Ejercicios T9c- VARIABLE ALEATORIA, MODELOS DE PROBABILIDAD UNIVARIANTES C

FGM-MARKOV

72.-Una variable aleatoria tiene de función de cuantía

x	$P(x)$
0	0,3
1	0,3
2	0,2
3	0,2

Hallar la media y varianza. Obtener la F.G.M y obtenerlas de nuevo.

En base a la función de cuantía

$$\mu = \alpha_1 = E[x] = \sum_{i=1}^{4} X_i P(X_i) = 0\cdot 0,3 + 1\cdot 0,3 + 2\cdot 0,2 + 3\cdot 0,2 = \boxed{1,3}$$

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2 = 2,9 - 1,3^2 = \boxed{1,21} \quad \text{dado que}$$

$$\alpha_2 = E[x^2] = \sum_{i=1}^{4} X_i^2 \cdot P(X_i) = 0\cdot 0,3 + 1\cdot 0,3 + 4\cdot 0,2 + 9\cdot 0,2 = 2,9$$

la F.G.M será

$$\gamma(t) = E\left[e^{tx}\right] = \sum_{i=1}^{4} e^{tx_i} \cdot P(x_i) = 0,3 + 0,3e^{t} + 0,2e^{2t} + 0,2e^{3t}$$

ya que :

x	$P(x)$	e^{tx_i}	$e^{tx_i}P(x_i)$
0	0,3	$e^{o} = 1$	0,3
1	0,3	e^{t}	$0,3\cdot e^{t}$
2	0,2	e^{2t}	$0,2\cdot e^{2t}$
3	0,2	e^{3t}	$0,2\cdot e^{3t}$

así con la FGM

$$\mu = \alpha_1 = E[x] = \gamma'(t)_{t\to 0} = 0,3\cdot e^{t} + 2\cdot 0,2\cdot e^{2t} + 3\cdot 0,2\cdot e^{3t} = 0,3 + 0,4 + 0,6 = \boxed{1,3}$$

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2 = 2,9 - 1,3^2 = \boxed{1,21} \quad \text{dado que}$$

$$\alpha_2 = E[x^2] == \gamma''(t)_{t\to 0} = 0,3\cdot e^{t} + 2\cdot 0,4\cdot e^{2t} + 3\cdot 0,6\cdot e^{3t} = 0,3 + 0,8 + 1,8 = 2,9$$

73.- Dada una variable aleatoria cuya función de densidad es $f(x) = e^{-x} \; si \; x \in [0,\infty]$. Hallar la media y la varianza en base a la F.G.M.

$$\gamma(t) = E\left[e^{tx}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot f(x)dx \Longrightarrow$$

$$\int_0^{\infty} e^{tx} \cdot e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{(t-1)x} dx = \int_0^{\infty} e^{-(1-t)x} dx = \frac{-1}{(1-t)} \int_0^{\infty} -(1-t) \cdot e^{-(1-t)x} dx$$

$$= \frac{-1}{(1-t)}\left[e^{-(1-t)x}\right]_0^{\infty} = \frac{-1}{1-t}[0-1] = \frac{1}{1-t} = (1-t)^{-1} = \gamma(t) = F.G.M$$

en base a la F.G.M. la media será

$$\mu = E[x] = \alpha_1 = \gamma'(t)_{t\to 0} = -1(1-t)^{-2}(-1) = (1-t)^{-2} = 1$$

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2 = 2 - 1^2 = 1 \quad \text{dado que}$$

$$\alpha_2 = \gamma''(t)_{t\to 0} = -2(1-t)^{-3}(-1) = 2(1-t)^{-3} = 2$$

74.- Dada una variable aleatoria cuya función de densidad es.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{6} - \dfrac{x^2}{36} & si \;\; x \in [0,6] \\ 0 \;\; en \;\; resto \end{cases}$$ **Hallar la moda.**

La moda es el valor de la variable con probabilidad máxima luego maximizando la f(x)

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \frac{1}{6} - \frac{2x}{36} \quad igualando \; a \; 0$$

$$\frac{2x}{36} = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow x = 3 \quad \text{que será la moda si se trata de un máximo}$$

para ello $f''(x) = -1/18$ se trata por tanto de una máximo luego Moda =3

75.- Una variable aleatoria tiene de F.G.M la expresión $\gamma(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$ demostrar que media y varianza coinciden

