85.-Si el 0,5 % de las piezas que fabrica una máquina son defectuosas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener alguna pieza defectuosa de 20?

X= $\{$número de piezas defectuosas de 20$\}$

$$x \Rightarrow B(20, 0,05)$$

$$P(x>0) = P(x=1) + ...P(x=20) = 1 - P(x=0)$$

$$P(x=0) = \binom{20}{0} 0,005^0 \cdot 0,995^{20} = q^{0,995} = 0,9046$$

por lo que $P(x>0) = 1 - P(x=0) = 1 - 0,9046 = 0,0953$

86.-Si se contesta un test de 10 preguntas tipo verdader/falso. Y por cada pregunta acertada se premia con un punto mientras que por cada fallada se resta medio punto. Calcular la puntuación que cabe esperar que obtenga una persona que contesta al azar las preguntas

X= $\{$número de preguntas acertadas de 10$\}$ $x \Rightarrow B(10; 0,5)$

Puntuación cabe esperar =E[P] siendo P= 1·x -0,5(n-x) así :

$$E[P] = E[x - 0,5(n-x)] = E[x] - 0,5\left[E[n] - E[x]\right] =$$
$$= E[x] - 0,5\left[n - E[x]\right]$$

Dado que $E[x] = np = 10 \cdot 0,5 = 5$

$$E[P] = E[x] - 0,5\left[n - E[x]\right] = 5 - 0,5(10 - 0,5) = 2,5$$

87.-Si en un proceso de fabricación de componentes electrónicos se conoce que la probabilidad de que haya que fabricar un determinado tipo de pieza cuatro veces para que se obtenga una defectuosa por primera vez es igual a 0,1024. Determinar que proporción de piezas defectuosas se fabrican.

El experimento del cual conocemos su probabilidad es: que son necesarias 4 es decir (x) piezas para primer éxito. Así

X= $\{$número pruebas necesarias para primer éxito$\}$ luego $x \Rightarrow G(p)$

Es precisamente p, probabilidad de éxito; en este caso el éxito es "pieza defectuosa" lo que se nos pregunta.

Conocemos que

$$P(x=4) = 0,1024 = p \cdot q^3 = p(1-p)^3 =$$
$$= p - 3p^2 + 3p^3 - p^4$$
$$\textit{resolviendo}$$

p = 1.247550740 - 0.3505201908·i , p = 1.247550740 + 0.3505201908·i ; p = 0.3048985183 ; p = 0.2

De los que son resultados válidos p=0,3049 y p=0,2 dado que se trata de números reales. Estos valores será los tanto por uno de piezas defectuosas que se fabrican

88.-La gestión de una fase de un proyecto requiere la repetición de una misma operación 10 veces. Por experiencias anteriores sabemos que en 99% de las veces que se ha realizado no se ha cometido ningún error en ninguna de las operaciones idénticas A partir de esta información ¿podemos considerar que la probabilidad de error en este tipo de operaciones sea inferior al 5 por mil?

X= {número de operaciones erróneas de 10} $x \Rightarrow B(10;p)$

Precisamente se nos pregunta si p es inferior a 0,005

Conocemos que P(x = 0)= P(ningún error)=0,99 luego

$$P(x=0)=\binom{10}{0}p^0q^{10}=0,99$$

$$por\ lo\ que\ q^{10}=0,99$$

de donde q = 0,99899 luego p =1-q =1-0,99899=0,001 que es mas inferior al 5 por mil

89.-La proporción de mujeres que hay en España es del 51% ¿Cuál es la probabilidad de que elegidos 10 individuos al azar ninguno de ellos sea mujer?

Se trata de un modelo binomial ya que, aunque no se especifica si hay reemplazamiento o no, la población es tan grande que no influirá este hecho en el mantenimiento de la probabilidad de escoger mujer a lo largo de las diez pruebas.

Así X= {número de mujeres entre diez personas escogidas} $x \Rightarrow B(10;0,51)$

La pregunta será:

$$P(x=0)=\binom{10}{0}0,51^0\cdot 0,49^{10}=0,49^{10}=0,00079$$

90.- Determinar la probabilidad de realizar un determinado tipo de experimento con éxito si se sabe que si se repite 24 veces es igual de probable obtener 4 éxitos que 5.

