TEMA 4

Variable aleatoria y distribución de probabilidad univariante

EJEMPLOS

VNIVERSITAT DE VALÈNCIA
OpenCourseWare

1. Variable aleatoria y distribución de probabilidad.Concepto.

EJEMPLO INTRODUCTORIO

Experimento aleatorio: tirar una moneda tres veces.

Posibles resultados:

Sucesos simples	**CCC**	**CCX**	**CXC**	**XCC**	**CXX**	**XCX**	**XXC**	**XXX**

En este tema nos vamos a centrar en medir algunos resultados ***numéricos*** del experimento como el **<u>número total de caras obtenidas en cada secuencia</u>**, o el **número de cruces obtenidas antes de la primera cara**. Por ejemplo, podríamos conseguir la secuencia (suceso simple) XCC, que representa una cruz seguida de dos caras. El número total de caras obtenido sería de 2, y el número de cruces antes de la primera cara sería de 1.

Vamos a fijarnos en el primer resultado: ***contar el número de caras***. Si ***X*** denota el número de caras, entonces ***X*** tiene cuatro valores posibles (0, 1, 2, y 3) y cada uno de estos valores corresponde a un suceso (subconjunto del espacio muestral) de la forma siguiente:

- X = 0, (ninguna cara), es el suceso {XXX}, cuya probabilidad es 1/8;
- X = 1 (una cara), es el suceso {CXX XCX XXC}, cuya probabilidad es 3/8;
- X = 2 es el suceso {CCX CXC XCC}, cuya probabilidad es 3/8.
- X = 3 es el suceso {CCC}, cuya probabilidad es 1/8.

Más concretamente:
$$\begin{cases} P(X=0)=P\{XXX\}=\dfrac{1}{8} \\ P(X=1)=P\{CXX,XCX,XXC\}=\dfrac{3}{8} \\ P(X=2)=P\{CCX,CXC,XCC\}=\dfrac{3}{8} \\ P(X=3)=P\{CCC\}=\dfrac{1}{8} \end{cases}$$

Hay otros sucesos que podemos describir en términos de X, por ejemplo:

$$P(X \leq 2) = P\,\{CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX\} = \frac{7}{8}.$$

X es una **VARIABLE ALEATORIA:** una variable *aleatoria* es una función del espacio muestral **Ω** en el conjunto de los números reales. El valor que pueda tomar depende del *azar*.

Espacio muestral Ω	CCC	CCX	CXC	XCC	CXX	XCX	XXC	XXX
probabilidad	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Variable aleatoria

número de caras

X	3	2	2	2	1	1	1	0

Es decir, $\boldsymbol{X}$ es la función definida por esta tabla, su dominio es el espacio muestra $\boldsymbol{\Omega}$, y su rango es el conjunto {0, 1, 2, 3} de valores posibles, definido por la tabla anterior.

$\boldsymbol{X}$ (CXC) = 2, $\boldsymbol{X}$ (CXX) = 1...

A partir de la v.a. X podemos definir ***sucesos numéricos*** en general como:

el suceso *"$X = 2$"* es el conjunto {CCX, CXC, XCC}

el suceso *"$X \leq 1$"* es el conjunto {CXX, XCX, XXC, XXX}

Podemos ordenar la variable aleatoria en una tabla con sus posibles valores y las probabilidades de cada valor. La tabla es la siguiente:

x	$P(X = x)$
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$

Esto sería la DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD de la variable aleatoria X: sus valores con las probabilidades que tomaría cada valor.

A partir de la Distribución de Probabilidad podemos determinar por ejemplo:

$P(X \leq 2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$; y lo hacemos más rápido que a partir del listado de los siete elementos (sucesos simples) del suceso "$X \leq 2$".

