# TEMA 6

## TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE (TCL)
## Y DISTRIBUCIONES DERIVADAS DE LA NORMAL

Universitat de València
OpenCourseWare

## PREVIO AL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE.

***Propiedad de reproductividad de la distribución NORMAL*.**

Sean *"n"* v. a. $\boldsymbol{X_i}$ ~ ***NORMAL*** de parámetros $\left(\mu_i\, ,\, \sigma_i^2\right)$ (*i = 1,2,..., n*), **INDEPENDIENTES** y sean $\boldsymbol{b_1, b_2, \cdots, b_n}$ números reales, entonces: la v.a.

$$Y = \sum_{i=1}^{n} b_i X_i \sim \text{NORMAL de parámetros} \begin{pmatrix} \mu_Y = b_1\mu_1 + b_2\mu_2 + \ldots + b_n\mu_n \\ \sigma_Y^2 = b_1^2\sigma_1^2 + b_2^2\sigma_2^2 + \ldots + b_n^2\sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

(La combinación lineal de variables normales *independientes* es normal). (para cualquier valor de *"n"*).

***Caso particular*** Las *"n"* variables INDEPENDIENTES y tienen la misma distribución normal (muestro aleatorio de una población normal):

$$X_i \sim Normal(\mu, \sigma^2) \quad i = 1,2,\cdots,n$$

$$\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Normal(\mu_Y = n\mu;\ \sigma_Y^2 = n\sigma^2)$$

Es decir: la suma de normales independientes con la misma distribución tiene una distribución normal de parámetros $(\mu_Y = n\mu;\ \sigma_Y^2 = n\sigma^2)$ (para cualquier valor de *"n"*).

***Ejemplo 6.1*** Una empresa automovilística ha encargado un estudio sobre las emisiones de $CO_2$ de los últimos modelos de coches que ha sacado al mercado (modelo A y modelo B). Se ha estimado que las emisiones de $CO_2$ del modelo A (variable $\boldsymbol{X}$ en gr. por Km.) tiene una distribución NORMAL de media 182 y desviación típica 47, mientras que las emisiones de $CO_2$ del modelo B (variable $\boldsymbol{Y}$ en gr. por Km.) se distribuyen según una ley NORMAL de media 185 y desviación típica 20.

Suponiendo que las variables $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ son independientes:

***a)*** ¿Cuál de los dos vehículos tiene mayor probabilidad de emitir más de 200 gr. de $CO_2$ por Km?

***b)*** ¿Cuál es la probabilidad de que el modelo B emita más $CO_2$ por Km. que el modelo A?

***c)*** ¿Cuál es la probabilidad de que entre los dos (uno de A y otro de B) emitan entre 300 y 400 gr. de $CO_2$ por Km?

***d)*** Si se seleccionan aleatoriamente 2 coches del modelo A ¿cuál es la probabilidad de que emitan conjuntamente más de 380 gr. de $CO_2$ por Km?

***e)*** Calcúlese la misma probabilidad para 2 coches del modelo B.

***Solución: a) el A: 0,3520>0,2266 b) 0,5239 c) 0,6471 d) 0,4052 e) 0,3632***

*Solución:*

*Sean las v.a.* *X: emisiones de* $CO_2$ *del modelo A (gr.)* $X \sim Normal(\mu_X = 182; \sigma_X = 47)$

*Y: emisiones de* $CO_2$ *del modelo B (gr.)* $Y \sim Normal(\mu_Y = 185; \sigma_Y = 20)$

***b)*** *Elegimos aleatoriamente un coche del modelo A (X) y otro del B (Y).*

*Se pide:* $P[Y > X] \leftrightarrow P[(Y - X) > 0]$.

*Para poder determinar esta probabilidad necesitamos conocer la distribución de probabilidades de la variable Y – X.*

*Como X e Y son independientes y las dos tienen una distribución Normal, por la propiedad de reproductividad del modelo Normal, la v.a. (Y – X) tiene una distribución Normal exacta de parámetros:*

$$E(Y - X) = E(Y) - E(X) = 185 - 182 = 3$$
$$Var(Y - X) = Var(Y) + (-1)^2 Var(X) = 20^2 + 47^2 = 2609$$

*Entonces, la v.a.* $Z = \frac{(Y-X)-3}{\sqrt{2609}} \sim N(0; 1)$, *es decir, Z se distribuye como una Normal tipificada.*

*Así,* $P[(Y - X) > 0] = P\left[Z > \frac{0-3}{\sqrt{2609}}\right] = P[Z > -0{,}0587] = P[Z < 0{,}06] = F(0{,}06) = 0{,}5239$.