X= {número de éxito es 24 pruebas} luego $x \Rightarrow B(24;p)$

Conocemos que P(x=4)=P(x=5) es decir: $\binom{24}{4}p^4q^{20}=\binom{24}{5}p^5q^{19}$

$$p^4q^{20}=\frac{20}{5}p^5q^{19} \quad \Rightarrow q^{20}=\frac{20}{5}\cdot\frac{p^5}{p^4}\cdot q^{19}=4\cdot pq^{19} \Longrightarrow \quad q=4p \quad dado\ que\ p+q=1$$

tendremos que **p=1/5**

91.-Determinar las condiciones que ha de cumplir el parámetro p de una binomial para que la varianza de ésta sea máxima.

$\sigma^2 = npq = np(1-p)$ maximizando

$$\frac{d\sigma^2}{dp} = n(1-2p) \rightarrow 0 \qquad p = 0{,}5$$

que es un máximo ya que la derivada segunda es negativa.

Luego varianza máxima cuando p = q =0,5

92.-Se sabe que el costo de un experimento es de 100000 euros. Si el experimento falla se incurre en un coste adicional de 20000 euros debido a que ello implica efectuar ciertos cambios antes de repetirlo. Si la probabilidad de obtener éxito en cualquier experimento de los que realicemos es de 0,4 y suponemos que cada ensayo es independiente de los demás. ¿Qué coste cabe esperar que tendrá el proceso necesario para obtener el éxito?

Siendo X= {número de pruebas necesarias para conseguir el primar éxito}

La función de coste asociada será

C = 100000 x + 20000 (x-1)

Dado que cuesta 100000 por cada experimento que se realice, más 20000 por cada cambio necesario tras fracasar el experimento anterior. En el primer experimento no se realizaron cambios.

Podría tomarse también como que sólo el primer experimento cuesta 100000 euros y en los siguientes uno adicional de 20000 con lo que la función sería:

C = 100000 + 20000 (x-1)

Tomamos la primera versión

X se distribuirá como una geométrica de parámetro p=0,4 ; $x \Rightarrow G(0,4)$

Dado que se nos pregunta por el coste esperado

Será:

$$E[C] = E[100000x + 20000(x-1)] =$$
$$100000E[x] + 20000E[x-1] =$$
$$100000E[x] + 20000\left(E[x]-1\right)$$

Dado que X = geométrica E[x]= 1/p=2,5 luego el coste esperado será:

$$E[C] = 100000 \cdot 2{,}5 + 20000 \cdot 1{,}5 = 280000\, euros$$

93.-Si la proporción de asientos erróneos de una contabilidad es de 0,002 ¿Cuál es la probabilidad de que un auditor que revisa 10 de ellos encuentre algún error? ¿Cuál será la probabilidad de que encuentre alguno error en 1000 asientos?

Dado que desconocemos si un asiento puede o no revisarse reiteradamente (reemplazamiento). También desconocemos el tamaño de la población por la que la suponemos no finita. Esto nos lleva a trabajar con una distribución binomial. Así

Siendo X= {número de asientos erróneos de 10} x seguirá una B(10 ; 0,002)

La probabilidad de obtener algún erróneo de 10 será:

$$P(x\geq 1)=1-P(x=0) \qquad P(x=0)=\binom{10}{0}0,002^{0}\cdot 0,998^{10}=0,9801$$

$$\text{por lo que} \qquad P(x\geq 1)=1-P(x=0)=1-0,9801=0,01982$$

Siendo y= {número de asientos erróneos de 1000} y seguirá una B(1000 ; 0,002)
La probabilidad de obtener algún erróneo de 1000 será :

$$P(y\geq 1)=1-P(y=0) \qquad P(y=0)=\binom{1000}{0}0,002^{0}\cdot 0,998^{1000}=0,13506$$

$$\text{por lo que} \qquad P(y\geq 1)=1-P(y=0)=1-0,13506=0,8649$$

94.-Un equipo (kit) se sirve con siete tornillos para que sea montado por el cliente. El equipo sólo necesita cuatro de los tornillos para ser ensamblado correctamente .Si la proporción de tornillos defectuosos es del 10 %. Calcular la probabilidad de que un cliente que lo ha adquirido no tenga problemas con los tornillos para montarlo. Si a un minorista hemos vendido tres de estos equipos, calcular la probabilidad de que los tres fallen en su montaje por culpa de los tornillos.

