TEMA 7.: MODELOS DE PROBABILIDAD MULTIVARIANTES

7.1.- VECTOR ALEATORIO

El vector aleatorio surge de la cuantificación de k características de una población, esto es, el vector aleatorio es una variable aleatoria k- dimensional a la que denotaremos por:

$$(X_1, X_2, \ldots\ldots X_k)$$

Por otra parte, diremos que se ha constituido una distribución de probabilidad k-dimensional cuando se especifiquen todos los posibles valores del vector aleatorio k-dimensional junto con su función de probabilidad correspondiente.

En el caso particular de que k=2, es decir si se cuantifican dos características, estaremos ante una variable aleatoria bidimensional, a la que denotaremos por:

$$(X, Y)$$

7.2- DISTRIBUCIÓN CONJUNTA. FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN Y PROBABILIDAD

7.2.1.- FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Dada una v.a. bidimensional (X, Y), se define su función de distribución, como la aplicación:

$$F: R^2 \to [0, 1] \quad / \quad F(x_0, y_0)=p(X\leq x_0, Y\leq y_0)$$

7.2.2.- DISTRIBUCIONES DISCRETAS: FUNCIÓN DE CUANTÍA

En el caso de que tanto X como Y sean v.a. discretas, el vector o variable aleatoria bidimensional se dirá que es discreta. En este caso tiene sentido hablar de probabilidad en cualquier punto (x, y), y se define la función de cuantía como:

$$p: R^2 \to [0, 1] \quad / \quad p(x_0, y_0)=\text{probabilidad que corresponde al punto } (x_0, y_0)$$

Propiedades de la función de cuantía:
$$\begin{cases} 1^{a})\ \sum_{\forall(x,y)} p(x,y) = 1 \\ 2^{a})\ p(x,y) \geq 0, \quad \forall(x,y) \\ 3^{a})\ F(x_0, y_0) = \sum_{\substack{x\leq x_0 \\ y\leq y_0}} p(x,y) \end{cases}$$

NOTA IMPORTANTE: Cualquier conjunto de números no negativos p(x, y) que verifique la 1ª propiedad constituye una función de cuantía de una v.a. bidimensional discreta.

7.2.3.- DISTRIBUCIONES CONTINUAS: FUNCIÓN DE DENSIDAD

En el caso de que tanto X como Y sean v.a. continuas, el vector o variable aleatoria bidimensional se dirá que es continua. En este caso se define la función de densidad, que permite obtener probabilidades de intervalos bidimensionales (recintos), del siguiente modo:

$$f(X,Y)=\frac{\partial^2 F(X,Y)}{\partial X \partial Y}$$

Propiedades de la función de densidad: $\begin{cases} 1^a)\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1 \\ 2^a)\; f(x,y)\geq 0, \quad \forall (x,y) \end{cases}$

NOTA IMPORTANTE: Cualquier función integrable en R^2 que verifique las propiedades 1ª y 2ª es una función de densidad de una v.a. bidimensional continua.

7.3.- DISTRIBUCIONES MARGINALES

Dado un vector aleatorio, las distribuciones marginales son aquellas que se obtienen considerando una o más variables del vector y prescindiendo de las restantes. Así, en el caso bidimensional se pueden considerar dos distribuciones marginales: la de X (se considera X y se prescinde de Y) y la de Y (se considera Y y se prescinde de X), de manera que:

Caso discreto: función de cuantía de la marginal X: $p_1(x)=\sum_{\forall y} p(x,y)$

función de cuantía de la marginal Y: $p_2(y)=\sum_{\forall x} p(x,y)$

Caso continuo: función de densidad de la marginal X: $f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

función de densidad de la marginal Y: $f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

7.4.- INDEPENDENCIA ESTOCÁSTICA

Dada una v.a. bidimensional (X, Y) con función de densidad o cuantía conjunta f(X, Y), se dice que las v.a. X e Y son estocásticamente independientes si:

$$f(X,Y)=f_1(X)\cdot f_2(Y)$$

7.5.- ESPERANZA, MEDIAS, VARIANZAS, COVARIANZA, COEFICIENTE DE CORRELACIÓN.

