GRADO EN INTERNATIONAL BUSINESS

ESTADÍSTICA (35887)

CURSO ACADÉMICO 2018/19

TEMA 5
"MODELOS DE PROBABILIDAD ESPECÍFICOS UNIVARIANTES "

- **5.1. Introducción.**
- **5.2. Modelos específicos discretos.**
- **5.3. Modelos específicos continuos.**
- **5.4. Relación entre los modelos de probabilidad.**

5.1.- INTRODUCCIÓN

- Modelos de distribuciones de probabilidad: idealizaciones de la realidad que tipifican en familias las distribuciones de probabilidad

Los modelos van a actuar de puente entre
lo observado (muestra) y lo desconocido (población)

5.1.- INTRODUCCIÓN

Modelos de Distribuciones de Probabilidad

- **5.2. De tipo discreto**:
  - 5.2.1. D. Binomial.
  - 5.2.2. D. de Poisson.
- **5.3. De tipo continuo**:
  - 5.3.1. Distribución Uniforme.
  - 5.3.2. Distribución Normal.

5.2.1.- DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

- ***Características:***
  - **C.1: Se realizan <u>n</u> pruebas separadas o separables.**
  - **C.2: Cada prueba puede dar lugar a 2 resultados A y $\overline{A}$ mutuamente excluyentes, a los que se denominará éxito y fracaso respectivamente.**
  - **C.3: Son conocidas las probabilidades de A y $\overline{A}$, denotándose por p=p(A), q=p($\overline{A}$) y verificándose que p+q=1. Además <u>p</u> y q se mantienen constantes en las <u>n</u> pruebas (la obtención de A y $\overline{A}$ en cada prueba es independiente de los resultados obtenidos en las otras pruebas)**
  - **Se considera como variable aleatoria:**

Si n=1→ BERNOUILLI

X= nº de éxitos obtenidos en las n pruebas $\boxed{(X\sim B(n, p))}$

5.2.1.- DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

- ***Función de cuantía:***

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} & \text{si} \quad x \in \{0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots n\} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \{0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots n\} \end{cases}$$

- ***Función de distribución:***

$$F(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x_0 < 0 \\ \sum_{\forall x < x_0} p(x) & \text{si} \quad 0 \le x_0 < n \\ 1 & \text{si} \quad x_0 \ge n \end{cases}$$

5.2.1.- DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

- **Parámetros más importantes:**
  - ***Media*** $\mu = np$
  - ***Varianza*** $\sigma^2 = npq$

5.2.2.- DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Características:

- C.1: Es una distribución que modeliza situaciones en las que un suceso puede producirse, o no, una o más veces en un intervalo de tiempo o espacio.
- C.2: la probabilidad de que ocurra un suceso en un intervalo de tiempo o espacio es independiente del intervalo considerado (siempre que se trate de intervalos de igual dimensión).
- C.3: si el intervalo es extremadamente pequeño, la probabilidad de que no ocurra ningún suceso es próxima a 1, la de que ocurra un suceso es muy pequeña y la de que ocurran 2 es prácticamente 0.
- Se considera como variable aleatoria:

X= nº de sucesos acaecidos en un intervalo de tiempo o espacio

$(X \sim \mathcal{P}(\lambda))$

5.2.2.- DISTRIBUCIÓN DE POISSON

- ***Función de cuantía:***

$$\boxed{p(x) = \frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{x!} \qquad \forall\, x \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}}$$

- ***Función de distribución:***

$$\boxed{F(x_0) = \sum_{\forall x \le x_0} p(x)}$$

5.2.2.- DISTRIBUCIÓN DE POISSON

- **Parámetros más importantes:**
  - ***Media*** $\mu = \lambda$
  - ***Varianza*** $\sigma^2 = \lambda$

5.3.1.- DISTRIBUCIÓN UNIFORME

- **Definición:**
  - **X= variable aleatoria de *tipo continuo* sigue una distribución uniforme en el intervalo [a, b], denotándose:**

$$\boxed{X \sim U([a, b])}$$

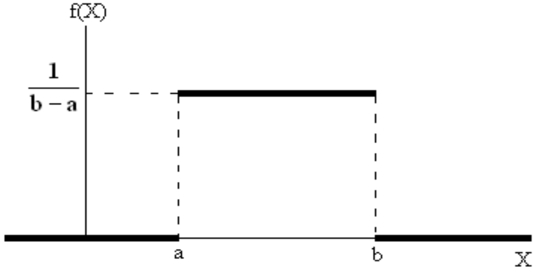
Si su función de densidad es constante dentro de [a, b] y vale cero fuera de dicho intervalo, es decir:

$$f(x) = \begin{cases} K & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a,b] \end{cases}$$

