E S T A D Í S T I C A $\Sigma\int_I$

PROBLEMAS TEMA 7

MODELOS PROBABILIDAD BIVARIANTES

Universitat de València OpenCourseWare

E
S
T
A
D
Í
S
T
I
C
A
$\Sigma\int_I$

PROBLEMA 1

Dada la siguiente v.a. bidimensional:

X \ Y	2	4	6
1	0,10	0,15	0,20
3	0,02	0,10	0,10
5	0,20	0,05	0,08

a) Obtened las distribuciones marginales y analizar si X e Y son o no estocásticamente independientes

b) Obtened F(y)

c) Calculad p(3; 2,5) y F(3; 2,5)

ESTADÍSTICA $\Sigma\int_I$

PROBLEMA 1

a) Obtened las distribuciones marginales y analizar si X e Y son o no estocásticamente independientes

X \ Y	2	4	6	$p_1(x)$
1	0,10	0,15	0,20	*0,45*
3	0,02	0,10	0,10	*0,22*
5	0,20	0,05	0,08	*0,33*
$p_2(y)$	*0,22*	*0,30*	*0,38*	***1,00***

$p_1(x)$ marginal de X

$p_2(x)$ marginal de Y

$p(x,y)$ distribución conjunta

X e Y son estocásticamente independientes si y solo si la distribución conjunta es producto de las marginales, es decir:

$$p(x,y) = p_1(x) \cdot p_2(y) \quad \forall (x,y)$$

Pero, en este caso no se cumple esa relación. Por ejemplo:

$$p(3,2) = 0{,}02 \neq p_1(3) \cdot p_2(2) = 0{,}22 \cdot 0{,}22 = 0{,}0484$$

Las variables X e Y <u>NO son estocásticamente independientes</u>

ESTADÍSTICA $\Sigma\int_I$

PROBLEMA 1

b) Obtened F(y), función de distribución marginal de Y

X \ Y	2	4	6	$p_1(x)$
1	0,10	0,15	0,20	*0,45*
3	0,02	0,10	0,10	*0,22*
5	0,20	0,05	0,08	*0,33*
$p_2(y)$	*0,22*	*0,30*	*0,38*	***1,00***
$F(y)$	*0,22*	*0,52*	*1,00*	

$$F(y) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 0{,}22 & 2 \leq x < 4 \\ 0{,}52 & 4 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$

ESTADÍSTICA $\Sigma\int_I$

PROBLEMA 1

c) Calculad p(3; 2,5) y F(3; 2,5)

X \ Y	**2**	4	6	$p_1(x)$
1	**0,10**	0,15	0,20	*0,45*
3	**0,02**	0,10	0,10	*0,22*
5	0,20	0,05	0,08	*0,33*
$p_2(y)$	*0,22*	*0,30*	*0,38*	***1,00***

$p(3; 2{,}5) = 0$ ya que y=2,5 no es un valor posible de Y
En cambio, $p(3; 2) = 0{,}02$

$$F(3; 2{,}5) = P(X \le 3; Y \le 2{,}5) = p(1; 2) + p(3; 2) = 0{,}10 + 0{,}02 = 0{,}12$$

E
S
T
A
D
Í
S
T
I
C
A
$\Sigma\int_I$

PROBLEMA 2

Con relación a cierta modalidad de préstamos sin garantía, con la siguiente tabla se asignan las probabilidades de las variables:
X_1 : cuantía del crédito concedido (en miles de euros) y
X_2 : plazo de devolución del crédito (en años):

X_2 \ X_1	0,5	1	1,5	2	2,5
1	0,05	0,05	0,02	0,02	
2	0,02	0,15	0,18	0,05	
3		0,08	0,08	0,12	0,02
4		0,04	0,02	0,04	0,06

a) Obtened la varianza de la variable "plazo de devolución del crédito.

b) Sea el suceso A = "créditos de más de mil euros" y el suceso B = " Crédito con menos de 3 años de amortización. Obtened: P(A/B) y P(B/A).

ESTADÍSTICA $\Sigma\int_I$

PROBLEMA 2

a) Obtened la varianza de la variable “plazo de devolución del crédito.