Un equipo es válido si el número de tornillos correctos es de 4 o más de 7.
Siendo x ={número de tornillos correctos de 7} luego $x \Rightarrow B(7;0,9)$

P(válido) = P(x ≥ 4) = P(x = 4)+P(x = 5)+P(x = 6)+P(x = 7) por lo que :

$$P(válido)=\binom{7}{4}0,9^{4}0,1^{3}+\binom{7}{5}0,9^{5}0,1^{2}+\binom{7}{6}0,9^{6}0,1^{1}+\binom{7}{7}0,9^{7}0,1^{0}=$$
$$=35\cdot 0,6561\cdot 0,001+21\cdot 0,5904\cdot 0,01+7\cdot 0,53144\cdot 0,1+0,47824=0,9972$$

Conociendo que P(válido)= 0,9972 , tendremos que la segunda cuestión:
Siendo Y ={número de equipos correctos de 3} luego $B(3\,;0'9972)$

$$P(tres\ \ incorrectos)=P(y=0)=\binom{3}{0}0,9972^{0}\cdot 0,0028^{3}=2,19\cdot 10^{-8}$$

95.-La proporción de placas térmicas defectuosas que fabrica una empresa de electrodomésticos es del 5% y la mitad de ellas lo son por no tener bien instalado el termostato. Si vamos controlando la calidad de las placas eligiéndolas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera placa con defecto en el termostato sea la cuarta elegida?

La proporción de piezas con defectos en termostato es el 50% del 5% por tanto el 2,5% del total.
x= {número de placas que hemos de comprobar (pruebas) para conseguir K=3 con defecto en el termostato } x será un modelo Binomial negativo $x \Rightarrow BN(3;0,025)$

Se nos pregunta por x = 4

$$P(x) = \binom{x-1}{x-k} q^{x-k} p^k$$

$$P(x=4) = \binom{3}{1} 0,975^1 0,025^3 = 3 \cdot 0,975 \cdot 0,000015625 = 0,000045$$

96.- Supongamos que un sistema con 9 componentes que requiere para su funcionamiento que al menos 6 estén disponibles. Si la probabilidad de funcionamiento de un componente es 0,95. Calcular la fiabilidad del sistema definida por la probabilidad de que funcione.

Fiabilidad = P(funcione)

x= {número de componentes que funcionan de 9} $x \Rightarrow B(9;0,95)$

P(funcione)=P(x ≥ 6) = P(x = 6)+P(x = 7)+P(x = 8)+P(x = 9) por lo que :

$$P(funcione) = \binom{9}{6} 0,95^6 0,05^3 + \binom{9}{7} 0,95^7 0,05^2 + \binom{9}{8} 0,95^8 0,05^1 + \binom{9}{9} 0,95^9 0,05^0 =$$

$$= 84 \cdot 0,73509 \cdot 0,000125 + 36 \cdot 0,698337 \cdot 0,0025 + 9 \cdot 0,663420 \cdot 0,05 + 0,6334 =$$

$$0,9993$$

97.- La probabilidad de que un alumno apruebe una determinada asignatura es 0,6. Esta se mantiene constante en todas las convocatorias. Calcular la probabilidad de que un alumno, que siempre se presenta al examen, apruebe "precisamente" en la cuarta convocatoria. Calcular la probabilidad de que otro alumno haya aprobado ya en la tercera convocatoria.

