5 cm , el medio tiene un índice de refracción $n=1.67$, y en el exterior hay aire. Obténgase la posición de los planos principales y la potencia del acoplamiento.



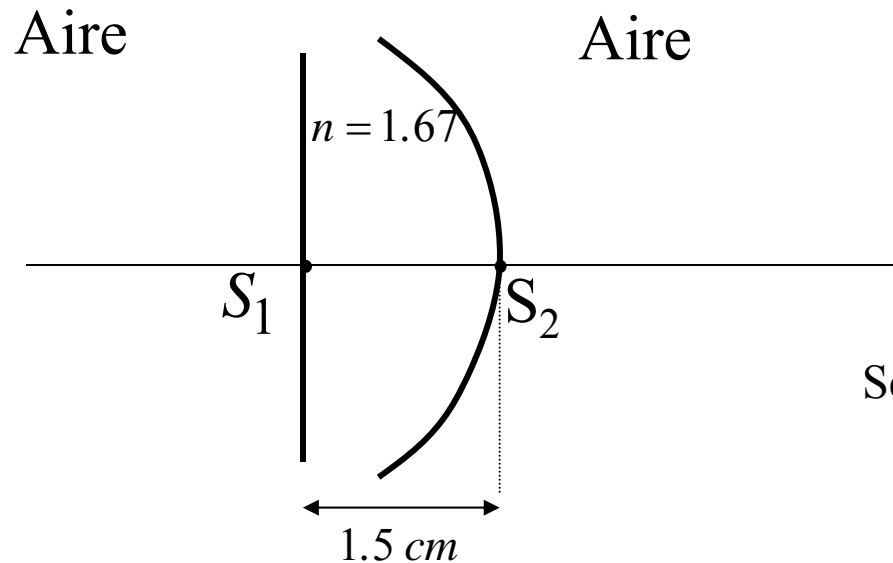
$$\varphi' = \varphi'_2 = \frac{1}{f'_2} = \frac{1}{0.201 \text{ m}} \cong 5D$$



$$f'_2 = f' = 20.1 \text{ cm} \cong 20 \text{ cm}$$

Problemas

4.3. Considérese el acoplamiento de un dioptrio plano y otro esférico, de radio de curvatura -13.4 cm . Entre los dioptrios, separados 1.5 cm , el medio tiene un índice de refracción $n=1.67$, y en el exterior hay aire. Obténgase la posición de los planos principales y la potencia del acoplamiento.



Calculamos la posición de H y H' del acoplamiento

$$\overline{H_1 H} = \frac{e}{t} f_1$$

$$\overline{H'_2 H'} = \frac{e}{t} f'_2$$

Se cumple que:

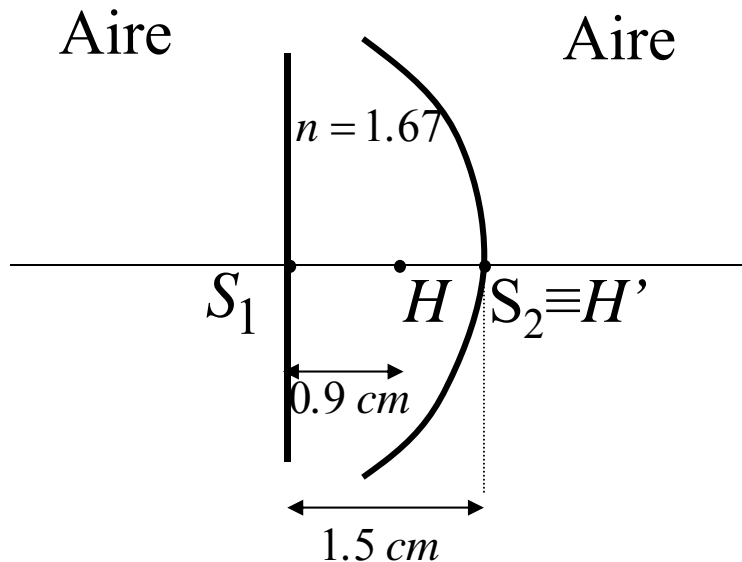
$$S_1 \equiv H_1 \equiv H'_1$$

$$S_2 \equiv H_2 \equiv H'_2$$

Problemas

4.3. Considérese el acoplamiento de un dioptrio plano y otro esférico, de radio de curvatura -13.4 cm . Entre los dioptrios, separados 1.5 cm , el medio tiene un índice de refracción $n=1.67$, y en el exterior hay aire. Obténgase la posición de los planos principales y la potencia del acoplamiento.

Calculamos la posición de H y H' del acoplamiento



$$\overline{H_1 H} = \frac{e}{t} f_1 = \frac{e}{-f'_1 + e + f_2} f_1 = 0.9 \text{ cm}$$

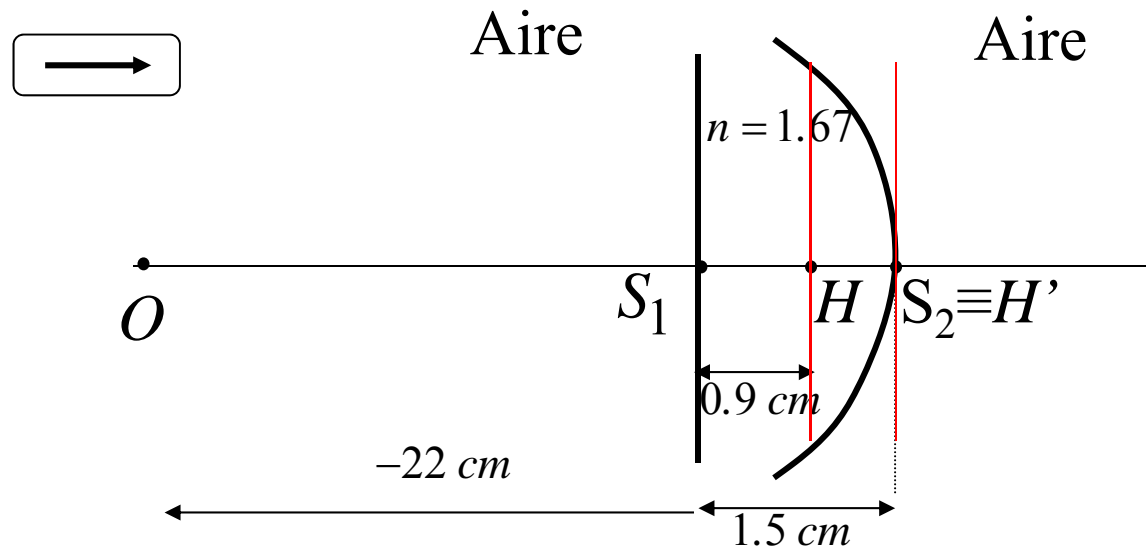
$$\lim_{f'_1 \rightarrow \infty} \frac{e}{-f'_1} f_1 = e \frac{n_1}{n'_1} = 1.5 \frac{1}{1.67} = 0.9 \text{ cm}$$

$$\overline{H'_2 H'} = \frac{e}{t} f'_2 = \frac{e}{-f'_1 + e + f_2} f'_2 = 0$$

$f'_1 \rightarrow \infty$

Problemas

4.3. Determinése la posición de la imagen y el aumento lateral observado si situamos un objeto real a 22 cm delante de la primera cara.