*Por tanto, la probabilidad de que un coche del modelo B emita más que uno del A es de 0,5239.*

***c)*** *Elegimos aleatoriamente un coche del modelo A (X) y otro del B (Y). Se pide:* $P[300 < (X+Y) < 400]$.

*Para poder determinar esta probabilidad necesitamos conocer la distribución de probabilidades de la variable X + Y.*

*Como X e Y son independientes y las dos tienen una distribución Normal, por la propiedad de reproductividad del modelo Normal, la v.a. (X + Y) tiene una distribución Normal exacta de parámetros:*

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 182 + 185 = 367$$
$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = 47^2 + 20^2 = 2609$$

*Por tanto la v.a.* $Z = \frac{(X+Y)-367}{\sqrt{2609}} \sim N(0;1)$*, es decir, Z se distribuye como una Normal tipificada.*

*Entonces* $P[300 < (X+Y) < 400] = P\left[\frac{300-367}{\sqrt{2609}} < Z < \frac{400-367}{\sqrt{2609}}\right] = P[-1{,}31 < Z < 0{,}65] =$
$= F(0{,}65) - \left(1 - F(1{,}31)\right) = 0{,}7422 - 0{,}0951 = 0{,}6471.$

*En conclusión, la probabilidad de que un coche del modelo A y otro del B emitan conjuntamente entre 300 y 400 gramos de* $CO_2$ *es de 0,6471.*

***d)*** *Se seleccionan al azar dos coches del modelo A.*

*Las v.a.* $X_1$: *emisiones del primer coche A i* $X_2$: *emisiones del segundo cohe A representan todas las muestras aleatorias de n=2 coches que se podrían elegir.*

$X_1 \sim Normal(182; 47)$ *y* $X_2 \sim Normal(182; 47)$ *y se puede aceptar que las emisiones del primer coche son independientes de las emisiones del segundo coche. Por tanto, por la propiedad de reproductivitat del modelo del modelo Normal, la variable suma* $(X_1 + X_2)$, *que mide las emisiones de* $CO_2$ *de dos coches A conjuntamente, también se distribuye como una Normal de parámetros:*

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 2E(X) = 2 \cdot 182 = 364$$
$$Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) = 2Var(X) = 2 \cdot 47^2 = 4418$$

*Por tanto la v.a.* $Z = \frac{(X_1+X_2)-364}{\sqrt{4418}} \sim N(0;1)$, *es decir, Z se distribuye como una Normal tipificada.*
*Así,* $P[(X_1 + X_2) > 380] = P\left[Z > \frac{380-364}{\sqrt{4418}}\right] = P[Z > 0{,}24] = 1 - F(0{,}24) = 0{,}4052.$

*En conclusión, la probabilidad de que una pareja de coches del modelo A emitan conjuntamente más de 380 gramos de* $CO_2$ *es de 0,4052.*

## ***Aplicación de la propiedad de reproductividad del modelo normal.***

En una *población NORMAL* de media $\mu$ y varianza $\sigma^2$ se toma una muestra aleatoria de tamaño $\boldsymbol{n}$: $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \ldots, \boldsymbol{x}_n$.

Entonces si se consideran todas las posibles muestras aleatorias de tamaño $\boldsymbol{n}$ que se pueden tomar de dicha población, las $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n$ son variables aleatorias independientes y cada $X_i \sim Normal(\mu, \sigma^2) \quad i = 1,2,\cdots,n$

En este contexto, tomando $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{b}_2 = \cdots = \boldsymbol{b}_n = \dfrac{1}{\boldsymbol{n}}$, la combinación lineal de las $\boldsymbol{X}_i$ es la variable aleatoria media muestral: $\boldsymbol{\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}}$

$$E(\bar{X}_n) = \mu \qquad Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \qquad DT(\bar{X}_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

(La media muestral tiene el mismo valor esperado que cualquier $\boldsymbol{X}_i$, mientras que su varianza es menor)

Aplicando la propiedad de reproductividad:

$$\bar{X}_n \sim Normal\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

(es una distribución exacta para cualquier valor de *"n"*).

***Ejemplo 6.2*** Se considera el coche modelo A del ejemplo 6.1. cuyas emisiones de $CO_2$ se distribuyen como una NORMAL de media 182 y desviación típica 47.
Si se toman muestras aleatorias de tamaño $\boldsymbol{n} = 10$, cuál es la probabilidad de que la media de las emisiones de $CO_2$ de 10 coches esté entre 179 y 185 gr. por Km. $\left(X \in (179; 185)\right)$.

