

PRINCIPALES CONCEPTOS DE LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

CONCEPTOS PREVIOS

EXPERIMENTO

RESULTADO

ESPACIO DE RESULTADOS, Ω

ÁLGEBRA DE SUCESOS

SUCESO

PROBABILIDAD (AXIOMÁTICA)

PROPIEDADES Y TEOREMAS DERIVADOS DE LOS AXIOMAS

PROBABILIDAD CONDICIONADA

TEOREMA DEL PRODUCTO (DE LA INTERSECCIÓN)

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

TEOREMA DE BAYES

INDEPENDENCIA ESTOCÁSTICA DE SUCESOS

EXPERIMENTO aleatorio: Cualquier operación / acción / observación cuyos efectos no son predecibles con exactitud.

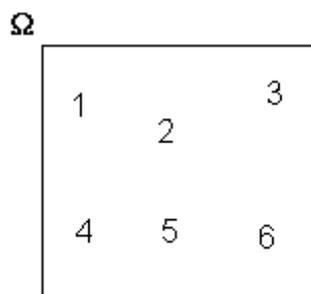
RESULTADO: cada uno de los efectos simples a los que puede dar lugar un experimento

ESPACIO DE RESULTADOS, Ω : El conjunto formado por todos los resultados.

ÁLGEBRA DE SUCESOS, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$: El conjunto de las partes de Ω .

SUCESO: Cualquier elemento del Algebra de sucesos. Cualquier conjunto formado por la unión de resultados (simples), además del conjunto vacío y de los propios resultados.

Ej. : Experimento: Lanzar un dado con puntos:



$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,6\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,2,6\}, \dots, \Omega \}$$

Sobre el álgebra de sucesos pueden definirse las operaciones conjuntistas habituales (\cup , \cap , $\bar{\cdot}$) que cumplirán las propiedades conocidas (conmutatividad, asociatividad, distributividad, Elemento Neutro, Elemento Simétrico y leyes de de Morgan).

PROBABILIDAD (de un suceso): una medida numérica de la "factibilidad" de un suceso que verifique la siguiente **axiomática (Kolmogorov)**:

Ax .1.- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega): P(A) \geq 0$ La probabilidad (de cualquier suceso) es no negativa

Ax . 2 . - $P(\Omega) = 1$ La probabilidad del suceso cierto es 1.

Ax . 3 . - Dada una familia de numerable de sucesos: $\{A_i\}$ con $i = 1, 2, \dots$ tal que

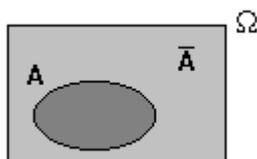
$A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$ se cumple que:

$$P\left(\bigcup A_i\right) = \sum P(A_i)$$

La probabilidad de la unión de sucesos disjuntos es la suma de las probabilidades.

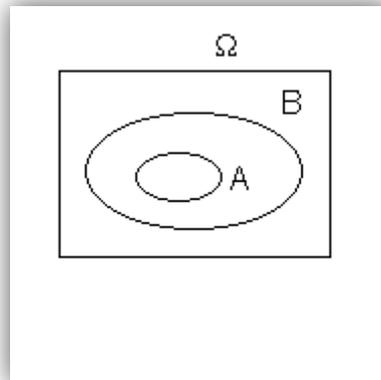
OTRAS PROPIEDADES Y TEOREMAS DERIVADOS DE LOS AXIOMAS:

P.1.Dado un suceso, A, la probabilidad de su complementario es 1 menos la probabilidad de A. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$



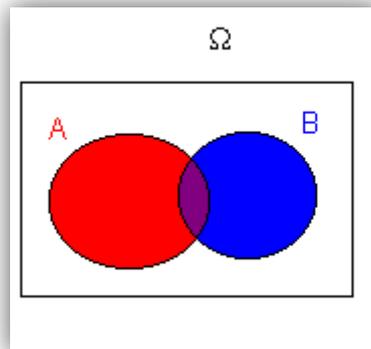
P.2.La probabilidad de cualquier suceso está comprendida entre cero y uno, ambos inclusive: $0 \leq P(A) \leq 1$

P.3. Dados dos sucesos A, B tales que $A \subseteq B$ se cumple que: $P(A) \leq P(B)$



P.4. Dados dos sucesos cualesquiera se cumple:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



PROBABILIDAD CONDICIONADA

Dados dos sucesos A y C, con $P(C) > 0$, la probabilidad de A condicionada a la ocurrencia de C, $P(A/C)$ supone una nueva asignación de probabilidad al suceso A, considerando que damos por ciertos el suceso C.