$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'} \quad \left\{ \begin{array}{l} f' = 20 \text{ cm} \\ a = \overline{HO} = \overline{HS_1} + \overline{S_1O} = -0.90 \text{ cm} - 22 \text{ cm} \\ \quad = -22.9 \text{ cm} \end{array} \right.$$

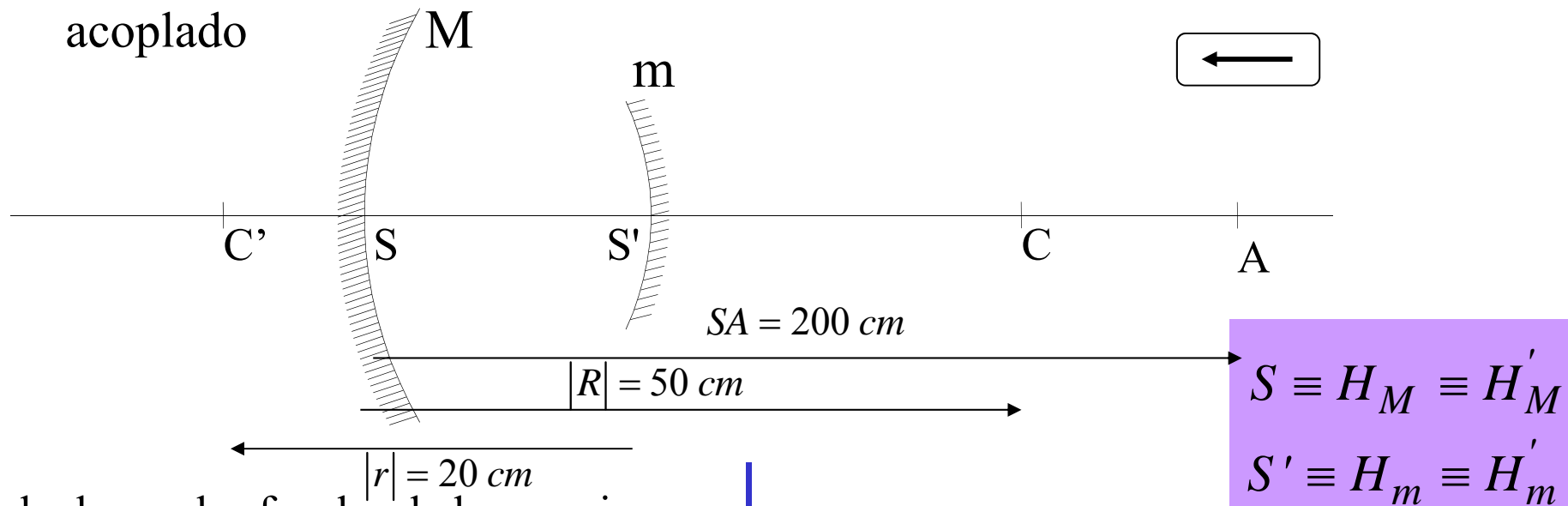
$$\text{green arrow} \rightarrow a' = \frac{f' \cdot a}{a + f'} = \frac{20 \text{ cm} \cdot (-22.9 \text{ cm})}{-22.9 \text{ cm} + 20 \text{ cm}} = 157.93 \text{ cm}$$

$$\beta' = \frac{a'}{a} = \frac{157.93}{-22.9} = -6.89 \approx -6.9$$

Problemas

4.4. Dado el sistema centrado del ejercicio 3.7, y considerando nuevamente la aproximación paraxial, calcúlese la imagen del punto A después de reflejarse sucesivamente en los espejos M y en m.

Considérese el cálculo a través de los elementos cardinales del sistema acoplado



Calculamos las focales de los espejos

$$f_m = f'_m = \overline{S'F'_m} = \frac{\overline{S'C'}}{2} = 10 \text{ cm}$$

$$f_M = f'_M = \overline{SF'_M} = \frac{\overline{SC}}{2} = -25 \text{ cm}$$

$$\overline{H'_1H_2} = e = \overline{SS'} = -15 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} t = \overline{F'_M F_m} &= \overline{F'_M S} + \overline{SS'} + \overline{S'F_m} \\ &= 25 \text{ cm} - 15 \text{ cm} + 10 \text{ cm} = 20 \text{ cm} \end{aligned}$$