Sol.

$$\mu = E[x] = \alpha_1 = \gamma'(t)_{t\to 0} = \lambda e^t \cdot e^{\lambda(e^t-1)} = \lambda$$

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2 = (\lambda + \lambda^2) - \lambda^2 = \lambda \quad \text{ya que}$$

$$\alpha_2 = \gamma''(t)_{t\to 0} = \lambda e^t \cdot e^{\lambda(e^t-1)} + (\lambda e^t)^2 \cdot e^{\lambda(e^t-1)} = \lambda + \lambda^2$$

76.-Una variable aleatoria tiene de función de densidad la siguiente

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{2} & si\ \ x\in[0,1]\\ 0\ \ en\ \ resto\end{cases}$$ **Hallar la media y la mediana**

$$\mu=E[x]=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 x\left(\frac{2x+1}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(2x^2+x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right]=\frac{7}{12}=0,58$$

la mediana sería el valor M_e tal que :

$$\int_{-\infty}^{M_e} f(x)dx=1/2\ \ luego\ \ \int_0^{M_e}\frac{2x+1}{2}dx=\frac{1}{2}\left[\frac{2x^2}{2}+x\right]_0^{M_e}=1/2\ \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left[M_e^2+M_e\right]=1/2\ \ \Rightarrow M_e^2+M_e-\frac{1}{2}=0$$ de donde

$$\frac{-1\pm\sqrt{1^2+4}}{2}=\begin{cases}0,62\\-1,62\end{cases}$$ de donde deducimos que la mediana es M_e =0,62 por la imposibilidad de ser -1,62 que no está en el campo de variación de la variable

77.- La función de beneficios de un producto es B=3000x-100 donde x es la variable aleatoria número de unidades vendidas y tiene por función de densidad $f(x)=0,02\cdot e^{-0,02x}\ \ cuando\ x\geq 0$.
Determinar la varianza de los Beneficios (recomendable utilizar la FGM)

Si B = 3000x-100 $\quad D^2[B]=\sigma_B^2=3000^2\sigma_X^2$ ¿?

Calculamos la varianza de X en base a la FGM , para ello calculamos primero la FGM

$$\gamma(t)=E[e^{tx}]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}f(x)dx=\int_0^{\infty}e^{tx}\cdot 0,02\cdot e^{-0,02x}dx=\int_0^{\infty}0,02\cdot e^{-x(0,02-t)}dx=$$

$$=0,02\left[\frac{-e^{-x(0,02-t)}}{0,02-t}\right]_0^{\infty}=\frac{0,02}{0,02-t}=\frac{1}{\frac{0,02}{0,02}-\frac{t}{0,02}}=\left(1-\frac{t}{0,02}\right)^{-1}=\gamma(t)$$

la varianza de X será $\sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{2}{0,02^2} - \frac{1}{0,02^2} = \frac{1}{0,02^2}$ ya que

$$\mu = E[x] = \alpha_1 = \gamma'(t)_{t\to 0} = -1(1-\frac{1}{0,02}t)^{-2}(\frac{-1}{0,02}) = \frac{1}{0,02}$$

$$\alpha_2 = \gamma''(t)_{t\to 0} = -\frac{2}{0,02}(1-\frac{t}{0,02})^{-3}(\frac{-1}{0,02}) = \frac{2}{0,02^2}$$

Asi , calculando $D^2[B] = \sigma_B^2 = 3000^2\sigma_X^2$ tendremos

$$D^2[B] = 3000^2 \cdot \frac{1}{0,02^2} = 2,25 \cdot 10^{10}$$

78.- Dada la variable aleatoria X cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} 16xe^{-4x} & si \;\; x \in [0,\infty] \\ 0 \;\; en \;\; resto \end{cases}$$ **Hallar la moda**

Moda valor para el que se maximiza la función de densidad

$$\text{Así } f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = 16 \cdot e^{-4x} + \left[-4e^{-4x} \cdot 16x\right] \Rightarrow 0$$

$$0 = 16e^{-4x}[1-4x] \quad \to 1-4x=0 \quad \to x = 0,25 \text{ valor de la Moda}$$

