TEMA 3

Incertidumbre y probabilidad

EJEMPLOS

VNIVERSITAT DE VALÈNCIA
OpenCourseWare

EJEMPLO INTRODUCTORIO AL TEMA 3:

Probabilidad. Sucesos. Espacio muestral.

Este ejemplo contiene todos los ingredientes fundamentales de la teoría de la probabilidad: **experimento, suceso simple o punto muestral, espacio muestral, suceso, probabilidad de un suceso...**

Ejemplo: consideremos el **experimento** de lanzar una moneda tres veces, anotando las caras y/o cruces que resultan en cada secuencia de tres lanzamientos.

Hay ocho resultados posibles al lanzar una moneda tres veces (a estos resultados los llamaremos **sucesos simples o puntos muestrales**):

CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX,

y si la moneda es equilibrada entonces los ocho resultados son igualmente posibles (probables, verosímiles). Entendemos por ***igualmente probables*** lo siguiente: en un número grande de intentos, esperamos que cada uno de los posibles resultados ocurra un número similar de veces. Así, por ejemplo, si repetimos el experimento 8.000 veces esperamos que cada uno de los ocho posibles resultados ocurra aproximadamente 1.000 veces.

Supongamos que hemos hecho una simulación por ordenador de 8.000 intentos de este experimento obteniendo los siguientes resultados:

Suceso simple	CCC	CCX	CXC	XCC	CXX	XCX	XXC	XXX	
Frecuencia	1.008	956	990	1.060	1.038	998	957	993	8.000

Podemos obtener también las frecuencias relativas dividiendo las anteriores por el número total de intentos (8.000). Esperamos que las frecuencias relativas tengan un valor aproximado a $\frac{1.000}{8.000} = 0{,}125$.

Suceso simple	CCC	CCX	CXC	XCC	CXX	XCX	XXC	XXX	
Frec. relativa	0,126	0,120	0,124	0,133	0,130	0,125	0,120	0,124	1,000

La frecuencia relativa esperada $\frac{1}{8} = 0{,}125$ sería la misma aunque hiciéramos simulaciones de un número diferente a 8.000.

- Tenemos dos cosas: un **conjunto de posibles resultados (sucesos simples)** y el haber asumido que **cualquiera de los 8 resultados posibles son igualmente verosímiles** (misma verosimilitud), i.e.: tienen la misma frecuencia relativa esperada en un número de intentos "elevado".

Incorporamos este concepto en nuestro MODELO asignando UNA PROBABILIDAD de $\frac{1}{8} = 0{,}125$ a cada uno de los 8 SUCESOS SIMPLES (posibles resultados). Aquí tenemos el concepto de probabilidad como una **medida de la frecuencia relativa esperada**.

El concepto de probabilidad sirve para dar una medida numérica de la verosimilitud de que se produzca un suceso. Por tanto, el objetivo de la probabilidad es cuantificar la incertidumbre de que ocurra o no ocurra un suceso.

- Distinguimos tres formas básicas de asignar probabilidad a un suceso:

  - **Probabilidad frecuencialista:** la probabilidad asignada a cada suceso es la frecuencia relativa.
  - **Probabilidad clásica o de Laplace:** basada en la equiprobabilidad de los sucesos simples, que la interpretamos como la frecuencia relativa esperada en un número grande de repeticiones.
  - **Probabilidad subjetiva:** probabilidad personal, individual, basada en la información que tenemos a priori sobre las características del suceso a evaluar, información que muchas veces procede de la experiencia acumulada.

SUCESOS en general: diferentes de los simples y en cuya probabilidad de ocurrencia estamos interesados.

<u>Ejemplo</u>: podemos estar interesados en saber la probabilidad de obtener la primera y segunda tiradas iguales (CC o XX en las dos primeras tiradas).

