Examen TODO 2005-06 resuelto

Apellidos……………………………………………………
Nombre…………………………………………….. grupo…………………………..

1.-El salario medio de los trabajadores de la construcción en España es de 1000 euros, con una varianza de 14200 euros al cuadrado. El salario medio de los trabajadores de la construcción en U.S.A es de 1350 \$ con varianza 16000 \$ al cuadrado .Teniendo en cuenta que en este momento un euro equivale a 1,21 dólares. En su doble vertiente: absoluta y relativa. ¿En que país la dispersión salarial es mayor? 1 punto.

Dispersión absoluta: la mide la varianza. La varianza es USA es mayor 14200<16000, por tanto mayor dispersión absoluta en USA. No obstante podríamos unificar las unidades, así la varianza en España medida en dólares sería

$$S^2_{E\ dolares} = S^2_{E\ euros} \cdot U^2 = 14200 \cdot 1{,}21^2 = 20790{,}22 \ dolares\ al\ cuadrado$$

frente a los 16000 de USA estaríamos ante una varianza mayor en España , por tanto mayor dispersión absoluta en la misma unidad en España. Este sería el mejor indicador.
Dispersión relativa: Utilizamos el coeficiente de variación de Pearson
Tendríamos:

$$g_{0,E} = \frac{S_E}{\overline{\overline{x_E}}} = \frac{14200}{1000} = 14{,}2$$

$$g_{0,USA} = \frac{S_{USA}}{\overline{\overline{x_{USA}}}} = \frac{16000}{1350} = 11{,}8$$

con la utilización de se observa que la dispersión relativa es mayor es España

2.-Sean dos rectas de regresión 2x+3y =10 ; x + y = 4

sabiendo además que $a_{0,2} = \Sigma\, y_i^2 / N = 16$.

a) Averiguar cuál es la regresión X/Y e Y/X. (Recuérdese que r^2 = bb´)
b) Obtener el coeficiente de correlación r. Comentando el resultado.
c) Calcular el centro de gravedad.
d) Obtener la varianza residual S^2_r de la regresión Y/X 3 puntos

opción A 2x+3y =10 es Y= a+ b X por lo que y = 10/3 – 2/3x
x+y =4 es X = a´+b´ Y por lo que x = 4 –y
en este caso r^2 = bb´ = (-1) ·(- 2/3)= 2/3 posible
opción B 2x+3y =10 es X = a´+b´ por lo que x = 10/2 – 3/2y
x+y =4 es Y= a+ b X por lo que y = 4 –x
en este caso r^2 = bb´ = (-3/2) ·(- 1)= 3/2 mayor que uno luego imposible

a) luego 2x+3y = 10 es la recta Y/X y = 10/3 – 2/3x
siendo x + y = 4 la X/Y x = 4 –y

b) el coeficiente de correlación r será : si r^2 = bb´ = (-1) ·(- 2/3)= 2/3
$r_{x,y} = \sqrt{2/3} = 0{,}8164$ con signo negativo pues ambos b son negativos
c) ambas rectas de regresión pasan por el centro de gravedad, luego

$$\left.\begin{array}{r} \bar{y} = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}\bar{x} \\ \bar{x} = 4 - \bar{y} \end{array}\right\} \bar{y} = \frac{10}{3} - \frac{2}{3}(4 - \bar{y}) = \frac{10}{3} - \frac{8}{3} + \frac{2}{3}\bar{y} =$$

$$\bar{y} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\bar{y} \quad \to \frac{1}{3}\bar{y} = \frac{2}{3} \to \bar{y} = 2$$

$$luego\ \ \bar{x} = 4 - \bar{y} \quad \bar{x} = 4 - 2 \quad \to \bar{x} = 2$$

luego centro de gravedad es 2,2

d) varianza residual de regresión Y/X y = 10/3 – 2/3x

sabemos que $S_Y^2 = S_{Y^*}^2 + S_r^2$ conocemos que el porcentaje de la varianza explicada por la regresión es r = 0,8164 luego el no explicado es del 1-0,8164 = 0,1836
por lo que la Varianza residual será el 18,36% de la varianza de la Y

dado que
$$s_y^2 = a_{2,0} - \bar{y}^2 = 16 - 2^2 = 12$$
$$por\ lo\ que\ s^2_{r(y/x)} = 0{,}1836 \cdot 12 = 2{,}2$$

3.- El año base para el cálculo de un índice de Laspeyres es el 2000. Si las cantidades consumidas en los tres grupos utilizados para su cálculo han aumentando desde el 2000 hasta la actualidad en un 10%, un 12 % y un -3 % respectivamente. Nos preguntamos como afectará estas modificaciones al cálculo del índice para el momento actual. (0,50 puntos)