Problemas

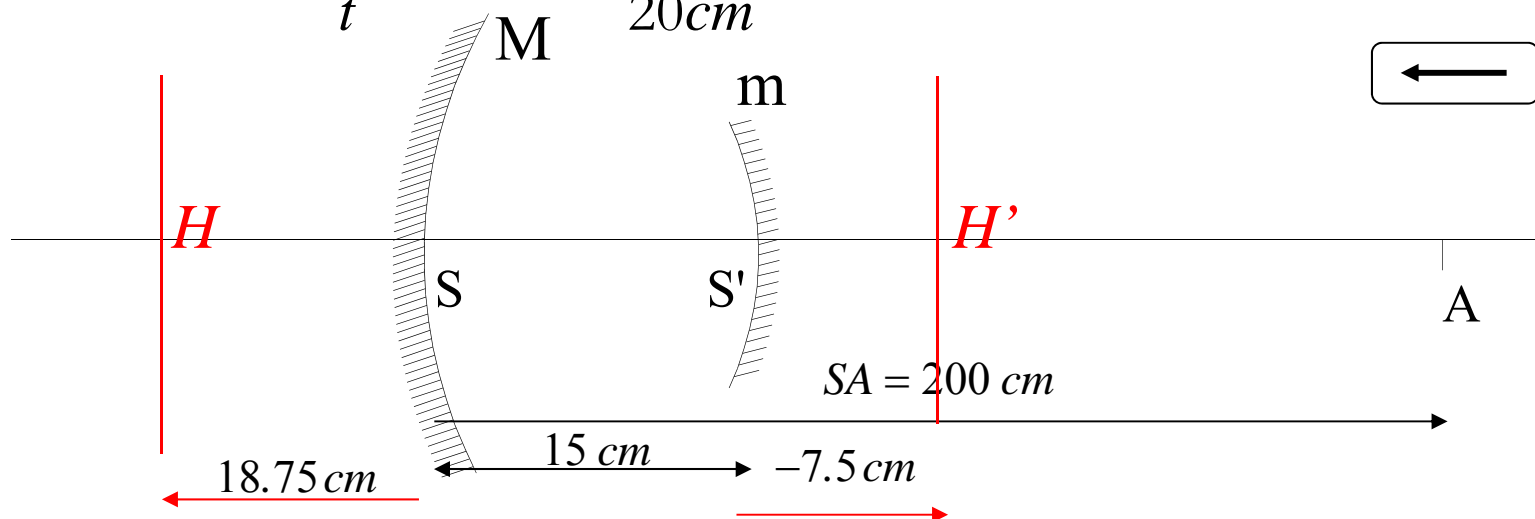
4.4. Dado el sistema centrado del ejercicio 3.7, y considerando nuevamente la aproximación paraxial, calcúlese la imagen del punto A después de reflejarse sucesivamente en los espejos M y en m. Considérese el cálculo a través de los elementos cardinales del sistema acoplado

Calculamos

$$f' = -\frac{f'_M f'_m}{t} = -\frac{(-25\text{cm}) \cdot 10\text{cm}}{20\text{cm}} = 12.5\text{ cm}$$

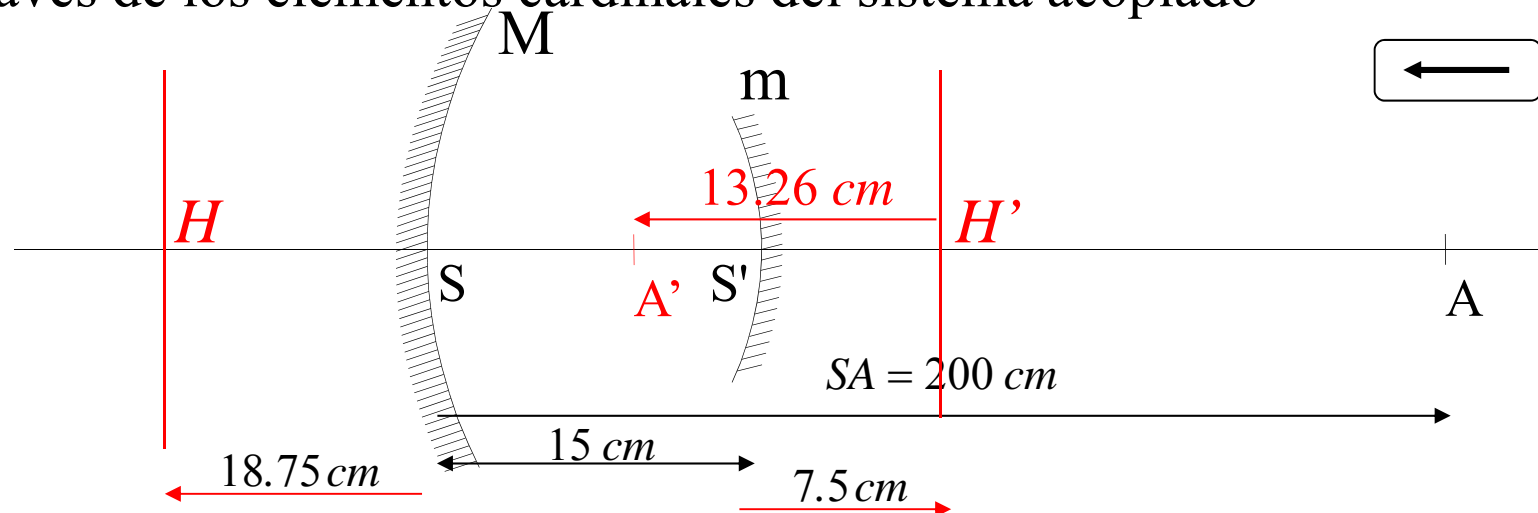
$$\overline{H_M H} = \frac{f'_M \cdot e}{t} = \frac{(-25\text{cm}) \cdot (-15\text{cm})}{20\text{cm}} = 18.75\text{ cm} \equiv \overline{SH}$$

$$\overline{H'_m H'} = \frac{f'_m \cdot e}{t} = \frac{(10\text{cm}) \cdot (-15\text{cm})}{20\text{cm}} = -7.5\text{ cm} \equiv \overline{S'H'}$$



Problemas

4.4. Dado el sistema centrado del ejercicio 3.7, y considerando nuevamente la aproximación paraxial, calcúlese la imagen del punto A después de reflejarse sucesivamente en los espejos M y en m. Considérese el cálculo a través de los elementos cardinales del sistema acoplado