5.3.1.- DISTRIBUCIÓN UNIFORME

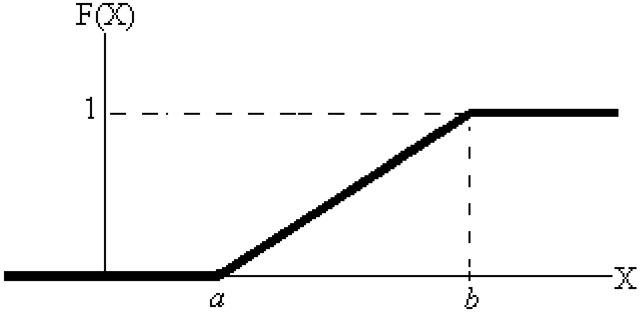
- **Función de densidad:**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{si } x\in[a,b]\\ 0 & \text{si } x\notin[a,b]\end{cases}$$



- **Función de distribución:**

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x\in[a,b[\\ 1 & \text{si } x\geq b\end{cases}$$



5.3.1.- DISTRIBUCIÓN UNIFORME

- **Parámetros más importantes:**
  - ***Media*** $$\mu = \frac{a+b}{2}$$
  - ***Varianza*** $$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

5.3.2.- DISTRIBUCIÓN NORMAL

Definición:

- X= variable aleatoria de *tipo continuo* sigue una distribución Normal de parámetros μ y σ (con $\sigma>0$), denotándose:

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

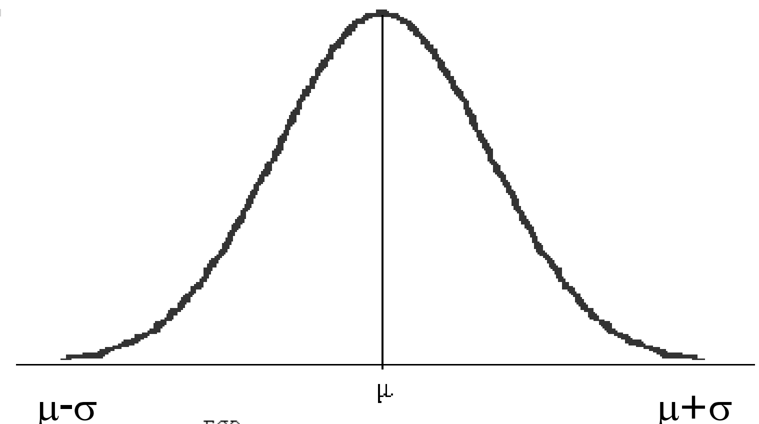
Si su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \forall x \in \Re, \quad \mu \in \Re, \quad \sigma \in \Re^+$$