El índice de Laspeyres se confecciona con ponderaciones basadas en las cantidades consumidas en el año base, por tanto el hecho de que se hayan modificado desde entonces no afecta al cálculo en el momento actual

4.- El índice de Gini de las distribución de la renta familiar disponible en un país ha aumentado 2 décimas en el los últimos tres años. Comentar el significado que esto tiene
(0,25 puntos)

5.-De las siguientes afirmaciones que se llevan a cabo en los siguientes apartados, establecer cuales son necesariamente ciertas (tautológicas), cuales necesariamente falsas (contradictorias) o cuales son simplemente posibles (contingentes). Justificando la respuesta.

a) si P(A) =0,5 y B está incluido en A entonces necesariamente P(A/B) = 1

b) si $y = 3x + 2x^2 - 3$ **, y conocemos que** $\mu_x = 2 \ y \ \sigma_x^2 = 6$ **, entonces necesariamente E[y] = 23**

c) si A es el suceso sacar un 8 en este examen y B es el suceso sacar un siete en el mismo, entonces los sucesos A y B son independientes

d) si se nos dice que x$\in$**[0,1] y tiene de función de distribución F(x) =** $x^2 - 0{,}1$ **, entonces necesariamente se nos está mintiendo.**

a) si P(A)=0,5 , si B incluido en A entonces A∩B = B luego

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$. tautológica, necesariamente cierta

$$E[y] = 3E[x] + 2E[x^2] - 3 = 3\mu_x + 2\alpha_2 - 3$$

b) $y = 3x + 2x^2 - 3$ luego $dado\ que\ \sigma_x^2 = 6 = \alpha_2 - \mu_x^2 \rightarrow \alpha_2 = 10$

$$luego\ \ E[y] = 3\mu_x + 2\alpha_2 - 3 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 10 - 3 = 23$$

luego tautológica, necesariamente cierto

c) Los sucesos A y B son disjuntos por tanto NO independientes, luego necesariamente falso

d) Cierto, se nos está mintiendo .Si F(x) = $x^2 - 0{,}1$ para x$\in$[0,1] entonces para F(x=1) =F(máximo valor) = 1 y el resultado es -0,1

6.- La fabricación de un producto se compone de tres procesos productivos independientes y no simultáneos: dos del tipo A y uno del tipo B. El tiempo de ejecución del proceso productivo tipo A se distribuye normalmente con media 50 minutos y desviación típica 1. El proceso productivo tipo B se distribuye normalmente con media 100 minutos y desviación típica 2. La fabricación del producto es rentable si ésta se realiza en un tiempo inferior a 202 minutos. Se pide:

a) Probabilidad de fabricar un producto rentable.

b) Probabilidad de que si fabricamos 5 productos al menos uno sea rentable *(3,5 puntos)*

a) un producto es rentable si el tiempo de fabricación total es menor que 202 luego

si Tt = tiempo total de fabricación entonces P(Tt < 202) tendremos que :

$$T_t = T_A + T_A + T_B$$
$$dado\ que\ T_A \Rightarrow N[50,1]\ \ y\ \ T_A \Rightarrow N[100,2]\ \ \ tendremos\ que$$
$$T_t \Rightarrow N[50 + 50 + 100; \sqrt{1+1+4}] = N[200; 2,45]$$

Así $$P(T_t < 202) = P(t < \frac{202-200}{2,45}) = P(t < 0,8163) = F(0,8163)$$
$$= 0,793$$

b) dado que fabricamos (pruebas) 5 con probabilidad de éxito (rentable) 0,793 tendremos que X = número de rentables de 5 será $X \to B(5, 0{,}793)$

donde se nos pregunta por : $P(X \geq 1) = 1 - (P(X=0))$

dado que : $P(X=0) = \binom{5}{0} 0,793^0 \cdot (1-0,793)^5 = 0,207^5 = 0,00038$

por lo que $P(X \geq 1) = 1 - (P(X=0)) = 1 - 0,00038 = 0,99961$

7.- Un grupo de seis estudiantes está constituido por 2 chicas y 4 chicos. Uno de ellos ha aprobado estadística y acompaña a sus amigos a la revisión del examen con el objetivo de "arañar " lo que sea .
a) Calcular la probabilidad de que el primero de los amigos en entrar a revisión sea una de las chicas
b) Si se produce el hecho de que el que entra el primero a revisar su examen resulta ser chica. Calcular la probabilidad de que la otra chica sea la aprobada

a priori la probabilidad de que sea chica la aprobada será :
A = aprobada chica B = aprobado chico P(A) =2/ 6 y P(B) = 4 / 6
Ocurre un suceso cierto C = ha entrado a revisión una chica luego estaba suspendida, desconocemos la probabilidad de que entre una chica a revisión pues no sabemos el sexo del aprobado luego P(C) = desconocida , pero

P(C) = P (C / A) · P(A) + P (C / B) · P(B)
Donde P(C / A) = probabilidad de que entre a revisión una chica si la aprobada es chica = 1/5 . Solo una chica suspendida de cinco amigos
Donde P(C / B) = probabilidad de que entre a revisión una chica si el aprobado es chico = 2/5 . Dos chicas suspendidas de cinco amigos.

