Ejercicios T9- VARIABLE ALEATORIA, MODELOS DE PROBABILIDAD UNIVARIANTES A

41.-De las siguientes afirmaciones que se llevan a cabo en los siguientes apartados, establecer cuales son necesariamente ciertas (tautológicas), cuales necesariamente falsas (contradictorias) o cuales son simplemente posibles (contingentes). Justificando la respuesta.

a) si x es variable aleatoria continua y, $x \in \left[0 \quad , \quad 8\right]$ con $F(X) = \frac{x^2}{64}$ entonces

$P(x \geq 3) = 0{,}859375$

sol:

$$P(x \geq 3) = 1 - P(x < 3) = 1 - P(x \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - \frac{x^2}{64} = 1 - \frac{9}{64} = 0{,}859375$$

luego tautológica

b) si x es v. a. continua y, $x \in \left[0 \quad , \quad 6\right]$ con $F(X) = \frac{x^2}{36}$ entonces $P(x \leq 3) = 0{,}25$

sol:

$P(x \leq 3) = F(3)) = \frac{3^2}{36} = 0{,}25 = 0{,}25$ luego cierta , tautológico

42.-El número de personas que entran en una tienda a la hora es una variable aleatoria Y con función de cuantía.

$$P(Y) = \frac{e^{-3} \cdot 3^y}{y!}$$

Cuando Y es mayor que cero. Calcular la probabilidad de que en una hora entren en dicha tienda más de dos personas.

Sol:

P(Y>2)=$1 - P(Y \leq 2) = 1 - \left[P(y=0) + P(y=1) + P(y=2)\right]$ =1-0,41913=0,5808

P(y=0)=$\frac{e^{-3} \cdot 3^0}{0!} = 0{,}049$ P(y=1)= $\frac{e^{-3} \cdot 3^1}{1!} = 0{,}14936$ P(y=2)= $\frac{e^{-3} \cdot 3^2}{2!} = 0{,}2205$

43.- Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k(1 + x^2) & si \quad x \in [0,3] \\ 0 & en \quad resto \end{cases}$$

Hallar K para que f(x) sea realmente una función de distribución.

Sol:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow luego \Rightarrow \int_{0}^{3} k(1+x^{2})dx = 1$$

Luego $$1 = K\left[x+\frac{x^{3}}{3}\right]_{0}^{3} = k{\cdot}12 \Rightarrow donde \quad K = 1/12$$

44.- El número de piezas defectuosas que fabrica una máquina de un lote de 10 es una variable aleatoria cuya función de cuantía es

$$P(x) = \binom{10}{x} \cdot 0{,}3^{x} \cdot 0{,}7^{10-x} \quad \text{para} \quad x = 0,1,\ldots..10$$

Calcular F(3)

Sol:

F(3)=

$$P(x \le 3) = \sum_{x=0}^{3} P(x) = \binom{10}{0}0{,}3^{0} \cdot 0{,}7^{10} + \binom{10}{1}0{,}3^{1} \cdot 0{,}7^{9} + \binom{10}{2}0{,}3^{2} \cdot 0{,}7^{8} + \binom{10}{3}0{,}3^{3} \cdot 0{,}7^{7} =$$

=0,6497

45.-Sea una variable con función de cuantía. $P(x) = \begin{cases} 6/36 & para \quad x = 0 \\ \frac{12}{36} - \frac{2}{36}x & para \quad x = 1,2,3,4,5 \end{cases}$

Calcular $P(2 < x \le 4)$

Sol:

$$P(2 < x \le 4) = P(3) + P(4) = 10/36$$

46.-Dada una variable aleatoria x cuya función de densidad es:

$$f(X) = \begin{cases} 2x & si \quad x \in [0,1] \\ 0 & en \quad resto \end{cases}$$

Hallar **a)** P( 1/4<x<1/2 ) **b)** P(x<1/4/ x<1/2) **c)** P(x>1/4/ x=1/4).

Sol:

**a)** $P(\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}) = \int_{1/2}^{1/2} f(x)dx = \left[x^2\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 3/16$

**b)** $P(x < 1/4 \,/\, x < 1/2) = \dfrac{P((x<1/4)\cap(x<1/2))}{P(x<1/2)} = \dfrac{P(x<1/4)}{P(x<1/2)} =$

$$= \frac{\int_0^{1/4} 2x dx}{\int_0^{1/2} 2x dx} = \frac{\left[x^2\right]_0^{1/4}}{\left[x^2\right]_0^{1/2}} = 1/4$$

c) 0. La condición es a un valor concreto cuya probabilidad será 0

47.- Si el consumo de gasolina que se produce en nuestra gasolinera a la semana es una variable aleatoria x con función de densidad $f(x) = \frac{1}{12}(1+x^2)$ $para$ $x \in [0,3]$ en miles de litros. Y queremos tener una probabilidad de 0,95 de poder satisfacer la demanda ¿Cuántos litros de gasolina, como mínimo, hemos de pedir que se nos suministren en nuestro reaprovisionamiento semanal?