5.3.2.- DISTRIBUCIÓN NORMAL

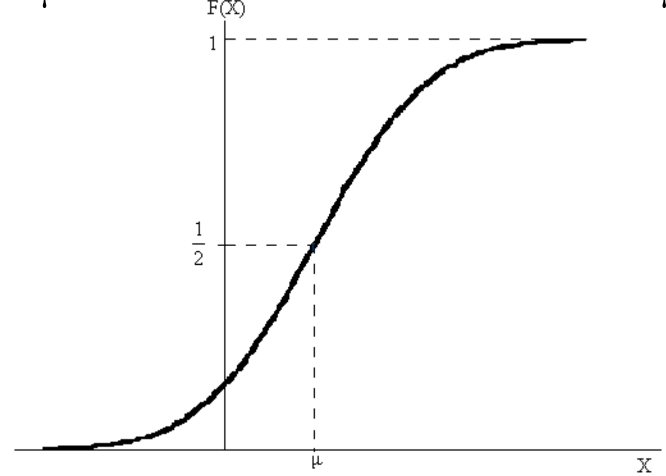
- **Función de densidad:**

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad \forall\, x \in \Re$$

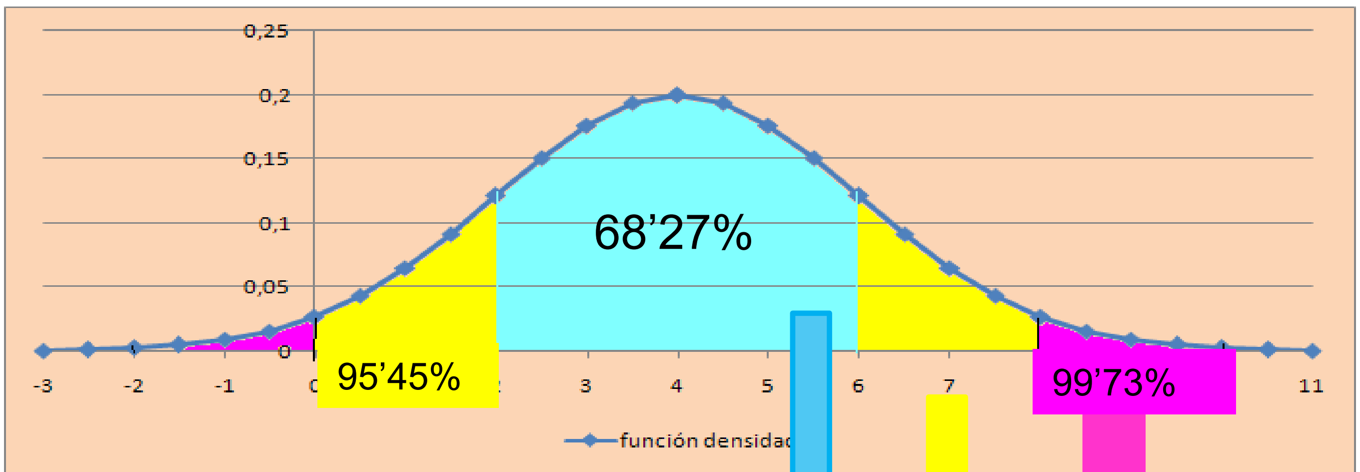


- **Función de distribución:**

$$F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$



5.3.2.- DISTRIBUCIÓN NORMAL



$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0{,}6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0{,}9973$$

5.3.2.- DISTRIBUCIÓN NORMAL

- **Parámetros más importantes:**
  - ***Media*** $E(X)=\mu$
  - ***Varianza*** $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$
  - ***Mediana y Moda*** $Me=Mo=\mu$

5.3.2.- DISTRIBUCIÓN NORMAL

PROPIEDADES

1ª

- $X \sim N(\mu, \sigma)$
- $Y = aX + b$

$\Rightarrow$ $Y \sim N(\mu_Y = a\mu + b, \sigma_Y = a\sigma)$

2ª

- $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ v.a. independientes
- $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i) \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots\ldots n\}$
- $Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots\ldots + a_n X_n + b$

$$Y \sim N\left(\mu_Y = a_1\mu_1 + \ldots\ldots + a_n\mu_n + b,\ \sigma_Y = \sqrt{a_1^2\sigma_1^2 + \ldots\ldots + a_n^2\sigma_n^2}\right) =$$

$$= N\left(\mu_Y = b + \sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i,\ \sigma_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2}\right)$$

5.3.2.- DISTRIBUCIÓN NORMAL

- ***Distribución Normal tipificada, reducida o estándar*: Normal con $\mu=0$ y $\sigma=1$**

- ***Relación entre una N(μ, σ) y una N(0, 1):***
  - ***Si X~ N(μ, σ)*** $\Rightarrow$ $t = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ ***~N(0, 1)***

- ***IMPORTANTE*: la Función de distribución de la N(0, 1) está *tabulada*** http://go.uv.es/F4qUA75

http://pages.uv.es/piclickers/cat/MenuH_mUVies.wiki

5.4.- RELACIÓN ENTRE LOS MODELOS DE PROBABILIDAD

BINOMIAL-NORMAL

Si $X \sim B(n, p)$ con n suficientemente grande ⇒ **$X \sim N(\mu = np, \sigma^2 = npq)$**

$n \geq 50$ y $np > 5$

POISSON-NORMAL

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ y λ *suficientemente grande* ⇒ **$X \sim N(\mu = \lambda, \sigma^2 = \lambda)$**

5.4.- RELACIÓN ENTRE LOS MODELOS DE PROBABILIDAD

Ejemplo 1

En un proceso de fabricación de piezas, necesarias para la elaboración de lámparas de diseño, se sabe que el porcentaje de piezas defectuosas fabricadas es el 1%. Obtener la probabilidad de que si se seleccionan 6000 piezas más de 60 resulten defectuosas.

5.4.- RELACIÓN ENTRE LOS MODELOS DE PROBABILIDAD

X=v. a. nº piezas defectuosas de las 6000 seleccionadas

$X \sim B(n=6000; p=0'01)$

$np=60>5$ se puede aproximar a $N(\mu=np=60, \sigma^2=npq=59'4)$

$\boxed{p(X>60)=0'5}$

5.4.- RELACIÓN ENTRE LOS MODELOS DE PROBABILIDAD

Ejemplo 2

El número de llamadas recibidas en una hora en el servicio de urgencias de un hospital sigue una distribución de Poisson con σ^2=64. Obtener la probabilidad de que en una hora seleccionada al azar se reciban, en dicho servicio, menos de 88 llamadas.

5.4.- RELACIÓN ENTRE LOS MODELOS DE PROBABILIDAD

En Poissson $\mu=\lambda=\sigma^2$

X=v. a. nº llamadas/hora → $X \sim \mathcal{P}(\lambda=64)$

λ=64 es suficientemente grande → se puede aproximar a $N(\mu=\lambda=64,\ \sigma^2=\lambda=64)$

$p(X<88)=0'9987$