X={número de convocatorias necesarias para aprobar} $x \Rightarrow G(0,6)$

a) P(apruebe precisamente en cuarta convocatoria) =P(x = 4)

$P(x=4) = p \cdot q^{x-1} = 0,6 \cdot 0,4^3 = 0,0384$

b) P(apruebe antes de tercera convocatoria) = P(x < 3) = P(x ≤ 2)

$P(x \le 2) = P(x=1) + P(x=2) = p \cdot q^o + p \cdot q^1 = 0,6 + 0,24 = 0,84$

también $P(x \le 2) = F(x=2) = 1 - q^x = 1 - 0,4^2 = 0,84$

98.- Una prueba de selección de personal consta de 10 preguntas y cada pregunta tiene cuatro respuestas de las cuales sólo una es la correcta. El candidato sólo puede volver a presentarse a la prueba si contesta más de una pregunta, aprobando si resuelve correctamente más de ocho. Un candidato contesta al azar las diez preguntas. Calcular la probabilidad de que repita la prueba.

X = { número de respuestas correctas de 10} $x \Rightarrow B(10;\frac{1}{4})$

Se nos pregunta por la probabilidad de que conteste entre 2 y 8 preguntas correctamente (ambos valores incluidos); luego $P(2 \le x \le 8)$ lo que nos llevaría a calcular 6 probabilidades de una binomial. Más sencillo sería:

$$P(2 \le x \le 8) = 1 - P(x < 2) - P(x > 8)$$

$$P(x < 2) = P(x=0) + P(x=1) = \binom{10}{0} 0,25^0 0,75^{10} + \binom{10}{1} 0,25^1 0,75^9 = 0,244025$$

que sería la probabilidad de que ni siquiera pudiera volver a presentarse

$$P(x>8)=P(x=9)+P(x=10)=\binom{10}{9}0,25^{9}0,75^{1}+\binom{10}{10}0,25^{10}0,75^{0}=0,00002956$$

que sería la probabilidad de "pasar" la prueba

El valor pedido sería:

$$P(2\le x\le 8)=1-P(x<2)-P(x>8)=1-0,244025-0,00002956=0,7559$$

99.- Dos empleados del servicio de control de calidad de una empresa discuten sobre el porcentaje de piezas defectuosas que se fabrican. Ambos tienen la misma experiencia en el puesto. El primero (A) sostiene que dicho porcentaje es del 1%, mientras que el segundo (B) mantiene que el porcentaje llega hasta el 2%. Proponen hacer una prueba cogiendo piezas y comprobándolas; resultando que hasta la décima no encontraron una defectuosa .Con esta información, cuantificar la verosimilitud de las propuestas de ambos empleados.

La prueba o experimento es x $=\{$número de pruebas hasta primera defectuosa$\}$

Se trata de un modelo geométrico $x\Rightarrow G(p)$

De manera que A mantiene que p=0,01 y B que p=0,02

Lo ocurrido es x= 10 del modelo anterior

Verosimilitud de A = $P\left({suceso}\big/{siendo\ cierto\ la\ hipótesis\ de\ A}\right)=P({x=10}\big/{p=0,01})$

$=p\cdot q^{9}=0,01\cdot 0,99^{9}=0,009$

Verosimilitud de B = $P\left({suceso}\big/{siendo\ cierto\ la\ hipótesis\ de\ B}\right)=P({x=10}\big/{p=0,02})$

$=p\cdot q^{9}=0,02\cdot 0,98^{9}=0,016$

Lo que demuestra la mayor verosimilitud de lo planteado por B

100.- Un proceso de control de calidad consiste en probar un material hasta un punto en el que es posible que se deteriore, finalizando cuando se deteriora la primera pieza. La probabilidad de deteriorarse es de 0,125. Si el coste de cada prueba es de 1000 euros, a los que hay que añadir los 2000 de la pieza deteriorada. ¿Qué coste cabe esperar que tendrá cada proceso?