P(satisfacer demanda)= 0,95 x = consumo o demanda a la semana

S = cantidad que se nos suministra a la semana
Satisfacemos la demanda cuando $S \geq x$ luego queremos que $P(x \leq S) = 0,95$

Luego : $P(x \leq S) = \int_0^S \frac{1}{12}\left(1+x^2\right)dx = \frac{1}{12}\left[x + \frac{x^3}{3}\right]_0^S = 0,95$

Así $P(x \leq S) = \dfrac{S^2(s+3)}{16} = 0,95$ resolviendo

s = 2.938887174
s = -1.469443587 + 3.078602502·i
s = -1.469443587 - 3.078602502·i

siendo el valor pedido 2,9388 , es decir 2938,8 litros

48.-Una variable aleatoria n tiene de función de cuantía $P(n) = K\dfrac{2^n}{n!}$ para n = $\{1,2,3,4\}$ . Hallar K para que realmente la función sea de cuantía.

Tendremos que:

| n | P(n) |
|---|---|
| 1 | K·2 |
| 2 | K·2 |
| 3 | K·4/3 |

| | |
|---|---|
| 4 | K·8/12 |

Por lo que $\sum_{i=1}^{4} P(n_i) = 1 = K(2+2+\frac{4}{3}+\frac{8}{12}) = K\cdot 6 \Rightarrow K = \frac{1}{6}$

49.-El índice de crecimiento de nuestras ventas es una variable aleatoria, que viene explicitada por una función de densidad: $f(x) = 2x \;\; siendo \;\; x \in [0,1]$.Por motivos de producción conocemos que el índice de ventas ha de estar entre 0,2 y 0,3, o bien entre 0,25 y 0,7 para conseguir nuestros óptimos empresariales. Con esta información. Calcular la probabilidad de que consigamos dichos óptimos

P(óptimos)= $P(x \in [0,2;0,3] \cup x \in [0,25;0,7] =$

$= \overbrace{P(x \in [0,2;0,3])}^{A} + \overbrace{P(x \in [0,25;0,7])}^{B} - \overbrace{P(x \in [0,25;0,3])}^{c}$ así:

$$A = P(0,2 \le x \le 0,3) = \int_{0,2}^{0,3} 2x dx = \left[ x^2 \right]_{0,2}^{0,3} = 0,09 - 0,04 = 0,05$$

$$B = P(0,25 \le x \le 0,7) = \int_{0,25}^{0,7} 2x dx = \left[ x^2 \right]_{0,25}^{0,7} = 0,49 - 0,0625 = 0,4275$$

$$C = P(0,25 \le x \le 0,3) = \int_{0,25}^{0,3} 2x dx = \left[ x^2 \right]_{0,25}^{0,3} = 0,09 - 0,0625 = 0,0275$$

por lo que P(óptimos)= 0,05+0,4275-0,0275=0,45

50.- Dada la variable aleatoria x con función de densidad. $f(x) = 2e^{-2x} \quad para \;\; x \ge 0$
Hallar P(0,3 ≤ x ≤ 0,6) representado dicho resultado en la gráfica de la función de densidad así como en la de la función de distribución.

$$P(0,3 \le x \le 0,6) = \int_{0,3}^{0,6} 2e^{-2x} dx = \left[ -e^{-2x} \right]_{0,3}^{0,6} = 0,2476$$

con la Función de Distribución tendríamos

$F(x) = \int_{0}^{X} 2e^{-2x} dx = 1 - e^{-2x}$ de manera que

$P(0,3 \le x \le 0,6) = F(x=0,6) - F(x=0,3)$

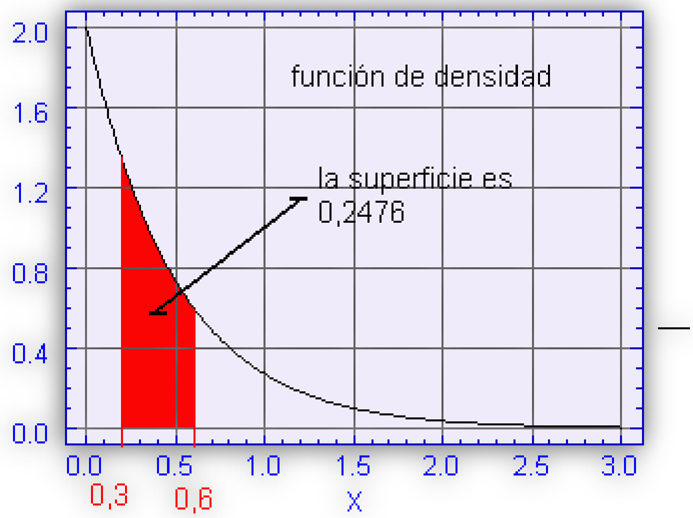
$F(0,3) = 1 - e^{-2\cdot 0,3} = 1 - 0,548811 = 0,451188$