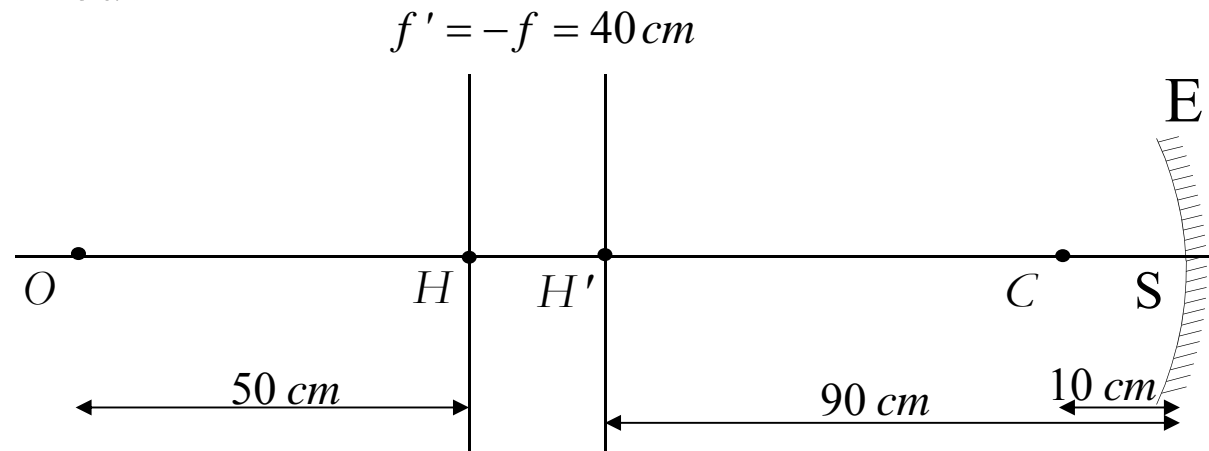
$$-\frac{1}{\overline{HA}} + \frac{1}{\overline{H'A'}} = \frac{1}{f'} \quad \left\{ \begin{array}{l} f' = 12.5 \text{ cm} \\ \overline{HA} = \overline{HS} + \overline{SA} = -18.75 \text{ cm} - 200 \text{ cm} \\ = -218.75 \text{ cm} \end{array} \right.$$



$$\overline{H'A'} = \frac{f' \cdot \overline{HA}}{\overline{HA} + f'} = \frac{12.5 \text{ cm} \cdot (-218.75 \text{ cm})}{12.5 \text{ cm} - 218.75 \text{ cm}} = 13.26 \text{ cm}$$

Problemas

4.5. Considérese un sistema óptico tal que $f' = -f = 40 \text{ cm}$ acoplado a un espejo cóncavo de radio 10 cm y situado a 90 cm de su punto principal imagen. Encuéntrese la imagen de un objeto situado 50 cm por delante del punto principal objeto: a) A través del sistema óptico tal cual



Hallamos la imagen de O a través de HH'

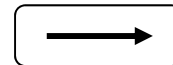


$$-\frac{1}{\overline{HO}} + \frac{1}{\overline{H'O_1'}} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{-50\text{cm}} + \frac{1}{\overline{H'O_1'}} = \frac{1}{40\text{cm}} \quad \Rightarrow \quad \overline{H'O_1'} = 200 \text{ cm}$$

Problemas

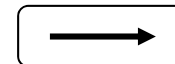
4.5. Considérese un sistema óptico tal que $f' = -f = 40 \text{ cm}$ acoplado a un espejo cóncavo de radio 10 cm y situado a 90 cm de su punto principal imagen. Encuéntrese la imagen de un objeto situado 50 cm por delante del punto principal objeto: a) A través del sistema óptico tal cual

Hallamos la imagen de O_1' a través de E'



$$\frac{1}{\overline{SO_1'}} + \frac{1}{\overline{SO_2'}} = \frac{2}{\overline{SC}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{SC} = -10 \text{ cm} \\ \overline{SO_1'} = \overline{SH'} + \overline{H'O_1'} \\ = -90 \text{ cm} + 200 \text{ cm} = 110 \text{ cm} \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \overline{SO_2'} = -4.78 \text{ cm}$$

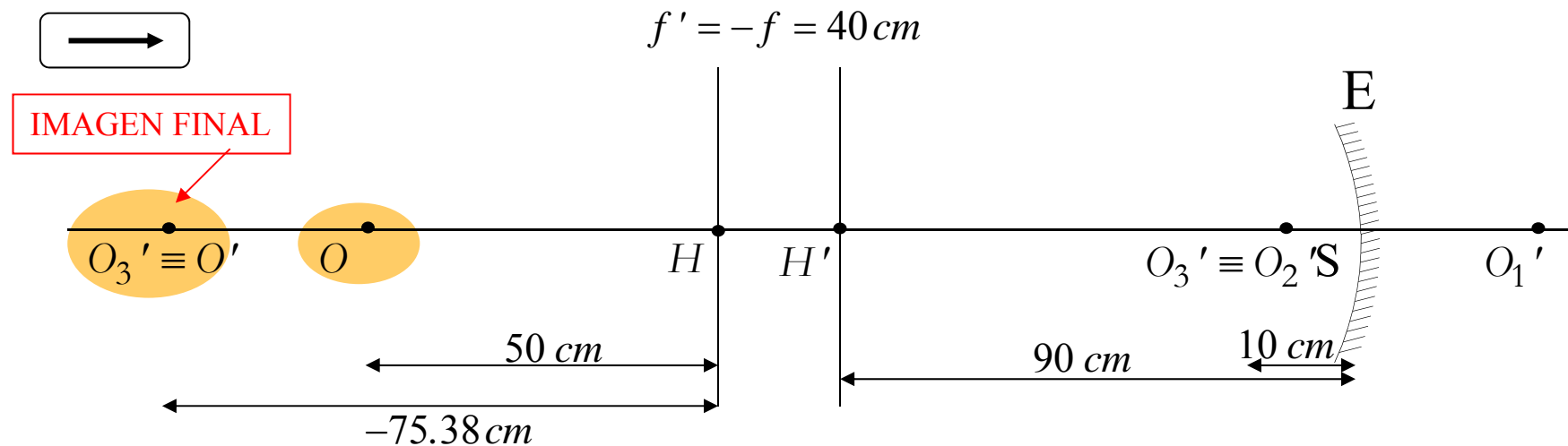
Por último, hallamos la anti-imagen de $O_2' \equiv O_3'$ a través del sistema HH' ya que la luz se refleja en el espejo y pasa de nuevo por el sistema HH'



$$-\frac{1}{\overline{HO_3}} + \frac{1}{\overline{H'O_3'}} = \frac{1}{f'} \quad \left\{ \begin{array}{l} f' = 40 \text{ cm} \\ \overline{H'O_3'} = \overline{H'S} + \overline{SO_3'} \\ = 90 \text{ cm} + (-4.78 \text{ cm}) = 85.22 \text{ cm} \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \overline{HO_3} = -75.38 \text{ cm}$$