Varianza de la marginal X_2

X_2 \ X_1	0,5	1	1,5	2	2,5	$f(x_2)$	$x_2 \cdot f(x_2)$	$x_2^2 \cdot f(x_2)$
1	0,05	0,05	0,02	0,02		***0,14***	*0,14*	*0,14*
2	0,02	0,15	0,18	0,05		***0,40***	*0,80*	*1,60*
3		0,08	0,08	0,12	0,02	***0,30***	*0,90*	*2,70*
4		0,04	0,02	0,04	0,06	***0,16***	*0,64*	*2,56*
$f(x_1)$	***0,07***	***0,32***	***0,30***	***0,23***	***0,08***	***1,00***	***2,48***	***7,00***

4 4

El plazo medio de devolución del crédito es de 2,48 años con una desviación típica de 0,92 años.

$$Var(X_2^2) = E(X_2^2) - \left(E(X_2)\right)^2 = 7{,}00 - 2{,}48^2 = 0{,}8496$$

$$DT(X_2^2) = \sqrt{0{,}8496} = 0{,}92 \text{ años}$$

ESTADÍSTICA ΣʃI

b) Sea el suceso A = "créditos de más de mil euros" y el suceso B = " Crédito con menos de 3 años de amortización. Obtened: P(A/B) y P(B/A).

X_2 \ X_1	0,5	1	1,5	2	2,5	$f(x_2)$
1	0,05	0,05	0,02	0,02		*0,14*
2	0,02	0,15	0,18	0,05		*0,40*
3		0,08	0,08	0,12	0,02	*0,30*
4		0,04	0,02	0,04	0,06	*0,16*
$f(x_1)$	*0,07*	*0,32*	*0,30*	*0,23*	*0,08*	*1,00*

X_1 : cuantía del crédito concedido (en miles de euros) A
X_2 : plazo de devolución del crédito (en años) B

$$P(A/B) = P(X_1 > 1/X_2 < 3) = \frac{P(X_1 > 1 \;\; y \;\; X_2 < 3)}{P(X_2 < 3)} =$$

$$= \frac{0{,}02 + 0{,}02 + 0{,}18 + 0{,}05}{0{,}14 + 0{,}40} = \frac{0{,}27}{0{,}54} = 0{,}5$$

E S T A D Í S T I C A ΣʃI

CONTINUA b) Sea el suceso A = "créditos de más de mil euros" y el suceso B = " Crédito con menos de 3 años de amortización. Obtened: P(A/B) y P(B/A).

X_2 \ X_1	0,5	1	1,5	2	2,5	$f(x_2)$
1	0,05	0,05	0,02	0,02		*0,14*
2	0,02	0,15	0,18	0,05		*0,40*
3		0,08	0,08	0,12	0,02	*0,30*
4		0,04	0,02	0,04	0,06	*0,16*
$f(x_1)$	*0,07*	*0,32*	*0,30*	*0,23*	*0,08*	*1,00*

X_1 : cuantía del crédito concedido (en miles de euros) A
X_2 : plazo de devolución del crédito (en años) B

$$P(B/A) = P(X_2 < 3/X_1 > 1) = \frac{P(X_2 < 3 \;\; y \;\; X_1 > 1)}{P(X_1 > 1)} =$$

$$= \frac{0{,}02 + 0{,}02 + 0{,}18 + 0{,}05}{0{,}30 + 0{,}23 + 0{,}08} = \frac{0{,}27}{0{,}61} = 0{,}4426$$

ESTADÍSTICA $\Sigma\int_I$

PROBLEMA 4

Supóngase que la variable aleatoria X solo puede tomar los valores 1, 2 y 3 y la v.a. Y solo puede tomar los valores 1 y 2, entonces la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{18}xy & x = 1,2,3 \quad y = 1,2 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$$

es una función de probabilidad o cuantía conjunta para el vector aleatorio (X, Y).

Se comprobará que la distribución conjunta $f(x,y)$ se puede factorizar en producto de sus marginales $f_1(x)$ y $f_2(y)$ y, por tanto, las variables aleatorias X e Y son independientes.

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad \forall (x,y)$$

E S T A D Í S T I C A ΣʃI

PROBLEMA 4

La tabla de probabilidades de la distribución conjunta $f(x,y)$ y de sus marginales $f_1(x)$ y $f_2(y)$ queda:

$X \backslash Y$	**1**	**2**	$f_1(x)$
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$
2	$\frac{2}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{6}{18}=\frac{2}{6}$
3	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{9}{18}=\frac{3}{6}$
$f_2(y)$	$\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$	$\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$	*1*

Las marginales son

$$f_1(x)=\frac{1}{6}x$$

$$f_2(y)=\frac{1}{3}y$$

Y por tanto las variables son independientes

La conjunta $f(x,y)=\frac{1}{18}xy=\frac{1}{6}x\cdot\frac{1}{3}y=f_1(x)\cdot f_2(y)$