El proceso es realizar pruebas es un modelo geométrico con p = 0,125

Donde x $=\{$número de piezas probadas hasta que una se deteriora$\}$ x $\Rightarrow$G(0,125)

La función de coste será C= 1000x+2000

Siendo su esperanza (coste esperado)

$$E[C]=1000E[x]+2000$$

Dado que x es un modelo geométrico $E[x]=\mu=\frac{1}{p}=\frac{1}{0,125}=8$

De donde $E[C]=1000E[x]+2000=8\cdot 1000+2000=10000\ euros$

101.-En una caja hay 4 papeles: 3 blancos y 1 negro. Se han de sacar dos, y el jugador gana cuando uno de ellos sea negro. El jugador puede elegir entre devolver a la caja el primeramente extraído o no ¿Le conviene hacerlo?

Si devuelve el extraído tendríamos:

x = $\{$número de papeles negros de 2 extracciones con devolución$\}$ x$\Rightarrow$B(2;0,25)
donde gana si obtiene uno negro en cualquiera de las dos pruebas o, claro, los dos negros : $P(x=1)+P(x=2)=1-P(x=0)$

$$P(x=0)=\binom{2}{0}0,25^0\cdot 0,75^2=0,5625$$

luego : $P(ganar)=1-P(x=0)=1-0,5625=0,4375$

Si "NO" devuelve el extraído tendríamos:
x = $\{$número de papeles negros de 2 extracciones sin devolución$\}$ x$\Rightarrow$H(4,2;0,25)
en este caso sería imposible obtener negro en ambas extracciones luego nos interesa únicamente P(x = 1) , luego: $P(x=1)=\dfrac{\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}}=\dfrac{\binom{1}{1}\binom{3}{1}}{\binom{4}{2}}=\dfrac{1\cdot 3}{6}=0,5$

al jugador , por tanto , le conviene el no reemplazamiento

102.-Un lote es correcto si tiene menos de dos piezas defectuosas. Conocemos que la proporción de piezas defectuosas que fabricamos es del 8%. Cada lote lo componen 10 piezas. Calcular la probabilidad de que sea al tercer lote revisado cuando encontremos el primero incorrecto

x = $\{$número de lotes que hemos de revisar para encontrar el primer incorrecto$\}$ sería
x $\Rightarrow$G(p) donde p = proporción de lotes incorrectos.
Una vez conocida p se trataría de calcular P(x = 3)

p = P (lote incorrecto) = P(número de piezas defectuosas de 10 ≥ 2)
si y = $\{$número de piezas defectuosas de 10$\}$ sería y $\Rightarrow$B (10 ; 0,08)

por tanto P(número de piezas defectuosas de 10 ≥ 2) = P(y ≥ 2)

$$P(y\geq 2)=1-P(y<2)=1-(P(y=0)+P(y=1))$$

$$P(y=1)=\binom{10}{1}0,08^1\cdot 0,92^9=0,3777$$

$$P(y=0)=\binom{10}{0}0,08^0\cdot 0,92^{10}=0,4343$$

por lo que $P(y\geq 2)=1-(P(y=0)+P(y=1))=1-(0,3777+0,4343)\approx 0,19=p$

conocido p = 0,19 $P(x=3)=0,19\cdot(1-0,19)^2=0,1246$

103.- Un lote consiste en 10 piezas de longitud x. Dicha longitud es una variable aleatoria con función de densidad $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}(x-1)(3-x) & si\ x\in[1,3]\\ 0 & resto\end{cases}$ **metros**

Un lote es correcto si nueve de sus piezas son válidas, es decir, su longitud esté comprendida entre 1,7 y 2,4 metros. Si hemos adquirido 4 lotes. Calcular la probabilidad de que más de dos de ellos sean correctos.

y ={ número de lotes correctos de 4 } ¿P(y>2)=P(y=3)+P(y=4)

y⇒B(4, p) siendo p = P(lote válido)

Si v ={ número de piezas válidas de 10 }

v ⇒B(10,p_1) siendo p_1 = P(pieza válida)