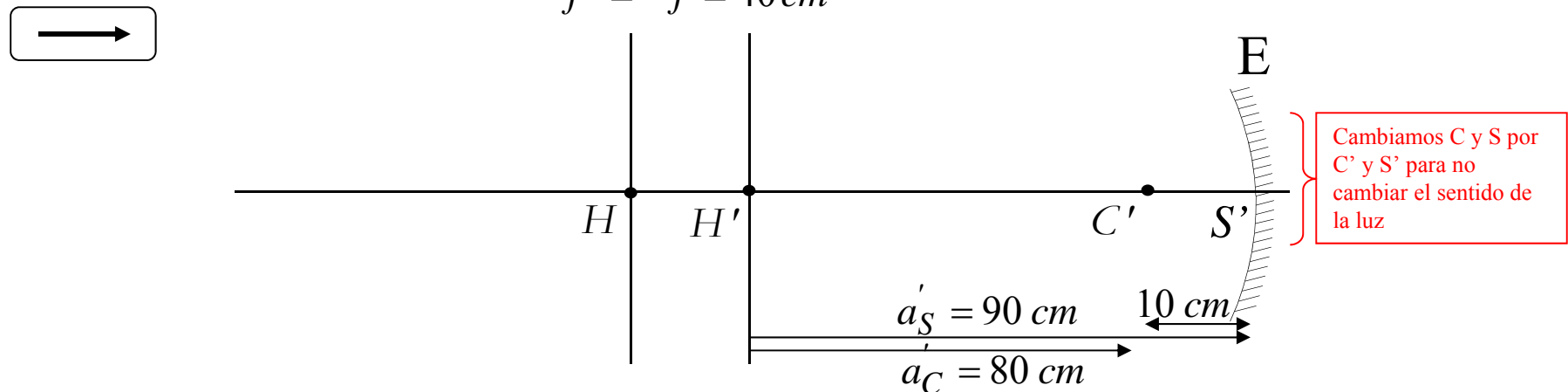
Problemas

4.5. Considérese un sistema óptico tal que $f' = -f = 40 \text{ cm}$ acoplado a un espejo cóncavo de radio 10 cm y situado a 90 cm de su punto principal imagen. Encuéntrese la imagen de un objeto situado 50 cm por delante del punto principal objeto: a) A través del sistema óptico tal cual



Problemas

4.5. b) Hallando primero el espejo equivalente del sistema y luego hallando la imagen del objeto a través del nuevo sistema equivalente



Un espejo (E) viene definido por su centro C y su vértice S. Hallar el espejo equivalente implicará hallar la anti-imagen de C' y S' a través del sistema óptico refractivo

ANTI-IMAGEN DE S' A TRAVÉS DE HH'

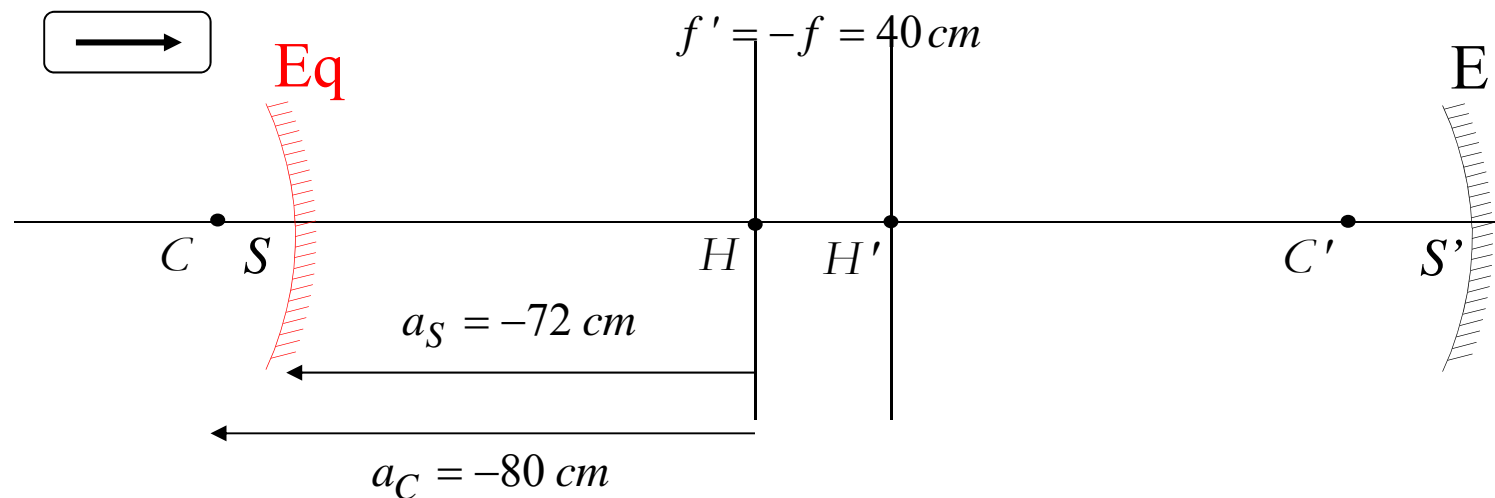
$$-\frac{1}{a_S} + \frac{1}{a'_S} = \frac{1}{f'} \quad \left\{ \begin{array}{l} f' = 40 \text{ cm} \\ a'_S = 90 \text{ cm} \end{array} \right. \Rightarrow a_S = -72 \text{ cm}$$

Problemas

4.5. b) Hallando primero el espejo equivalente del sistema y luego hallando la imagen del objeto a través del nuevo sistema equivalente

ANTI-IMAGEN DE C' A TRAVÉS DE HH'

$$-\frac{1}{a_C} + \frac{1}{a'_C} = \frac{1}{f'} \quad \left\{ \begin{array}{l} f'_1 = 40 \text{ cm} \\ a_C = \overline{H'C'} = \overline{H'S} + \overline{SC'} \rightarrow a_C = -80 \text{ cm} \\ = 90 \text{ cm} - 10 \text{ cm} = 80 \text{ cm} \end{array} \right.$$