***Solución: 0,1586***

*Solución:*

*Sean las v.a.* $X_i$: *emisiones del* $i-$*ésimo coche A* ; $X_i \sim Normal(182; 47)$ *con* $i = 1,2,\cdots,10$

*Para poder calcular la probabilidad pedida se utiliza la propiedad de reproductividad del modelo normal por la que la media muestral tiene una distribución Normal de media* $\mu$ *y desviació típica* $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, *es decir:*

$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X_i}}{\boldsymbol{n}} \sim Normal\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

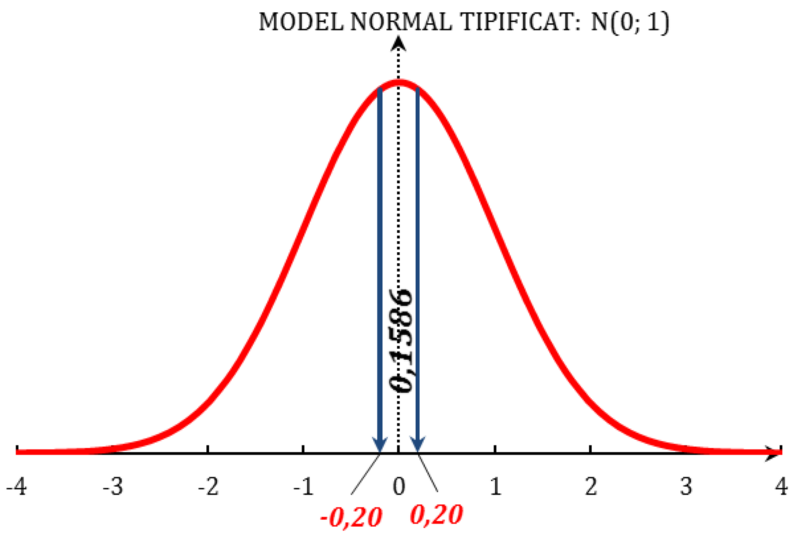
*En nuestro caso* $E(\bar{X}_n) = \mu = 182$ *y* $Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{47^2}{10} = 220{,}9$ *o* $DT(\bar{X}_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{47}{\sqrt{10}} = 14{,}86$

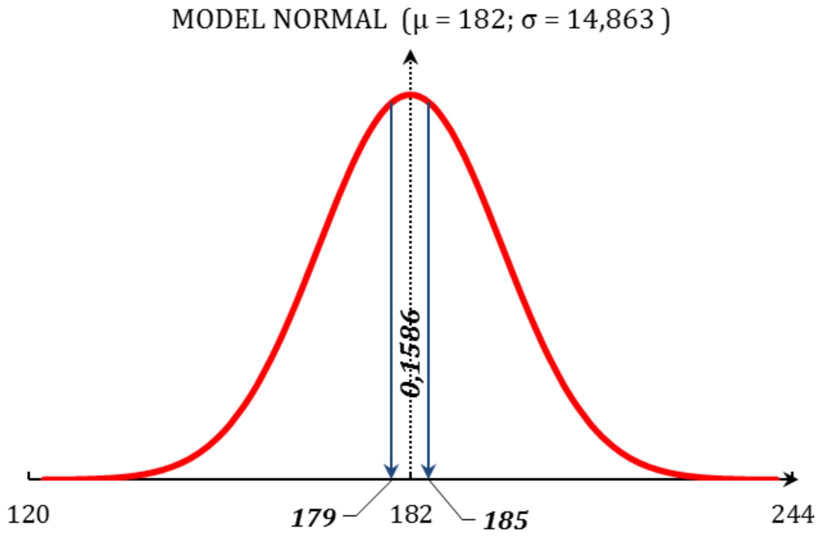
*Así,* $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{10} \boldsymbol{X_i}}{\boldsymbol{10}} \sim Normal\left(\mu = 182,\ \frac{47}{\sqrt{10}}\right)$

*Por tanto la v.a.* $Z = \frac{\bar{X}_n - 182}{\frac{47}{\sqrt{10}}} \sim N(0; 1)$, *es decir, Z se distribuye como una Normal tipificada.*

$$Entonces,\ P[179 < \bar{X}_n < 185] = P\left[\frac{179-182}{\frac{47}{\sqrt{10}}} < Z < \frac{185-182}{\frac{47}{\sqrt{10}}}\right] = P[-0{,}202 < Z < 0{,}202] =$$

$$= F(0{,}20) - \left(1 - F(0{,}20)\right) = 2F(0{,}20) - 1 = 2 \cdot 0{,}5793 - 1 = 0{,}1586$$



**TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE (TCL)**
(Lindeberg y Lévi 1920-1930)

Si $X_1,\dots,X_n$ son ***"n"*** variables aleatorias INDEPENDIENTES e IDÉNTICAMENTE DISTRIBUIDAS *(iid)* (PARA ***n GRANDE***) de media $\mu$ y varianza $\sigma^2 \neq 0$ para todas ellas, entonces:

La variable aleatoria suma $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ tendrá *APROXIMADAMENTE* una distribución ***NORMAL*** de media $E(Y) = n\mu$ y varianza $Var(Y) = n\sigma^2$.

$$\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Normal(\mu_Y = n\mu,\ \sigma_Y^2 = n\sigma^2)$$

Es decir: $\rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim Normal(0,1)$

***Ejemplo 6.3*** Supóngase que las emisiones de $CO_2$ (en gr. por Km.) del coche modelo A del ejemplo 6.1. tiene una distribución (no sabemos el tipo) de media 182 y desviación típica 47.

***a)*** ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que 100 coches de ese modelo emitan más de 17.965 gr. de $CO_2$ por Km? (Se supondrá independencia en las emisiones de $CO_2$ de cada coche).

***b)*** Y si se seleccionan aleatoriamente 2 coches del modelo A ¿cuál es la probabilidad de que emitan conjuntamente más de 380 gr. de $CO_2$ por Km?
*(Nótese que es la misma cuestión que el apartado d) del ejemplo 6.1, pero en este caso no sabemos si la distribución de las emisiones de $CO_2$ es normal)*.

***c)*** Qué cantidad de $CO_2$ emitirán 100 coches con una garantía del 95%. *(=por encima de qué cantidad de $CO_2$ emitirán el 95% de las muestras de 100 coches de ese modelo)*

***Solución: a) 0,6915 b)…c) 17.426,85***

*Solución:*

*Sea la v.a. X: emisiones de $CO_2$ del modelo A (gr.) Ahora X tiene una distribución desconocida:*

$$X \sim \mathcal{D}(182; 47)$$

***a)*** *Para poder calcular la probabilidad pedida, definimos 100 variables aleatorias $X_i \;\; i = 1, 2, \cdots, 100$ que miden, cada una de ellas, las emisiones del coche i – ésimo de la selección.*

*Se puede admitir la independencia en las emisiones de cada coche y de esta manera tenemos las condiciones para poder aplicar el TCL:*

*Un número grande de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas: $X_i \sim \mathcal{D}(182; 47)$*

*Así, por el TCL, la v.a. suma $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$, que mide las emisiones de $CO_2$ de 100 coches tipo A, tendrá una distribución <u>aproximadamente Normal</u> de parámetros:*

*$Y = \sum_{i=1}^{100} X_i \simeq Normal(\mu_Y = 100\mu,\; \sigma_Y^2 = 100\sigma^2)$, es a dir:*

$$E(Y) = 100 \cdot E(X) = 100 \cdot 182 = 18.200$$
$$Var(Y) = 100 \cdot Var(X) = 100 \cdot 47^2 = 220.900$$

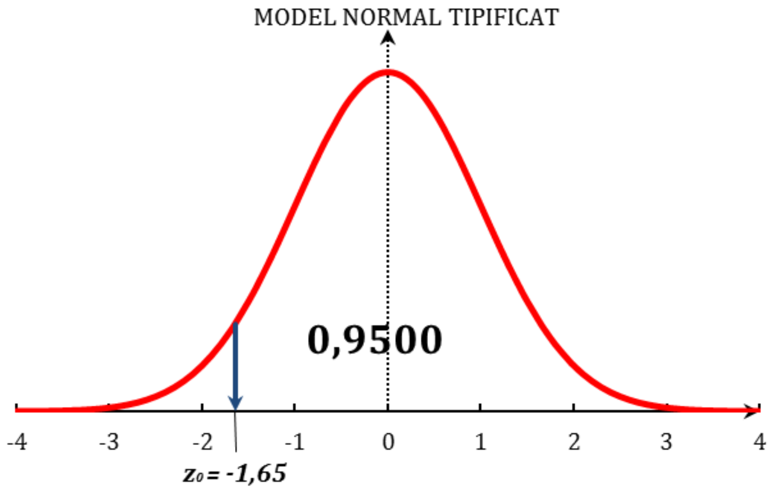
*Por tanto la v.a. $Z = \frac{Y - 18.200}{\sqrt{220.900}} \sim N(0; 1)$, es decir, Z se distribuye como una Normal tipificada.*