Dada una v.a. bidimensional (X, Y) y su distribución de probabilidad correspondiente, se define la esperanza matemática de una función de dicha variable (g(X, Y)) como:

$$E[g(X,Y)]=\begin{cases} \displaystyle\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p(x_i,y_j) & \text{(c. discreto)} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g((X,Y)f(X,Y)dXdY & \text{(c. continuo)} \end{cases}$$

Pudiéndose comprobar que:

$$\boxed{E[aX+bY+c]=aE(X)+bE(Y)+c}$$

Algunos *casos particulares de gran utilización son:*

$$\begin{cases} \text{si } g(X,Y)=X \rightarrow E[g(X,Y)]=\mu_X = \underline{\text{media de X}} \\ \text{si } g(X,Y)=Y \rightarrow E[g(X,Y)]=\mu_Y = \underline{\text{media de Y}} \\ \text{si } g(X,Y)=(X-\mu_X)^2 \rightarrow E[g(X,Y)]=\sigma_X^2 = \underline{\text{varianza de X}} \end{cases}$$

$$\text{si } g(X,Y)=(Y-\mu_Y)^2 \rightarrow E[g(X,Y)]=\sigma_Y^2 = \underline{\text{varianza de Y}}$$

$$\text{si } g(X,Y)=(X-\mu_X)(Y-\mu_Y) \rightarrow E[g(X,Y)]=\sigma_{XY} = \underline{\textbf{\textit{covarianza de (X, Y)}}}$$

Se puede demostrar que la covarianza (que merece las mismas interpretaciones y consideraciones que la covarianza muestral S_{xy} estudiada en la parte de estadística descriptiva) es independiente del cambio de origen y depende del cambio de unidad[1], por lo que, para analizar la relación entre las variables X e Y se suele utilizar el coeficiente de correlación, definido como:

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Que además de ser independiente tanto del cambio de origen como del de unidad es un parámetro acotado entre –1 y 1, esto es:

$$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1 \text{ (misma interpretación que el coeficiente de correlación muestral r en descriptiva)}$$

Además, se puede comprobar que:

$$\boxed{Var(aX+bY+c)} = E\left[\left((aX+bY+c)-E(aX+bY+c)\right)^2\right] = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab\, Cov(X,Y) =$$

$$\boxed{= a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\sigma_{XY}}$$

[1] Concretamente, si se definen las variables: Z=$\frac{X-a}{b}$; W=$\frac{Y-c}{d}$, se verifica que: Var(Z)=$\frac{Var(X)}{b^2}$, Var(W)=$\frac{Var(Y)}{d^2}$, Cov(Z, W)= $\frac{Cov(X\,Y)}{bd}$

Por lo que:

· *si X e Y son estocásticamente independientes, entonces:*

- $\sigma_{XY} = 0$ (y consecuentemente el coeficiente de correlación también vale cero)
- $\mathrm{Var}(aX + bY + c) = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$

7.6.- DISTRIBUCIÓN MULTINORMAL.

Dada una variable aleatoria bidimensional de **tipo continuo** (X, Y), diremos que sigue una distribución Normal bidimensional (o bivariante) de parámetros $\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y \ y \ \rho$ (con $-\infty < \mu_X < \infty, -\infty < \mu_Y < \infty, \sigma_X > 0, \sigma_Y > 0 \ y \ -1 < \rho < 1$) si su función de densidad tiene la siguiente expresión:

$$f(X,Y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]}$$

Pudiendo comprobarse que:

$$\begin{cases} \mu_X \text{ es la media de la marginal X} \\ \mu_Y \text{ es la media de la marginal Y} \\ \sigma_X \text{ es la desviación típica de la marginal X} \\ \sigma_Y \text{ es la desviación típica de la marginal Y} \\ \rho \text{ es el coeficiente de correlación entre X e Y} \end{cases}$$

PROPIEDADES

- Cada una de las marginales (X e Y) sigue una distribución Normal, concretamente:

$$\mathbf{X \sim N(\mu_X,\ \sigma_X)}$$

$$\mathbf{Y \sim N(\mu_Y,\ \sigma_Y)}$$

- Las distribuciones condicionadas $X/Y = y_0 \ (\forall y_0)$, $Y/X = x_0 \ (\forall x_0)$ siguen una distribución Normal, concretamente:

$$X/Y = y_0 \sim N\left(\mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y_0 - \mu_Y);\ \sigma_X\sqrt{1-\rho^2}\right) \qquad \forall y_0$$

$$Y/X = x_0 \sim N\left(\mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x_0 - \mu_X);\ \sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}\right) \qquad \forall x_0$$

- Si (X, Y) sigue una distribución Normal bidimensional y se define nueva variable Z=a X+bY+c, entonces:

$$Z \sim N\left(a\mu_X + b\mu_Y + c;\ \sqrt{a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\sigma_{XY}}\right)$$

- Por otra parte, una **<u>propiedad importante de la distribución Normal bivariante</u>** es la siguiente:

Si (X, Y) sigue una distribución Normal bidimensional y X e Y están incorrelacionadas (es decir $\rho = 0$) $\longrightarrow$ X e Y son estocásticamente independientes