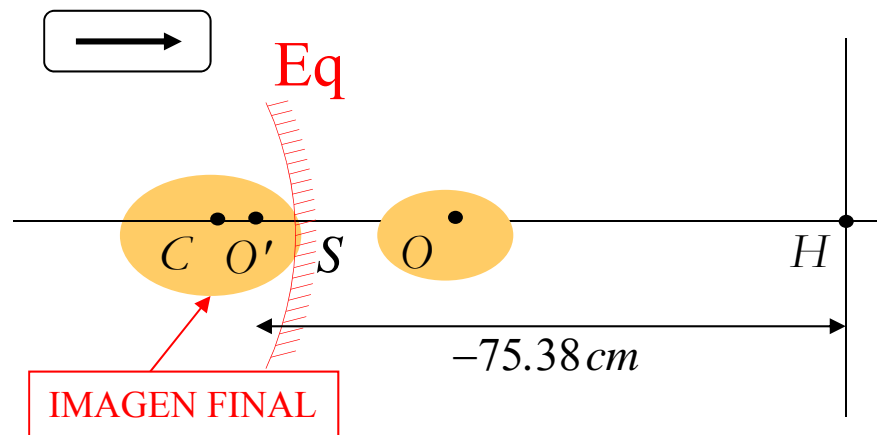
Calculamos el radio del Eq $R_{eq} = \overline{SC} = \overline{SH} + \overline{HC} = +72 \text{ cm} - 80 \text{ cm} = -8 \text{ cm}$

Problemas

4.5. b) Hallando primero el espejo equivalente del sistema y luego hallando la imagen del objeto a través del nuevo sistema equivalente

CALCULAMOS LA IMAGEN DE O A TRAVÉS DEL ESPEJO EQUIVALENTE

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R_{eq}} \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{eq} = -8 \text{ cm} \\ s = \overline{SO} = \overline{SH} + \overline{HO} \\ = 72 \text{ cm} - 50 \text{ cm} = 22 \text{ cm} \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad s' = -3.38 \text{ cm} = \overline{SO'}$$



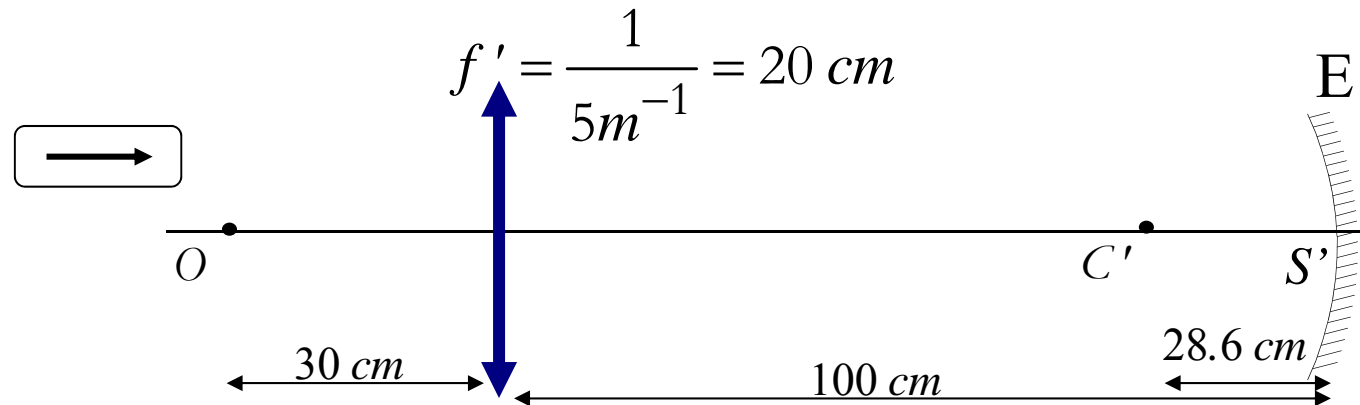
Comprobamos que sale igual que en a)

$$s' = -3.38 = \overline{SO'} = \overline{SH} + \overline{HO'}$$

$$\overline{HO'} = -3.38 \text{ cm} - 72 \text{ cm} = -75.38 \text{ cm}$$

Problemas

4.6. A 30 cm de una lente delgada de 5 D de potencia se encuentra un objeto real, y a 1 m detrás de la lente se coloca un espejo esférico cóncavo de 28.6 cm de radio de curvatura. a) Calcúlese la posición de la imagen final.



Hallamos primero el espejo equivalente (Anti-imagen de C' y S')

ANTI-IMAGEN DE S' A TRAVÉS DEL DIOPTRIO

$$-\frac{1}{a_S} + \frac{1}{a'_S} = \frac{1}{f'} \quad \left\{ \begin{array}{l} f' = 20\text{ cm} \\ a'_S = 100\text{ cm} \end{array} \right. \Rightarrow a_S = -25\text{ cm}$$

Problemas

4.6. A 30 cm de una lente delgada de 5 D de potencia se encuentra un objeto real, y a 1 m detrás de la lente se coloca un espejo esférico cóncavo de 28.6 cm de radio de curvatura. a) Calcúlese la posición de la imagen final.

ANTI-IMAGEN DE C' A TRAVÉS DEL DIOPTRIO

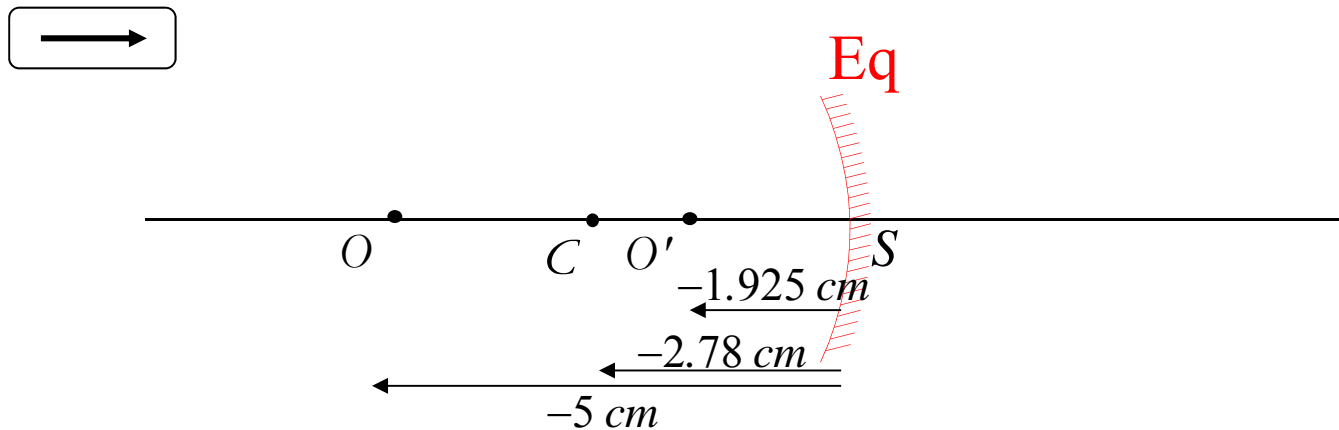
$$-\frac{1}{a_C} + \frac{1}{a'_C} = \frac{1}{f'} \quad \left\{ \begin{array}{l} f' = 40 \text{ cm} \\ a_C = \overline{LC'} = \overline{LS} + \overline{SC'} \\ = 100 \text{ cm} - 28.6 \text{ cm} = 71.4 \text{ cm} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad a_C = -27.78 \text{ cm}$$