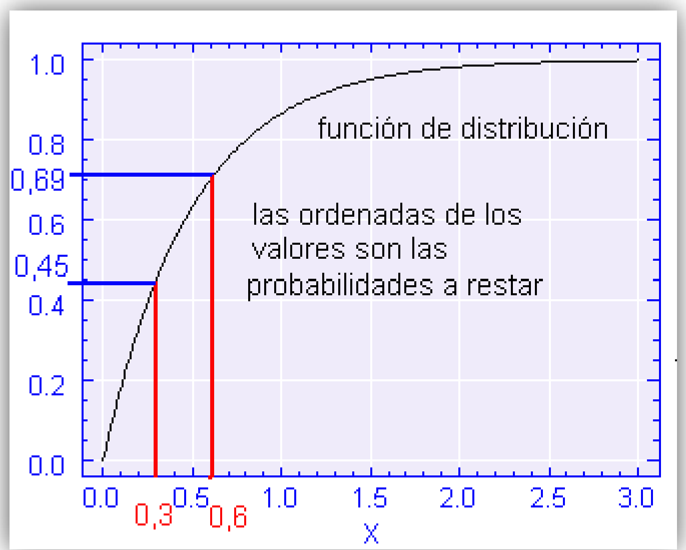
$F(0,6) = 1 - e^{-2\cdot 0,6} = 1 - 0,301194 = 0,698805$

como es lógico

$P(0,3 \le x \le 0,6) = F(x=0,6) - F(x=0,3) = 0,698805 - 0,451188 = 0,2476$

gráficamente:




51.- Dada la expresión en forma de tabla de las probabilidades de los valores de la variable aleatoria x, explicitar en forma de función (cuantía) dichas probabilidades.
Probabilidades:

| $x_i$ | $P(x_i)$ |
|---|---|
| 0 | $1/10$ |
| 1 | $1/10$ |
| 2 | $2/10$ |
| 3 | $6/10$ |

En base a esta información podemos establecer que $P(x)=\dfrac{x!}{10} \quad para \;\; x=\{0,1,2,3\}$

52.- La longitud de las piezas que fabrica una máquina es una variable aleatoria con función de densidad.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}(x-1)(3-x) & si\ x\in[1,3]\\ 0 & resto\end{cases}$$

Una pieza es aceptable si su longitud está entre 1,7 y 2,4. Con esta información. Calcular la probabilidad de que si fabricamos dos piezas ambas sean aceptables

P(dos piezas aceptables de dos ) =P(aceptable)·P(aceptable)
Calculemos dicha probabilidad:

P(aceptable)= $P(1,7\le x\le 2,4)=\int_{1,7}^{2,4}\frac{3}{4}(x-1)(3-x)dx=\int_{1,7}^{2,4}\frac{3}{4}(-x^2+4x-3)dx=$

$$=\frac{3}{4}\left[\frac{-x^3}{3}+2x^2-3x\right]_{1,7}^{2,4}=\frac{3}{4}[-4,608+11,52-7,2+1,6376-5,78+5,1]=0,5022$$

por lo que P(dos piezas aceptables de dos ) =P(aceptable)·P(aceptable) =0,2522

53.- Un almacén distribuye botones para camisas en exclusiva. Los recibe semanalmente de fábrica. El número de millares vendidos cada mes es una variable aleatoria cuya

$$f(x)=\begin{cases}k(1-x)^3 & x\in[0,1]\ millares\ de\ botones\\ 0 & en\ resto\end{cases}$$

a) calcular en valor “k” adecuado

b) Si el almacenista quiere tener una garantía del 95% de que no se le rompa el stock en un mes determinado. ¿Qué cantidad de botones ha de pedir a fábrica?

a) $1=\int_0^1 k(1-x)^3dx=k\left[\frac{-(1-x)^4}{4}\right]_0^1=1\rightarrow k=4$

b) Se romperá el Stock cuando el número de vendidas(x) sea mayor que el de almacenadas (a) (o pedidas a fábrica). Por tanto , no se romperá si x ≤ a

Como queremos que esto ocurra con probabilidad de 0,95 tendremos que:

$$0,95=P(x\le a)=\int_0^a 4(1-x)^3\,dx=4\left[\frac{-(1-x)^4}{4}\right]_0^a=$$

$$=\left[-(1-x)^4\right]_0^a=-(1-a)^4+1=0,95$$

resolviendo la ecuación : el valor adecuado de a sería a=0,527
es decir el almacenista debería pedir 527 piezas

54.-Dada una variable aleatoria cuya función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4} & si\ x \in [0,1] \\ \dfrac{x^2 - x}{8} & si\, x < 3 \\ \dfrac{-x^2 + 10x - 21}{4} & si\ x \le 5 \end{cases}$$ Hallar la P (2,5 ≤ x ≤ 4,7)

P (2,5 ≤ x ≤ 4,7)= F(4,7)-F(2,5) =

$$F(4,7) = \frac{-x^2 + 10x - 21}{4} = \frac{-4,7^2 + 10 \cdot 4,7 - 21}{4} = 0,9775$$

$$F(2,5) = \frac{x^2 - x}{8} = \frac{2,5^2 - 2,5}{8} = 0,4687 \quad \text{por lo que :}$$

P (2,5 ≤ x ≤ 4,7)= F(4,7)-F(2,5) =0,9775-0,4687=0,5088