Ej. En el lanzamiento de un dado con puntos $P(\text{salga un } 2) = 1/6$.

pero si damos por cierto que el resultado obtenido ha sido un número par: $P(\text{salga un } 2 / \text{ha salido par}) = 1/3$.

Condicionar las probabilidades a un suceso C, supone, por tanto, rediseñar el espacio de resultados, que originariamente era Ω , y ahora pasa a ser C. De esta forma cualquier suceso A pasa a ser en el espacio de resultados condicionado $A \cap C$:

Espacio de resultados original --> Espacio de resultados condicionado

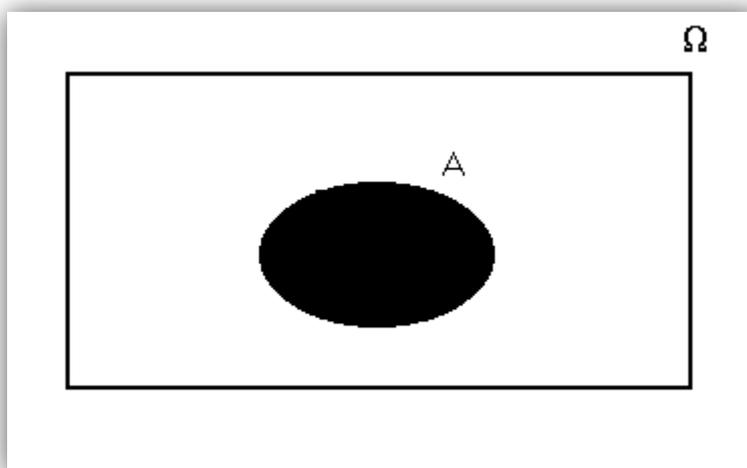
Ω

$\Omega \cap C = C$

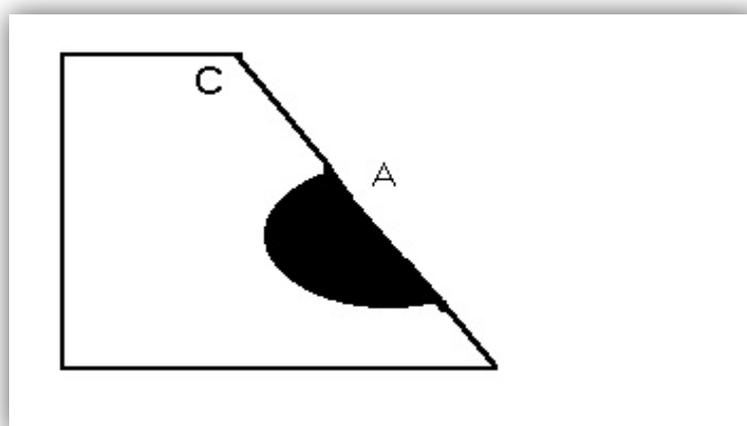
cualquier suceso $A \in P(\Omega)$

$A \cap C$

Gráficamente



Ω_c



Teniendo en cuenta esto la asignación de probabilidades condicionadas, deber seguir verificando la axiomática en el marco de la nueva álgebra de sucesos, y, para que esto ocurra la probabilidad condicionada deber definirse como:

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$$

TEOREMA DEL PRODUCTO (DE LA INTERSECCIÓN):

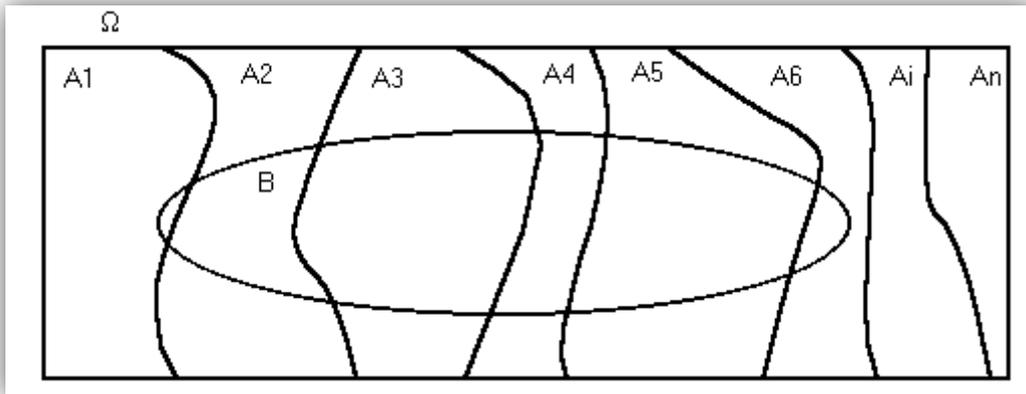
$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) \text{ o bien } P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$$

y para una intersección de sucesos generalizada:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_2 \cap A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n / \bigcap_{j=1}^{n-1} A_j)$$