HALLAMOS LA IMAGEN DE O A TRAVÉS DEL ESPEJO EQUIVALENTE

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R_{eq}} \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{eq} = \overline{SC} = \overline{SL} + \overline{LC} \\ = 25 \text{ cm} - 27.78 \text{ cm} = -2.78 \text{ cm} \\ s = \overline{SO} = \overline{SL} + \overline{LO} \\ = 25 \text{ cm} - 30 \text{ cm} = -5 \text{ cm} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad s' = -1.925 \text{ cm} = \overline{SO'}$$

Problemas

4.6. A 30 cm de una lente delgada de 5 D de potencia se encuentra un objeto real, y a 1 m detrás de la lente se coloca un espejo esférico cóncavo de 28.6 cm de radio de curvatura. a) Calcúlese la posición de la imagen final.

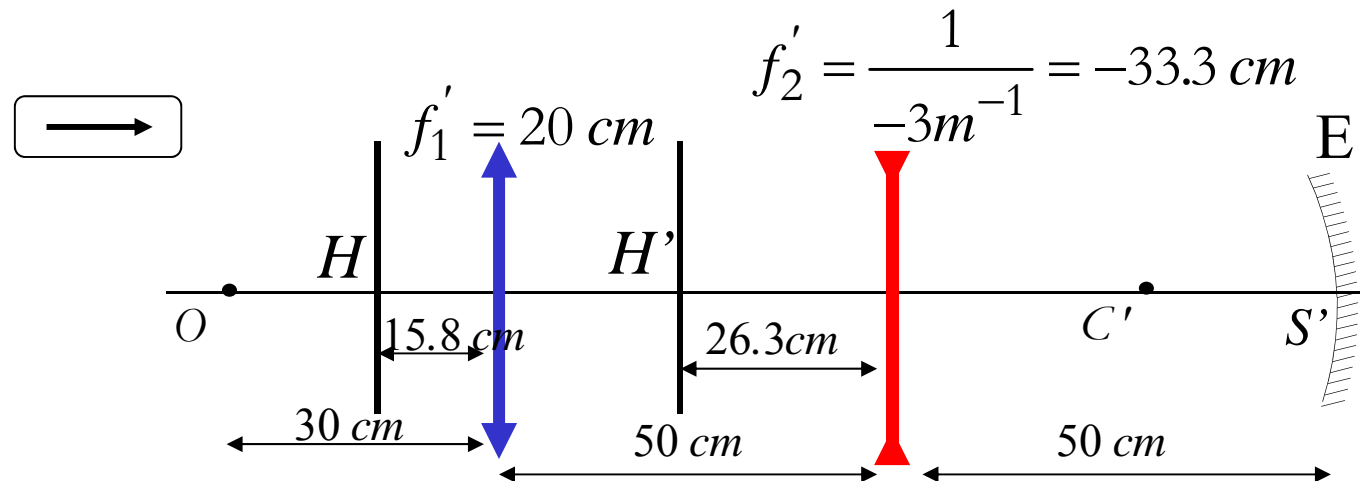


Solución: La imagen se encuentra a 3.1 cm a la derecha del objeto

$$\overline{OO'} = \overline{OS} + \overline{SO'} = 5\text{ cm} - 1.925\text{ cm} = 3.1\text{ cm}$$

Problemas

4.6. b) Si entre el espejo y la lente se intercala otra lente de $-3D$, a 50 cm de la primera, determínese la nueva posición de la imagen final.



Acoplaremos el doblete

$$\begin{aligned} e &= 50\text{cm} \\ t &= -f_1' + e + f_2 \\ &= -20\text{cm} + 50\text{cm} + 33.3\text{cm} \\ &= 63.3\text{cm} \end{aligned}$$

$$\overline{H_1H} = \frac{e}{t} f_1 = \frac{50\text{cm}}{63.3\text{cm}} (-20\text{cm}) = -15.8\text{cm}$$

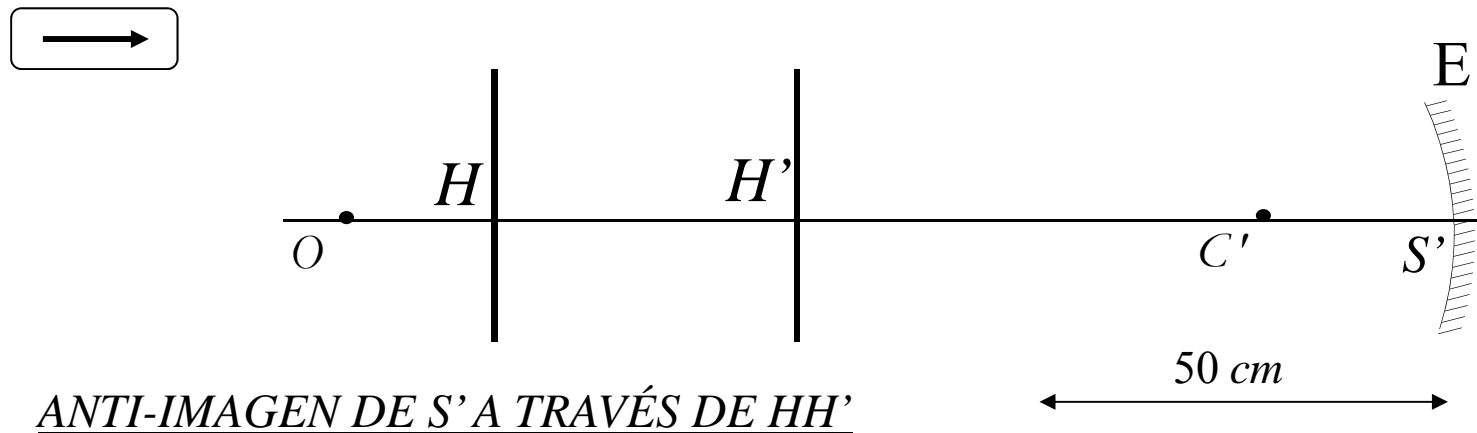
$$\overline{H_2'H'} = \frac{e}{t} f_2' = \frac{50\text{cm}}{63.3\text{cm}} (-33.3\text{cm}) = -26.3\text{cm}$$

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{t} = -\frac{20\text{cm} \cdot (-33.3\text{cm})}{63.3\text{cm}} = 10.5\text{cm}$$

Problemas

4.6. b) Si entre el espejo y la lente se intercala otra lente de $-3D$, a 50 cm de la primera, determínese la nueva posición de la imagen final.