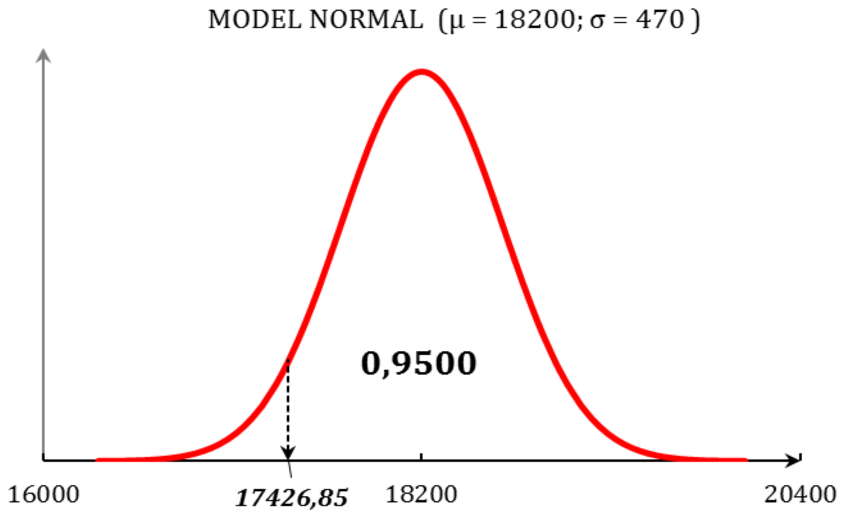
*Así, $P[Y > 17.965] = P\left[Z > \frac{17.965 - 18.200}{\sqrt{220.900}}\right] = P[Z > -0{,}50] = F(0{,}50) = 0{,}6915$.*

***c)*** *Teniendo en cuenta que* $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i \simeq Normal(\mu_Y = 18.200,\ \sigma_Y^2 = 220.900)$*, se ha de calcular un valor* $y_0$ *tal que* $P[Y > y_0] = 0{,}95$*, lo cual, tipificando, es equivalente a:*

$$P\left[Z > \frac{y_0 - 18.200}{\sqrt{220.900}}\right] = 0{,}95 \Leftrightarrow \frac{y_0 - 18.200}{470} = -1{,}645$$

*Por tanto* $y_0 = 18.200 - 1{,}645 \cdot 470 = 17.426{,}85\ gr.\, de\ CO2.$



## ***Consecuencia del TCL***

Si $X_1, \ldots, X_n$ son *"n"* variables aleatorias INDEPENDIENTES y con la MISMA DISTRIBUCIÓN *(iid)* (PARA ***n GRANDE***) de media $\mu$ y varianza $\sigma^2$ para todas ellas, entonces:

La variable aleatoria MEDIA MUESTRAL $\boldsymbol{\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}}$ tiene *APROXIMADAMENTE* una distribución ***NORMAL:***

$$\bar{X}_n \sim Normal\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

(En este contexto, es una distribución aproximada)

Es decir:

$$\rightarrow \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim Normal(0,1)$$

***Ejemplo 6.4*** Siguiendo con las emisiones de $CO_2$ de los coches modelo A del ejemplo anterior que tienen una distribución (no sabemos el tipo) de media 182 y desviación típica 47:

***a)*** ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que la media de las emisiones de $CO_2$ de 100 coches de este modelo sea *superior a 177 e inferior a 187* gr. por Km?
***b)*** ¿Y de 200 coches?

***Solución: a) 0,7168 b) 0,8664***

*Solución:*
*a) Como en el ejemplo 6.3 tenemos un número grande de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas:* $X_i \sim \mathcal{D}(182; 47)$ *que modelan las emisiones de $CO_2$ de cada coche de las muestras de tamaño n = 100. Para poder calcular la probabilidad pedida utilizamos el TCL que demuestra que la media muestral tiene aproximadamente una distribución Normal de media μ y desviació típica* $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, es decir:*

$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \sim Normal\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

*En nuestro caso* $E(\bar{X}_n) = \mu = 182$ *y* $Var(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{47^2}{100} = 22{,}09$ *o* $DT(\bar{X}_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{47}{\sqrt{100}} = 4{,}7$