Ejemplo 4.1 Consideremos la variable aleatoria del ejemplo introductorio X: número de caras obtenido al lanzar una moneda tres veces, y su distribución de probabilidades, Comprueba que la distribución de probabilidades la podemos expresar a partir de la siguiente función:

x	$P(X=x)$
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$

$$f(x)=\begin{cases}\binom{3}{x}\dfrac{1}{2^3} & x=0,1,2,3\\ 0 & otro\quad caso\end{cases}$$

, función de probabilidad o cuantía, de tal forma que $\boldsymbol{P(X=x)=f(x)}$

Donde $\binom{3}{x}=\frac{3!}{x!(3-x)!}$

Por ejemplo: $P(X=2)=f(2)=\binom{3}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{3!}{2!(3-2)!}\cdot\frac{1}{8}=\frac{3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot1}\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

Ejemplo 4.2 MODELO DISCRETO. Sea X una variable aleatoria discreta (v.a.) con la siguiente *función de probabilidad o cuantía* asignada:

$$f(x)=\begin{cases} cx & para\ x=0\ 1\ 2\ 3\ 4 \\ 0 & otro\quad caso \end{cases}$$

X puede representar el tiempo de estacionamiento en un garaje público (horas enteras).

a. Calcula ***c*** para que *f(x)* sea una función de probabilidad.

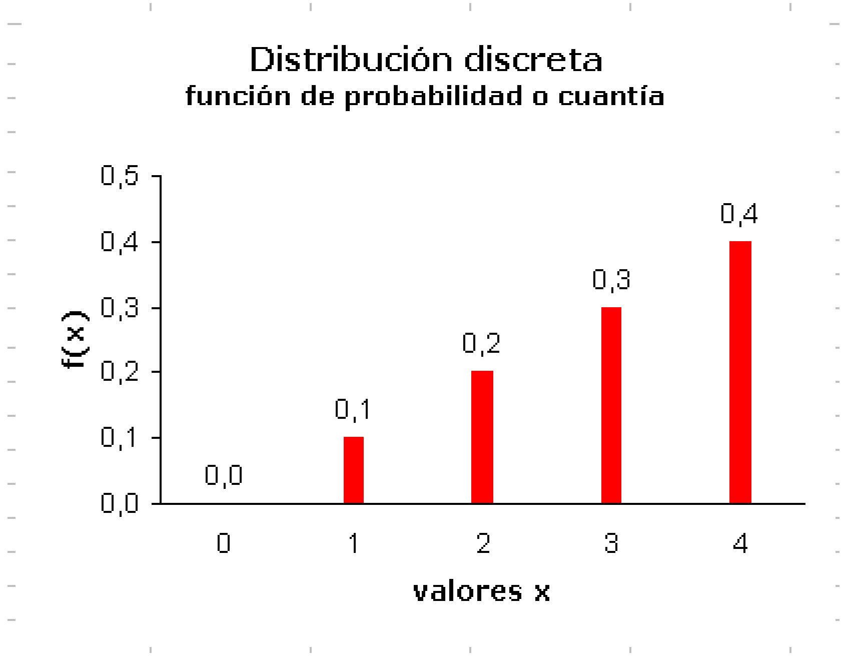
b. Calcula las probabilidades:

$$P(1 < X \leq 3), \quad P(X \leq 3), \quad P(X < 3), \quad P(X > 3)$$

Solución: a) c = 0,1 b) 0,5; 0,6; 0,3; 0,4.

Solución:

$$f(x) = \frac{1}{10}x \qquad x = 1, 2, 3, 4$$



x	$P(X = x)$
1	1/10
2	2/10
3	3/10
4	4/10
total	*1*

a) CÁLCULO DE “c”

$$\sum_{x=0}^{4} f(x) = \sum_{x=0}^{4} cx = c + 2c + 3c + 4c = 10c = 1 \rightarrow c = \frac{1}{10}$$

b) $P(1 < X \leq 3) = f(2) + f(3) = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{5}{10} = 0{,}5$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \frac{6}{10} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

Ejemplo 4.3 MODELO CONTINUO. Sea X una v.a. con la siguiente *función de densidad de probabilidad* (f.d.p.):

$$f(x) = \begin{cases} cx & 0 < x < 4 \\ 0 & otro\,caso \end{cases}$$

X puede representar el tiempo de estacionamiento en un garaje público (horas continuas).