Por tanto : P(C) = P (C / A) · P(A) + P (C / B) · P(B) =
= 1 /5 · 2/6 + 2 /5 · 4/6 =1/3

luego con esta información adicional la probabilidad a posteriori será :

$$P(A/C) = \frac{P(C/A) \cdot P(A)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{30}}{\frac{1}{3}} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

8.-Fabricamos maderos de longitud L→N[100,2] , cortándolos de troncos base de 125 cm. que nos cuestan a razón de 5 euros cada uno. Si, una vez cortados, dicha longitud está comprendida entre 99 y 102 cm. el madero se vende a 10 euros. Si la longitud es mayor vuelve a la cadena de corte. Si la longitud es menor el madero hay que tirarlo con la consiguiente pérdida. Si los costes fijos diarios son de 250 euros. Calcular el beneficio esperado diario en el que se tratan 200 troncos.

Dejando al margen los costes fijos

Beneficios por unidad(corte) $\begin{cases} 10-5 \ si \ 99 < L < 102 \\ 0 \ si \ L > 102 \\ -5 \ si \ L < 99 \end{cases}$

$$E[b^{o} \ por\, unidad] = 5 \cdot P(99 < L < 102) - 5P(L < 99)$$
$$P(99 < L < 100) = P(t_1 < t < t_2) = P(\frac{99-100}{2} < t < \frac{102-100}{2}) =$$
$$P(-0,5 < t < 1) = F(1) - (1 - F(0,5) = 0,841 - (1 - 0,69) = 0,533$$
$$P(L < 99) = P(t < t_3) = P(t < \frac{99-100}{2}) = P(t < -0,5) = 1 - F(0,5) = 0,31$$

El beneficio esperado por unidad cortada será = 5·0,533-5·0,31 = 1,115 euros por corte
Se tratan 200 troncos pero no se cortan 200 troncos pues los cortados y de longitud mayor a 102 son aprovechables y se vuelven a cortar. La probabilidad de cortar a longitud mayor de 102 es P(L >102) =
$= P(t > \frac{102-100}{2}) = P(t > 1) = 1 - F(1) = 1 - 0,841 = 0,159$.Es decir, se volverán a cortar el 15,9 % de 200 es decir 31,8 , de los que se volverán a cortar 5,056 , de los que se volverán a cortar 0,8. Es decir no haremos 200 cortes sino 237,656. Así:

E[B diario] = [E[número de cortes]· E[beneficio por corte]]- E[Costes fijos]

E[Bº diario] = (237,656 · 1,115) -250= 264,98-250 =14,98 euros

9.-Una empresa de tele-marketing realiza llamadas por teléfono a quien le viene en gana, molestando a casi todo el que las recibe. No obstante, por término medio, en una hora un sufrido "tele-agredido" pica y compra el producto. La jornada de un operador es de cuatro horas. El operador recibe un plus de 100 euros si logra "hacerse" con más de tres clientes en una jornada. Calcular la probabilidad de que sea al tercer día (jornada) de trabajo cuando el operador reciba su primer plus.

Número de clientes en una hora = X $x \Rightarrow \wp(\lambda = 1)$
Número de clientes por jornada = Y $y \Rightarrow \wp(\lambda = 4)$
Probabilidad de Plus = P(y > 3) =1 –P(y ≤ 3)
Así:

$$P(y\leq 3)=P(y=0)+P(y=1)+P(y=2)+P(y=3)$$

$$P(y=0)=\frac{e^{-4}4^{0}}{0!}=e^{-4}=0,018$$

$$P(y=1)=\frac{e^{-4}4^{1}}{1!}=e^{-4}\cdot 4=0,07326$$

$$P(y=2)=\frac{e^{-4}4^{2}}{2!}=e^{-4}\cdot 8=0,144$$

$$P(y=3)=\frac{e^{-4}4^{3}}{3!}=e^{-4}\cdot\frac{64}{6}=0,192$$

$$P(y\leq 3)=0,018+0,07326+0,144+0,192=0.42726$$

Probabilidad de Plus = P(y > 3) =1 –P(y ≤ 3) =1 -0,42726=0,57274

P(al tercer día primer plus) = P(Z = 3)
Siendo Z = Número de jornadas necesarias para primer plus,
donde Z →G(p)= G(0,573)

$$P(Z=3)=p\cdot q^{z-1}=0,573\cdot 0,427^{2}=0,573\cdot 0,1823=0,1044$$