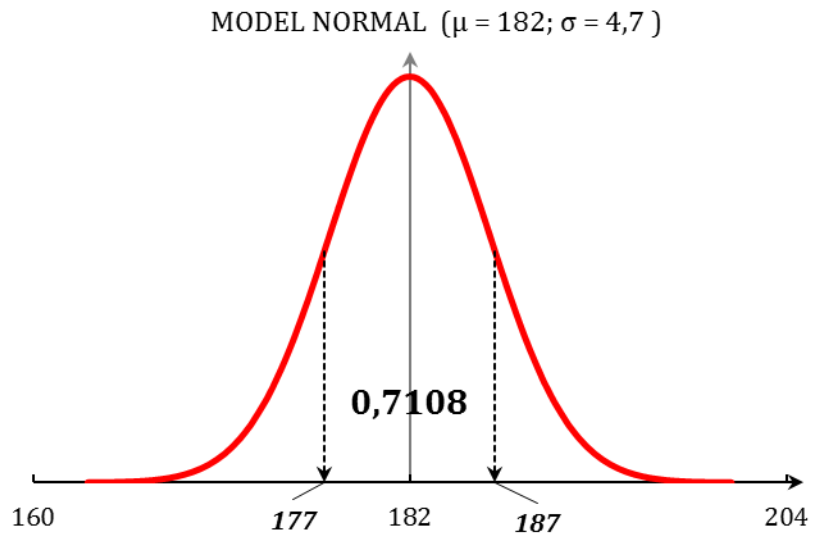
*Por tanto la v.a.* $Z = \frac{\bar{X}_n - 182}{4{,}7} \sim N(0; 1)$*, es decir, Z se distribuye como una Normal tipificada.*

*Entonces,* $P[177 < \bar{X}_n < 187] = P\left[\frac{177-182}{4{,}7} < Z < \frac{187-182}{4{,}7}\right] = P[-1{,}06 < Z < 1{,}06] =$

$$= F(1{,}06) - \left(1 - F(1{,}06)\right) = 0{,}8554 - 0{,}1446 = 0{,}7108$$

*Por tanto, la probabilidad de que la media de las emisiones de $CO_2$ de 100 coches tipo A esté entre 177 i 187 gr. por Km es de 0,7108.*

*Es decir, el 71,08% de muestras de 100 coches emitirán entre esas cantidades de $CO_2$.*



## Distribuciones derivadas de la normal.

### DISTRIBUCIÓN $\chi^2$ (ji-cuadrado o chi-cuadrado) de Pearson.

*Definición 1*: sea una v. a. $Z \sim N(0,1)$ (normal tipificada). Entonces la distribución de probabilidad de la v.a. $Z^2$ se llama $\chi^2$ (ji-cuadrado).

$$Z^2 \sim \chi_1^2$$

$Z^2$ tiene una distribución ji-cuadrado o chi-cuadrado con 1 grado de libertad.

*Definición 2:* si se tienen ***"n"*** variables aleatorias INDEPENDIENTES $Z_i \sim N(0,1)$ $i = 1, \cdots, n$ normales tipificadas, entonces:

$$X = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi_n^2$$

La suma de los cuadrados de normales tipificadas tienen una distribución ji-cuadrado con ***"n"*** grados de libertad.

*Parámetro de la distribución:* ***"n",*** recibe el nombre de *grados de libertad.*

***<u>Ejemplo de grados de libertad</u>:***

Supóngase que se toma una muestra aleatoria de tamaño ***n = 5*** de una población:

$x_1 = 5 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 9 \quad x_5 = 7$. Se ha tomado una muestra con "***n = 5*** grados de libertad" pues no hay ningún tipo de restricción a la hora de tomas los 5 datos.

Supóngase que se pretende tomar otra muestra del mismo tamaño pero imponiendo la restricción de que la media muestral sea $\bar{X}_{n=5} = 6$. Se podrán elegir libremente 4 valores y el quinto estará condicionado por la restricción.

Se tendrán 4 grados de libertad: se seleccionan muestras de tamaño ***n = 5*** con ***(n – 1) = 4*** grados de libertad.

Así si la selección de los 4 primeros valores ha sido:

$x_1 = 6 \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 9 \quad x_4 = 8 \Rightarrow$ necesariamente $x_5 = 3$ para que la media muestral sea 6.

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{5}(6+4+9+8+3) = 6$$

En general: si los valores muestrales han de satisfacer k relaciones lineales independientes, sólo podrán seleccionarse con libertad ***n – k*** valores y habrá ***(n – k)*** grados de libertad.

***Propiedades de la ji-cuadrado:***

- Es una distribución continua con valores positivos (***0 < x <∞***). La forma depende de los grados de libertad. No es una distribución simétrica, pero conforme aumentan los grados de libertad tiende a ser simétrica.
- $E(X)=n \qquad Var(X)=2n$
- Reproductividad: si las v.a. $X_1,\ldots,X_k$ son independientes y tienen cada una de ellas una distribución $\chi^2_{n_i}$ con $n_i$ grados de libertad: $\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} X_i \sim \chi^2_n$

siendo $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ grados de libertad.

*Aplicación*: distribución en el muestreo de la varianza muestral.