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

dada la situación del gráfico:



Es decir una familia de sucesos $\{A_i\}$ que constituyen una partición, y un suceso B con $P(B) > 0$ y siendo $P(A_i)$ y $P(B/A_i)$ conocidas para todo valor de i ; se cumple que:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B/A_i) \cdot P(A_i)$$

TEOREMA DE BAYES:

En las mismas condiciones que en el caso anterior se cumple que:

$$P(A_j / B) = \frac{P(B / A_j) \cdot P(A_j)}{P(B) = \sum_{i=1}^n P(B / A_i) \cdot P(A_i)}$$

INDEPENDENCIA ESTOCÁSTICA DE SUCESOS:

Dos sucesos A y B son estocásticamente independientes cuando la información sobre la ocurrencia de uno de ellos no modifica la probabilidad de que ocurra el otro. Esto es:

$$P(A/B) = P(A) \text{ o equivalentemente } P(B/A) = P(B)$$

CARACTERIZACIÓN DE LA INDEPENDENCIA: TEOREMA DE CARACTERIZACIÓN

A y B son independientes $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ya que si por definición de independencia

$$P(A/B) = P(A)$$

y por definición de probabilidad condicionada

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{si } A \text{ y } B \text{ son independientes}$$

deberá cumplirse que

$$P(A/B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \text{luego } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Así, dos sucesos A y B son independientes si y sólo si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

GENERALIZACIÓN DEL CONCEPTO DE INDEPENDENCIA (caracterización) PARA n SUCESOS

Un número finito o infinito de sucesos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ son mutuamente independientes si dados los subíndices $K_1, K_2, K_3, \dots, K_r$ tales que $1 \leq K_1 < K_2 < K_3 < \dots < K_r \leq n$ se cumple que

$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3} \cap \dots \cap A_{k_r}) = P(A_{k_1}) \cdot P(A_{k_2}) \cdot P(A_{k_3}) \cdot \dots \cdot P(A_{k_r})$$

Así para tres sucesos

$$A_1, A_2, A_3$$

serán independientes si se cumple lo anterior, es decir, si

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

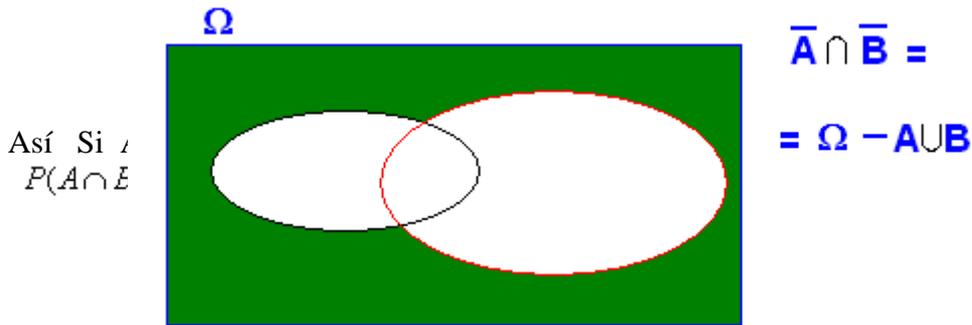
$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

PROPIEDADES:

1.- Si A y B son independientes los complementarios también lo son.



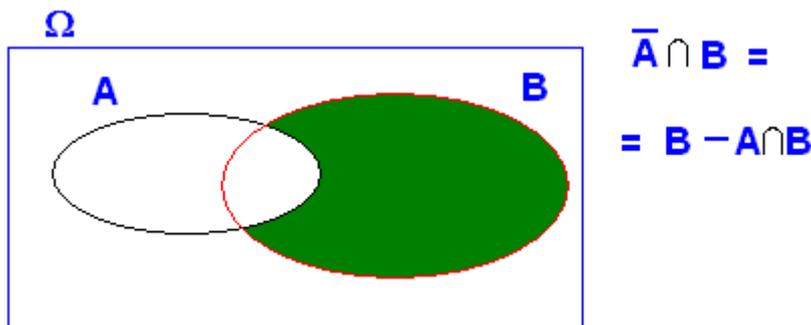
$\bar{A} \cap \bar{B} = \Omega - A \cup B$ entonces
 $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$ luego
 $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$ como A y B independientes

Entonces tendremos que :