P(pieza válida)= $P(1,7\le x\le 2,4)=\int_{1,7}^{2,4}\frac{3}{4}(x-1)(3-x)dx=\int_{1,7}^{2,4}\frac{3}{4}(-x^2+4x-3)dx=$

$$=\frac{3}{4}\left[\frac{-x^3}{3}+2x-3x\right]_{1,7}^{2,4}=\frac{3}{4}[-4,608+11,52-7,2+1,6576-5,78+5,1]=0,502$$

luego v ⇒B(10,0,502) P(lote válido) = P (v ≥ 9)=P(v = 9)+P(v =10)

$$P(v=9)=\binom{10}{9}0,502^9\cdot 0,498^1=10\cdot 0,002\cdot 0,0498=0,01$$

$$P(v=10)=\binom{10}{10}0,502^{10}\cdot 0,498^0=0,001$$

por lo que p= P(lote válido)= 0,011

Tendremos así que: y ⇒ B(4; 0,011) como nos interesa

P(y>2)=P(y=3)+P(y=4)

$$P(y=3)=\binom{4}{3}0,011^3\cdot 0,989^1=0,000005$$

$$P(y=4)=\binom{4}{4}0,011^4\cdot 0,989^0=0,00000001$$

Por lo que la probabilidad pedida sería P(y>2)=P(y=3)+P(y=4)=0,000005001

103-(2).-El asfalto que nuestra empresa está colocando para el circuito de F1 de Valencia tiene por término medio 1 gravilla por m$^{2.}$ Lo colocamos por paneles de 2 m^2. La normativa no permite que el panel contenga más de 2 gravillas por panel y si es así el panel debe ser sustituido. Si mañana tenemos previsto asfaltar con 100 paneles (correctos, claro). Calcular cuantos paneles cabe esperar que necesitemos preparar.

X= número de gravillas por m^2 $x\Rightarrow\wp(\lambda=1)$

Y = numero de gravillas por panel (2 m^2) $y\Rightarrow\wp(\lambda=2)$

P (panel correcto) = $P(y\le 2)$

$P(y \leq 2) = P(y=0) + P(y=1) + P(y=2) =$

$\dfrac{e^{-2}2^0}{0!} + \dfrac{e^{-2}2^1}{1!} + \dfrac{e^{-2}2^2}{2!} = 0{,}1353 + 0{,}2706 + 0{,}2706 = 0{,}676$

P(Panel a sustituir)=P(panel incorrecto)= 1-0,676=0,323

E [paneles necesitamos] = 100 +E[paneles a sustituir(incorrectos)]

E[paneles a sustituir de 100 colocados] = E[x]= np=100·0,323=32,3
Dado que
$x \equiv n^o \; de \; incorrectos \; de \; 100 \; x \Rightarrow B(100; 0{,}323)$
32,3 a sustituir en la primera fase que hay que colocar nuevos ,luego
$y \equiv n^o \; de \; incorrectos \; de \; 32{,}3 \; y \Rightarrow B(32{,}3; 0{,}323)$
E[paneles a sustituir de 32,3 colocados] = E[y]= np=32,3·0,323=10,4

10,4 a sustituir en la segunda fase que hay que colocar nuevos ,luego
$z \equiv n^o \; de \; incorrectos \; de \; 10{,}4 \; z \Rightarrow B(10{,}4; 0{,}323)$
E[paneles a sustituir de 10,4 colocados] = E[z]= np=10,4·0,323=3,36

3,36 a sustituir en la tercera fase que hay que colocar nuevos ,luego
$w \equiv n^o \; de \; incorrectos \; de \; 3{,}35 \; w \Rightarrow B(3{,}35; 0{,}323)$
E[paneles a sustituir de 3,35 colocados] = E[w]= np=3,36·0,323=1

1 a sustituir en la cuarta fase que hay que colocar nuevo ,luego
$q \equiv n^o \; de \; incorrectos \; de \; 1 \; q \Rightarrow B(1; 0{,}323)$
E[paneles a sustituir de 1 colocado1] = E[q]= np=1·0,323=0,323

Luego cabe esperar que necesitemos = 100+32,3+10,4+3,36+1+0,323 =147,38

De la misma menara y más sencillo .Lógicamente 100 = Nº de preparados(1-0,323) donde
Nº de preparados =100/(1-0,323) =147,7