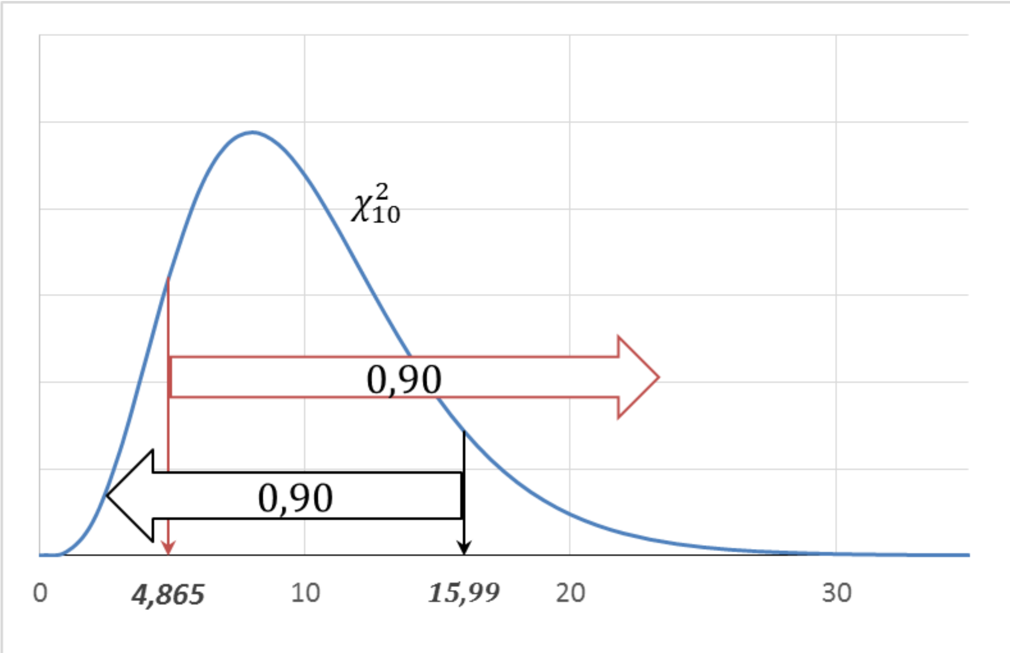
***Uso de la tabla de la distribución ji-cuadrado:***

***Ejemplo 6.5*** Si $X \sim \chi^2_{10}$ determínese $x$ tal que $P(X \leq x) = 0{,}90$. *(x = 15.99)*

***Ejemplo 6.6*** Si $X \sim \chi^2_{10}$ determínese $x$ tal que $P(X > x) = 0{,}90$. *(x = 4,865)*

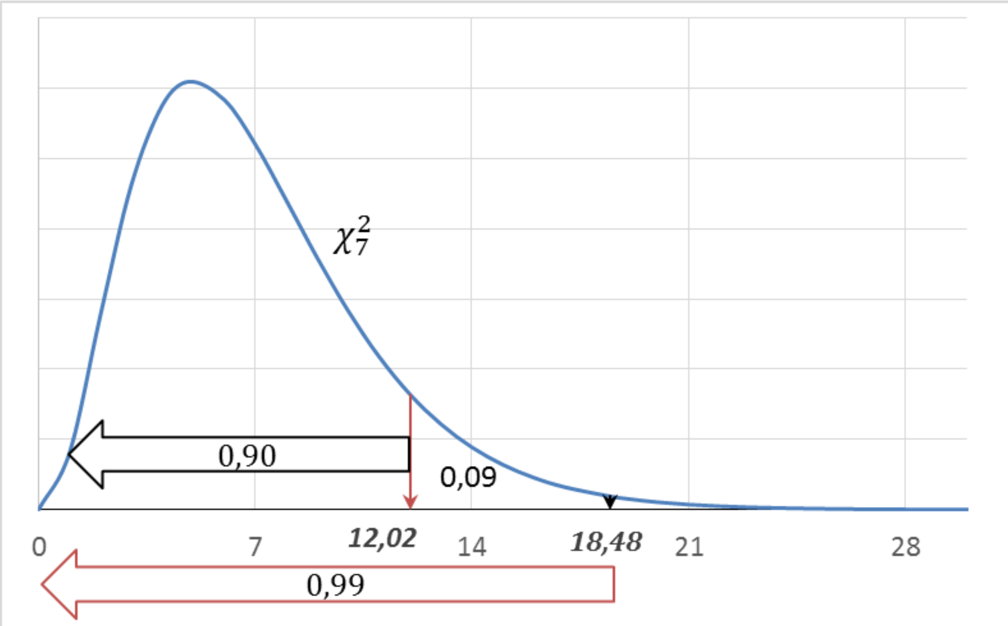
*Solución: observando las tablas de la ji – cuadrado con 10 grados de libertad, se tiene:*

$$P(X > x) = 0{,}90 \leftrightarrow P(X \leq x) = 0{,}10 \leftrightarrow F(x) = 0{,}10 \leftrightarrow x = 4{,}895$$