Calculamos de nuevo el espejo equivalente a través de HH'



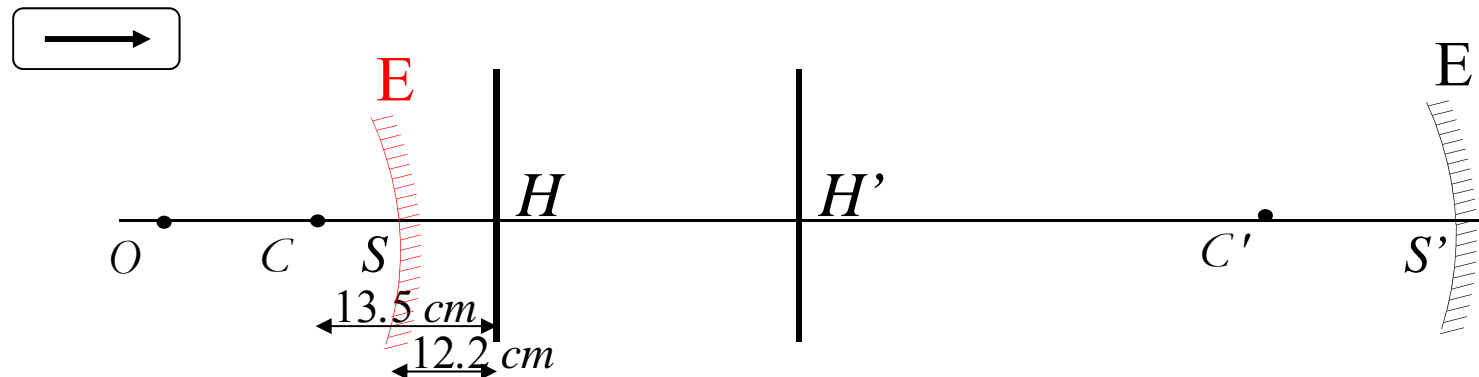
ANTI-IMAGEN DE S' A TRAVÉS DE HH'

$$-\frac{1}{a_S} + \frac{1}{a'_S} = \frac{1}{f'} \quad \left\{ \begin{array}{l} f' = 10.5\text{ cm} \\ a'_S = \overline{H'S'} = \overline{H'H'_2} + \overline{H'_2S'} \\ = 26.3\text{ cm} + 50\text{ cm} = 76.3\text{ cm} \end{array} \right. \quad \Rightarrow a_S = -12.2\text{ cm}$$

Problemas

4.6. b) Si entre el espejo y la lente se intercala otra lente de $-3D$, a 50 cm de la primera, determínese la nueva posición de la imagen final.

Calculamos de nuevo el espejo equivalente a través de HH'



ANTI-IMAGEN DE C' A TRAVÉS DE HH'

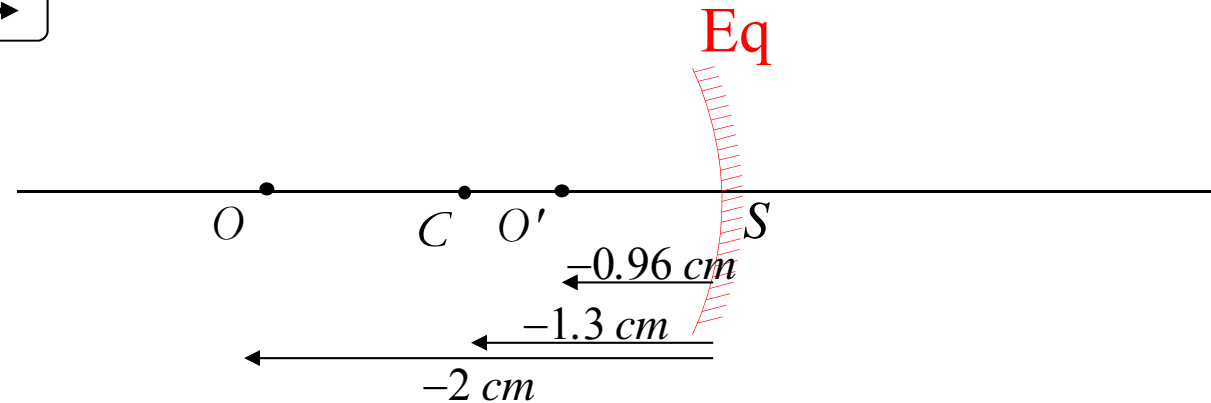
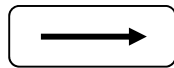
$$-\frac{1}{a_C} + \frac{1}{a'_C} = \frac{1}{f'} \quad \left\{ \begin{array}{l} f' = 10.5\text{ cm} \\ a'_C = \overline{H'C'} = \overline{H'H_2'} + \overline{H_2'S'} + \overline{S'C'} \end{array} \right. \quad a_C = -13.5\text{ cm}$$

$$= 26.3\text{ cm} + 50\text{ cm} - 28.6\text{ cm} = 47.7\text{ cm}$$

Problemas

4.6. b) Si entre el espejo y la lente se intercala otra lente de $-3D$, a 50 cm de la primera, determínese la nueva posición de la imagen final.

Hallamos la imagen de O a través del espejo equivalente



$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R_{eq}} \left\{ \begin{array}{l} R_{eq} = \overline{SC} = \overline{SH} + \overline{HC} \\ = 12.2\text{cm} - 13.5\text{cm} = -1.3\text{cm} \\ s = \overline{SO} = \overline{SH} + \overline{HH_1} + \overline{H_1O} \\ = 12.2\text{cm} + 15.8\text{cm} - 30\text{cm} = -2\text{cm} \end{array} \right.$$

$$s' = -0.96\text{ cm} = \overline{SO'}$$

$$\overline{OO'} = \overline{OS} + \overline{SO'} = 2\text{cm} - 0.96\text{cm} = +1.04\text{ cm}$$