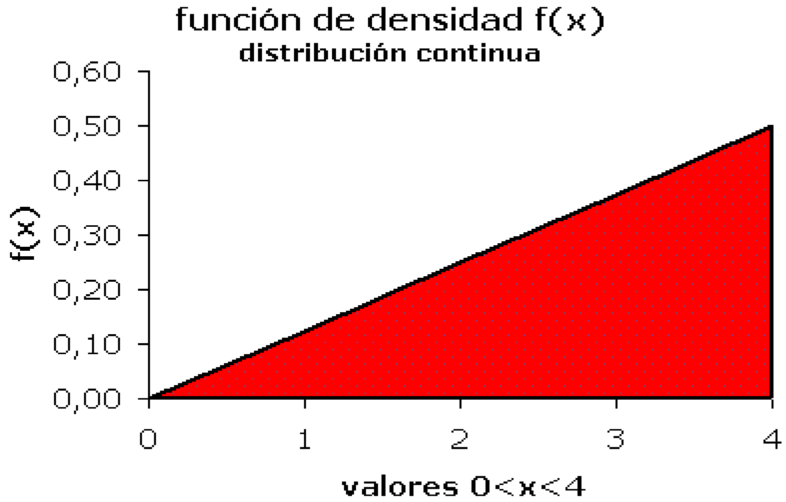
a. Calcula c para que *f(x)* sea una f.d.p.

b. Calcula las probabilidades:

$$P(1 \le X \le 2), \qquad P(X > 2) \qquad P(2{,}5 \le X < 3{,}5)$$

Solución: a) c = 1/8 b) 3/16 0,75 3/8.

Solución:



a) CÁLCULO DE "c"

$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^4 cxdx = c\frac{x^2}{2}\Big]_0^4 = \frac{16c}{2} = 1 \rightarrow c = \frac{1}{8}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{1}{8}x \qquad 0 < x < 4$$

b) $P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 \frac{1}{8}x\,dx = \frac{1}{8}\frac{x^2}{2}\Big]_1^2 = \frac{4}{16} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$

Ejemplo 4.4 FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN modelo discreto. Sea X la variable aleatoria discreta (v.a.) del **ejemplo 4.2** con la siguiente función de probabilidad o cuantía asignada:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x & para \;\; x = 0\ 1\ 2\ 3\ 4 \\ 0 & otro \;\; caso \end{cases}$$

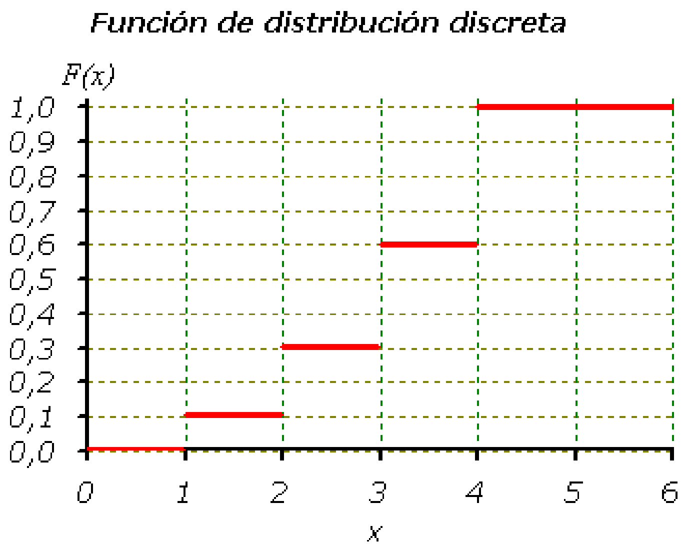
X puede representar el tiempo de estacionamiento en un garaje público (horas enteras).

Obténgase la función de distribución *F(x)*.

Solución:

x	*f(x) = P(X = x)*	*F(x)=P(X ≤ x)*
1	0,1	0,1
2	0,2	0,1+0,2=0,3
3	0,3	0,1+0,2+0,3=0,6
4	0,4	0,1+0,2+0,3+0,4=1

Gráficamente: en un modelo discreto la función de distribución *F(x)* es una función escalonada continua solo por la derecha.