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)]$ así
 $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B)$
 $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) [1 - P(A)]$
 $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = [1 - P(A)] - P(B) [1 - P(A)]$
 $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = [1 - P(A)] [1 - P(B)] \Rightarrow P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$
 luego los complementarios son independientes

2.- Si A y B son independientes el complementario de A y el suceso de B también lo son. (Evidentemente el complementarios de B y el suceso A, también)

Si A y B son independientes se cumplirá que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$



para que \bar{A} y B sean independientes deberá darse que

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$$

ya que : $\bar{A} \cap B = B - A \cap B$ entonces

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \text{ luego}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B) \text{ ya que } A \text{ y } B \text{ son independientes}$$

Así :

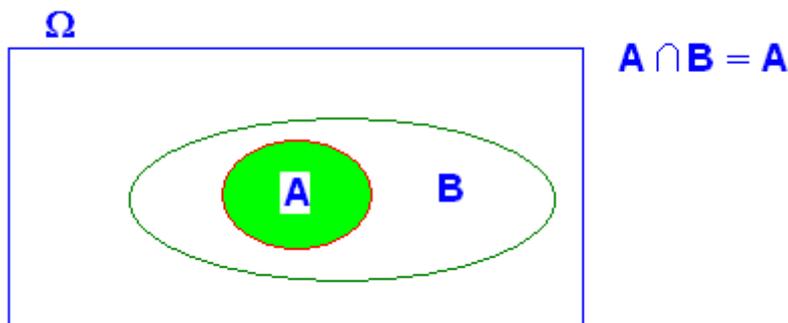
$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) \cdot [1 - P(A)] \Rightarrow P(B) \cdot P(\bar{A})$$

luego \bar{A} complementario y B son independientes.

Análogamente el complementario de B y el suceso A también serán independientes si A y B lo son

3.- Si A implica B ($A \subseteq B$), A y B, “NO” son independientes

A y B son independientes si se cumple que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$



ya que

$$\text{Si } A \subseteq B \text{ entonces } A \cap B = A$$

luego

$$P(A \cap B) = P(A) \neq P(A) \cdot P(B)$$

No se cumple el teorema de caracterización

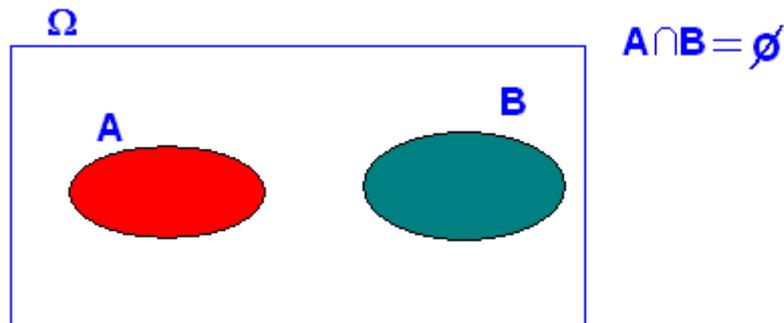
luego A y B No son independientes, salvo en el caso de que $B = \Omega$ en el que

$$P(B) = P(\Omega) = 1 ;$$

caso extremo e inadecuado

4.-Si dos sucesos son incompatibles-disjuntos (mutuamente excluyentes o de intersección vacía), “NO” son independientes

A y B son independientes si se cumple que
 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$



ya que

Si A y B disjuntos entonces $A \cap B = \emptyset$ luego

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$$

entonces

$$P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \cdot P(B)$$

No se cumple el teorema de caracterización

luego A y B No son independientes, salvo que $P(A)$ ó $P(B)$ sean 0; caso extremo e inadecuado

Resumiendo: INDEPENDENCIA ESTOCÁSTICA DE SUCESOS:

Dos sucesos A y B son estocásticamente independientes cuando la información sobre la ocurrencia de uno de ellos no modifica la probabilidad de que ocurra el otro. Esto es:

$$P(A/B) = P(A) \text{ o equivalentemente } P(B/A) = P(B)$$

CARACTERIZACIÓN DE LA INDEPENDENCIA: TEOREMA DE CARACTERIZACIÓN

$$A \text{ y } B \text{ son independientes} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

PROPIEDADES:

- 1.- Si A y B son independientes el complementario de A y el suceso B también lo son.
- 2.- Si A y B son independientes los complementarios también lo son.
- 3.- Si A implica B ($A \subseteq B$), A y B NO SON INDEPENDIENTES
- 4.- Si dos sucesos son incompatibles (mutuamente excluyentes) (de intersección vacía) NO SON INDEPENDIENTES.