Este suceso ocurre si y solo si ocurre uno de los siguientes sucesos simples:

A = {CCC CCX XXC XXX}. La probabilidad que le asignamos a este suceso es de 1/2, es decir:

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Longrightarrow Probabilidad\ \ Laplace = \frac{casos\ \ favorables\,(4)}{casos\ \ posibles\,(8)}.$$

En el experimento, el suceso ocurre exactamente: 1.008+956+957+993 = 3.914 veces de 8.000, que no es exactamente ½ = 0.5 pero se aproxima.

$$Probabilidad\ \ frecuencialista:\ \ frecuencia\ relativa\ \ f_i = \frac{n_i}{N} = \frac{3.914}{8.000} = 0{,}48925$$

En MODELOS DE PROBABILIDAD, al final no distinguimos entre **sucesos en general A** y **sucesos simples o puntos muestrales ω_i.**

- **SUCESOS:** subconjuntos del conjunto de todos los posibles resultados del experimento.

Otros ejemplos de sucesos:

Suceso B: obtener exactamente 2 caras y una cruz.

B= {CCX CXC XCC} $P(B) = \frac{3}{8} = 0{,}375$. La frecuencia relativa observada para este suceso en el experimento es:

$$\frac{956 + 990 + 1060}{8000} = \frac{3.006}{8.000} = 0{,}37575$$

Podemos definir otro elemento para nuestro modelo:

- **ESPACIO MUESTRAL Ω**, conjunto cuyos elementos representan todos los posibles resultados del experimento. Conjunto de resultados posibles.

Ejemplo 3.1 *Ley aditiva de la probabilidad. Probabilidad de la Unión de sucesos*.

A partir de los sucesos A (obtener las dos primeras tiradas iguales), A = {CCC CCX XXC XXX} y B (obtener exactamente dos caras y una cruz), B= {CCX CXC XCC}, definidos en el ejemplo introductorio, calcular la probabilidad del suceso unión: $A \cup B$.

Solución:

$P(A) = \frac{4}{8}$ $\quad P(B) = \frac{3}{8}$ i com que $A \cap B = \{CCX\} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

Así $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{8} + \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8}$

Es decir, que conociendo la probabilidad de la intersección, se calcula la probabilidad de la unión aplicando la ley aditiva de la probabilidad.

***Ejemplo 3.2** <u>Independencia estocástica y sucesos mutuamente</u>* excluyentes.

Del espacio muestral del ejemplo introductorio extraemos los siguientes sucesos: D "en el primer lanzamiento sale cara", F "en el segundo lanzamiento sale cara" y G "en el primer lanzamiento sale cruz". Determina el suceso $D \cap F$ y calcula su probabilidad. ¿Son independientes los sucesos D y F? Determina el suceso $D \cap G$ y calcula su probabilidad. ¿Son independientes los sucesos D y G o mutuamente excluyentes?

Solución: espacio muestral $\Omega = \{CCC\ CCX\ CXC\ XCC\ CXX\ XCX\ XXC\ XXX\}$

- Según el espacio muestral del ejemplo introductorio, los sucesos son:

$D = \{CCC\ CCX\ CXC\ CXX\}$ $F = \{CCC\ CCX\ XCC\ XCX\}$ $G = \{XCC\ XCX\ XXC\ XXX\}$

$P(D) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $P(F) = \frac{1}{2}$ $P(G) = \frac{1}{2}$

$D \cap F = \{CCC\ CCX\} \rightarrow P(D \cap F) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Y por otra parte: $P(D) \cdot P(F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(D \cap F) \rightarrow$ D i F son independientes.