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0{,}1 & 1 \leq x < 2 \\ 0{,}3 & 2 \leq x < 3 \\ 0{,}6 & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

función de distribución

Ejemplo 4.5 FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN modelo continuo. Sea X la v.a. del **ejemplo 4.3** con la siguiente función de densidad de probabilidad (f.d.p.):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & 0 < x < 4 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

X puede representar el tiempo de estacionamiento en un garaje público (horas continuas).

a. Determínese la Función de distribución *F(x)*.

b. A partir de la función de distribución calcula las probabilidades:

$$P(1 \le X \le 2), \qquad P(X > 2) \qquad P(2{,}5 \le X < 3{,}5)$$

Solución: $f(x) = \frac{1}{8}x \quad 0 < x < 4$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{16} & 0 < x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

función de distribución

a)

$x \leq 0 \rightarrow F(x) = 0$

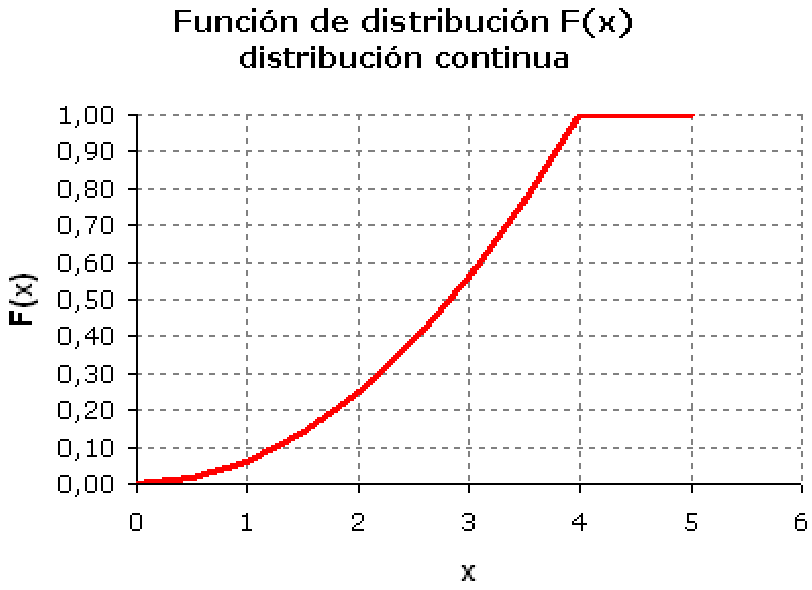
$$0 < x < 4 \rightarrow F(x) = \int_0^x \frac{1}{8} t\, dt = \frac{1}{8}\frac{t^2}{2}\bigg]_0^x = \frac{x^2}{16}$$

$$x \geq 4 \rightarrow F(x) = F(4) = \frac{4^2}{16} = 1$$

b) $P(1 \leq X \leq 2) =$ *(por continuidad) =*

$= P(1 < X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) =$

$$= F(2) - F(1) = \frac{2^2}{16} - \frac{1^2}{16} = \frac{3}{16}$$



En los modelos continuos la función de distribución *F(x)* es continua por derecha e izquierda.

CÁLCULO DE PROBABILIDADES CON UNA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN *F(x)*

	***X* con distribución discreta**	***X* con distribución continua**
$P(X = a)$	$F(a) - F(a^-)$	$F(a) - F(a) = 0$
$P(X \le b)$	$F(b)$	$F(b)$
$P(X < b)$	$F(b^-)$	$F(b)$
$P(X \ge a)$	$1 - P(X < a) = 1 - F(a^-)$	$1 - F(a)$
$PX > a)$	$1 - P(X \le a) = 1 - F(a)$	$1 - F(a)$
$P(a < X \le b)$	$P(X \le b) - P(X \le a) = F(b) - F(a)$	$F(b) - F(a)$
$P(a \le X \le b)$	$P(X \le b) - P(X < a) = F(b) - F(a^-)$	$F(b) - F(a)$
$P(a < X < b)$	$P(X < b) - P(X \le a) = F(b^-) - F(a)$	$F(b) - F(a)$
$P(a \le X < b)$	$P(X < b) - P(X < a) = F(b^-) - F(a^-)$	$F(b) - F(a)$

$F(a^-) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} F(x)$ *izquierda* *derecha* $F(a^+) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} F(x) = F(a)$

cuando F(x) es continua, $F(a^+) = F(a^-) = F(a)$

Ejemplo 4.6 *Calcula la esperanza y la varianza* de las v.a. de los ejemplos 4.2 y 4.3.