***Ejemplo 6.7*** Si $X \sim \chi^2_{12}$ determínese $P(\ X \le 5{,}226\ )$. (0,05)

***Ejemplo 6.8*** Si $X \sim \chi^2_7$ determínese $P(12{,}02 \le X \le 18{,}48\ )$.




*Solución:*

*Observando las tablas de una* $\chi^2_7$

$$P(12{,}02 \le \chi^2_7 \le 18{,}48\ ) =$$
$$= F(18{,}48) - F(12{,}02) =$$
$$= 0{,}99 - 0{,}90 = 0{,}09$$

***Ejemplo 6.9*** Si $X_1 \sim \chi^2_{10}$ y $X_2 \sim \chi^2_{12}$, siendo las variables independientes, ¿Cómo se distribuye la variable $X = X_1 + X_2$? (como una $\chi^2_{22}$)

EXCEL: =PRUEBA.CHI.INV(***p;n***) devuelve el valor ***x*** tal que ***p = P(X ≥ x)***

## DISTRIBUCIÓN t de Student. (W. S. Gosset 1908)

*<u>Definición:</u>* La distribución t de Student se construye como cociente entre una normal tipificada y la raíz cuadrada de una distribución ji-cuadrado con n grados de libertad (independientes).

Es decir: si $Z \sim N(0,1)$ y $Y \sim \chi_n^2$, siendo ***Z e Y*** independientes, la distribución de la v.a.

$$X = \frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{n}Y}}$$

se denomina ***t de Student*** con ***"n"*** grados de libertad.

Notación: $X \sim t_n$ y también $t \sim t_n$

*<u>Parámetro de la distribución: **"n",**</u>* recibe el nombre de *grados de libertad.*

***Propiedades de la t de Student:***

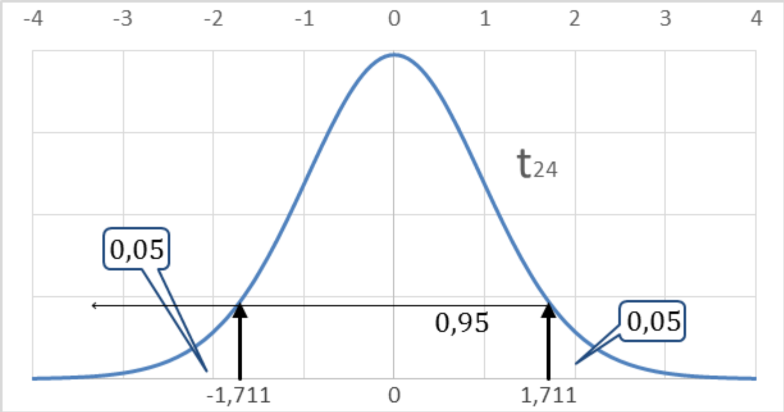
- Es continua y toma valores en toda la recta real (**-∞ < *x* < ∞**)
- $E(X)=0 \qquad Var(X)=\dfrac{n}{n-2}$
- Es simétrica.
- Para un número alto de grados de libertad ***n,*** la $t_n$ se aproxima a la normal tipificada: $t_n \xrightarrow{n\to\infty} N(0,1)$. Para valores $n>30$ se aproximará por la normal tipificada.

*Aplicación*: distribución en el muestreo de la media muestral de una distribución normal de varianza desconocida.

***<u>Uso de la tabla de la distribución t de Student:</u>***

***Ejemplo 6.10*** Si $X \sim t_{24}$, determínese el valor $X_0$ tal que $P(X > x_0) = 0{,}05$. $(x_0 = 1{,}711)$

***Ejemplo 6.11*** Si $X \sim t_{24}$, determínese el valor $X_0$ tal que $P(X \leq x_0) = 0{,}05$. $(x_0 = -1{,}711)$




*Solución:*

$P(X \leq x_0) = 0{,}05 \leftrightarrow x_0 < 0$ *entonces,*

$$P(X \leq x_0) = 0{,}05 \leftrightarrow P(X \leq -x_0) = 0{,}95 \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow F(-x_0) = 0{,}95 \leftrightarrow -x_0 = 1{,}711 \leftrightarrow x_0 = -1{,}711$$

***Ejemplo 6.12*** Si $t \sim t_{15}$, determínese el valor $t_0$ tal que $P(|t| > t_0) = 0{,}05$ .

EXCEL: =DISTR.T.INV(***2p;n***) devuelve el valor ***x*** tal que ***p = P(X ≥ x)***

(2p para que la probabilidad asociada sea de una cola)