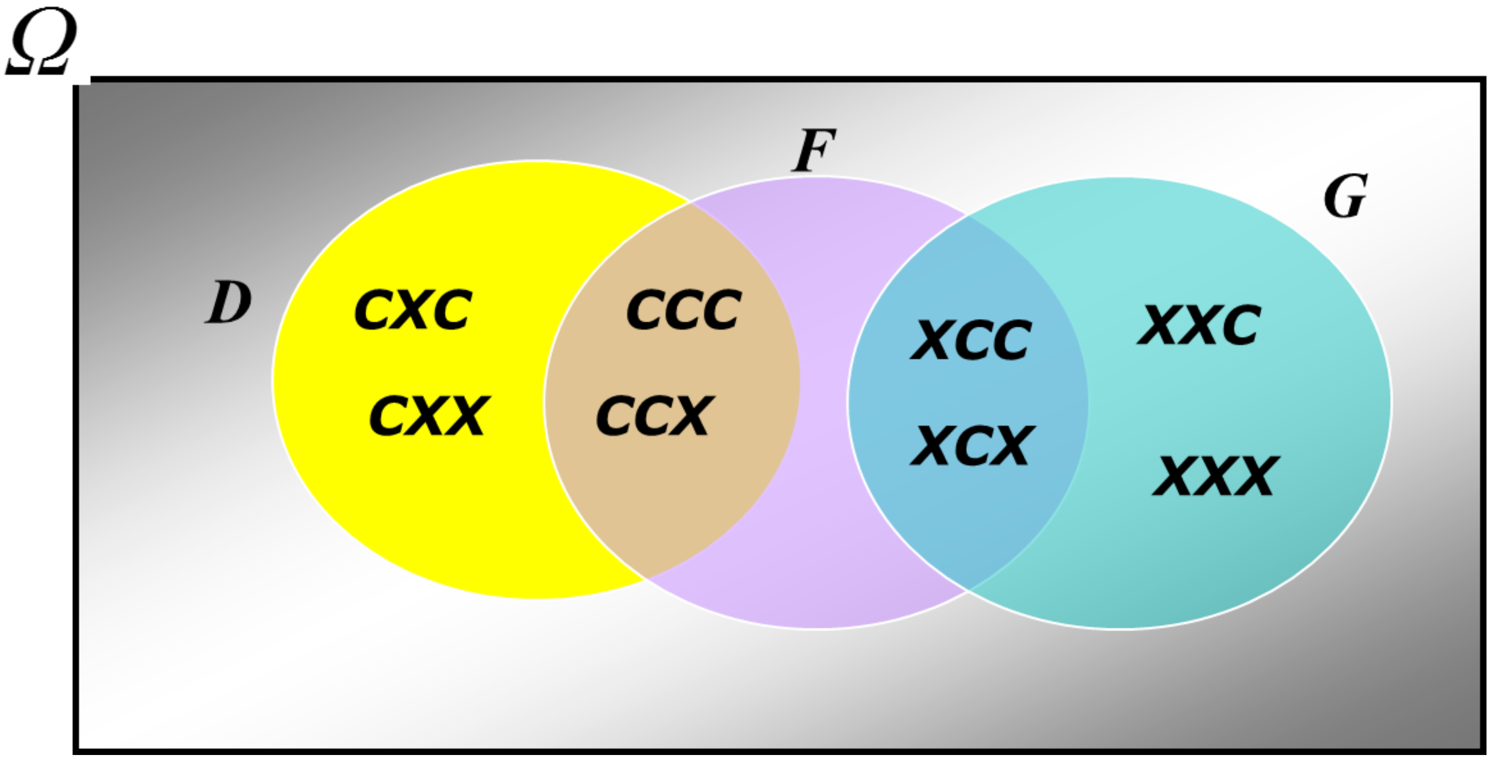
- Pero, D i G no son independientes:

$D \cap G = \{\emptyset\} \rightarrow P(D \cap G) = 0 \neq P(D) \cdot P(G) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. D i G son mutuamente excluyentes.

Esquema del Ejemplo 3.2.

D y F son independientes.

En cambio D y G son mutuamente excluyentes y no son independientes.



Ejemplo 3.3 *Probabilidad condicional e independencia estocástica.*

Teniendo en cuenta los sucesos de los ejemplos anteriores, calcula las probabilidades de los sucesos: A/B y D/F. A "obtener las dos primeras tiradas iguales", A = {CCC CCX XXC XXX} y B "obtener exactamente dos caras y una cruz", B= {CCX CXC XCC}.
D "en el primer lanzamiento sale cara", F "en el segundo lanzamiento sale cara"

$$A = \{CCC\ CCX\ XXC\ XXX\} \quad B = \{CCX\ XCC\ CXC\}$$

$$D = \{CCC\ CCX\ CXC\ CXX\} \quad F = \{CCC\ CCX\ XCC\ XCX\}$$

Solución:

$P(D/F) = \frac{P(D \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = P(D) \rightarrow$ D y F son independientes, ya que la ocurrencia de F no cambia la probabilidad inicial de D.

Pero A y B no son independientes:

Del ejemplo 3.1 sabemos que $P(A) = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{3}{8} \quad y \quad P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} = P(A)$, es decir, B sí cambia el valor de la probabilidad inicial de A (*la ocurrencia de B influye en A*) y por tanto A y B no son independientes.