X representa el tiempo de estacionamiento en un garaje público

4.2 en horas enteras

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}x & para\ x=0\ 1\ 2\ 3\ 4\\ 0 & otro\ \ caso\end{cases}$$

4.3 en horas continuas

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8}x & 0<x<4\\ 0 & otro\ caso\end{cases}$$

Solución: para 4.2. $E(X)=3\ \ Var(X)=1$ ***; para 4.3*** $E(X)=2{,}\widehat{6}\ \ Var(X)=0{,}8711$ ***(tomando una E(X)=2,67)***

Solución:

Para la distribución discreta de 4.2 $f(x) = \frac{1}{10}x \quad x = 1, 2, 3, 4$

x	$f(x) = P(X = x)$	$x \cdot f(x)$
1	0,1	0,1
2	0,2	0,4
3	0,3	0,9
4	0,4	1,6
total	*1*	*3,0*

$$E(X) = \sum_{\forall x} x \cdot f(x) = \sum_{x=0}^{4} x \cdot \frac{1}{10}x =$$

$$= 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}4 = 3{,}0$$

$$E(X^2) = \sum_{\forall x} x^2 \cdot f(x) = \sum_{x=0}^{4} x^2 \cdot \frac{1}{10}x =$$

$$= 1^2 \cdot 0{,}1 + 2^2 \cdot 0{,}2 + 3^2 \cdot 0{,}3 + 4^2 \cdot 0{,}4 = 10$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 10 - 3^2 = 1$$

Para la distribución continua 4.3 $f(x) = \frac{1}{8}x \quad 0 < x < 4$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{4} x \cdot \frac{1}{8}x\,dx = \frac{1}{8}\frac{x^3}{3}\Big]_0^4 = \frac{4^3}{24} = 2{,}6667$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{0}^{4} x^2 \cdot \frac{1}{8}x\,dx = \frac{1}{8}\frac{x^4}{4}\Big]_0^4 = \frac{4^4}{32} = 8$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = 8 - \left(2,\hat{6}\right)^2 = 0{,}8889$$

SIGUE EJEMPLO 4.6

- Si se toman dos muestras de 5 coches, que han aparcado en este garaje, coherentes con los modelos de probabilidad propuestos:

  - Para el modelo 4.2: 2 3 3 4 4
  - Para el modelo 4.3: 1,2 2,4 3,4 3,6 3,8

Calcúlese el tiempo medio de aparcamiento de esos cinco coches, en cada caso. Compárese el resultado con el valor obtenido para la esperanza.

Solución: para 4.2, media = 3,2 y para 4.3, media = 2,88

Las medias muestrales son variables porque tienen un valor para cada muestra de n = 5 coches; en esta muestra concreta ha salido un valor de $\bar{x}(A) = 3{,}2$ *y* $\bar{x}(B) = 2{,}88$.

La Esperanza es un valor único y representa la media del modelo de probabilidad:

$E(X) = 3$ *en el modelo discreto* 4.2 y $E(X) = 2,\hat{6}$ *en el modelo continuo* 4.3

Ejemplo 4.7 TRANSFORMACIÓN LINEAL. Calcula la esperanza y la varianza de la variable aleatoria Y transformación lineal de X: *Y= 2X + 3*, para los casos en los que X es la variable del ejemplo 4.3. *(E(X) = 3, Var (X) = 1)*

Solución: *E(Y) = 9, Var (Y) = 4*

$$E(Y) = E(2X + 3) = 2E(X) + 3 = 2 \cdot 3 + 3 = 9$$

$$Var(Y) = Var(2X + 3) = 2^2 Var(X) = 4 \cdot 1 = 4$$