79.-Si el coste de producción de un producto financiero es C=30+100x. Donde x es la variable aleatoria número de unidades producidas y que tiene de función de densidad $f(x) = 0,01 \cdot e^{-0,01x}$ $para\; x \geq 0$. Determinar la desviación típica de los costes

C=30+100x la desviación típica será

$$\sqrt{D^2[C]} = \sqrt{D^2[30-100x]} = \sqrt{100^2\sigma_X^2} = 100\sigma_X$$

Necesitamos conocer la desviación típica de x , lo haremos en base a la FGM si bien podría calcularse directamente.

$$\gamma(t) = E[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx = \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot 0,01 \cdot e^{-0,01x} dx = \int_0^{\infty} 0,01 \cdot e^{-x(0,01-t)} dx =$$

$$= \frac{-0,01}{(0,01-t)} \int_0^{\infty} -(0,01-t)e^{-x(0,01-t)} dx =$$

$$= 0,01\left[\frac{-e^{-x(0,01-t)}}{0,01-t}\right]_0^{\infty} = \frac{0,01}{0,01-t} = \frac{1}{\frac{0,01}{0,01}-\frac{t}{0,01}} = \left(1-\frac{t}{0,01}\right)^{-1} = \gamma(t)$$

la varianza de X será $\sigma_X^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{2}{0,01^2} - \frac{1}{0,01^2} = \frac{1}{0,01^2}$ por lo que la desviación típica será $\sigma_X = \frac{1}{0,01} = 100$ ya que

$$\mu = E[x] = \alpha_1 = \gamma'(t)_{t\to 0} = -1(1-\frac{1}{0,01}t)^{-2}(\frac{-1}{0,01}) = \frac{1}{0,01} = \mu$$

$$\alpha_2 = \gamma''(t)_{t\to 0} = -\frac{2}{0,01}(1-\frac{t}{0,01})^{-3}(\frac{-1}{0,01}) = \frac{2}{0,01^2}$$

Por tanto la desviación típica de los costes será $\sigma_c = 100 \cdot 100 = 10000$

80.-Los errores mensuales en la entrega de un producto tienen como función de cuantía la variable x con Función Generatriz de Momentos $\varphi(t) = e^{3(e^t-1)}$ **para x ≥0. Calcular la esperanza de la función de gastos inducidos cuya expresión es** $G = x^2 + x - 1$

$$E[G] = E\left[x^2 + x - 1\right] = E\left[x^2\right] + E[x] - E[1] = \alpha_2 + \alpha_1 - 1$$

Así .

$$\alpha_1 = \varphi'(t)_{t\to 0}$$

$$\varphi'(t) = 3e^t(e^{3(e^t-1)}) \rightarrow \varphi'(t=0) = 3 = \alpha_1$$

También :

$$\alpha_2 = \varphi''(t)_{t\to 0}$$

$$\varphi''(t) = 3e^t(e^{3(e^t-1)}) + \left(3e^t\right)^2(e^{3(e^t-1)}) \rightarrow \varphi''(t=0) = 3 + 3^2 = 12 = \alpha_2$$

Por lo que : $E[G] = \alpha_2 + \alpha_1 - 1 = 12 + 3 - 1 = 14$

80(2).-La variable aleatoria X tiene de F.G.M la función $\varphi(t) = 0,3 + 0,3e^t + 0,4e^{2t}$ **Hallar la Varianza. Y el D²[-2x+9]**

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 1,9 - 1,1^2 = 0,69$$

$$\varphi(t) = 0,3 + 0,3e^t + 0,4e^{2t}$$

$$\alpha_1 = \varphi^I_{t\to 0}(t) =_{t\to 0} 0,3e^t + 2\cdot 0,4e^{2t} =_{t\to 0} 0,3e^t + 0,8e^{2t} = 1,1$$

$$\alpha_2 = \varphi^{II}_{t\to 0}(t) =_{t\to 0} 0,3e^t + 2\cdot 0,8e^{2t} =_{t\to 0} 0,3e^t + 1,6e^{2t} = 1,9$$

$$D^2\left[-2x + 9\right] = (-2)^2\sigma_x^2 = 4\cdot 0,69 = 2.76$$

81.- Una variable aleatoria con distribución desconocida tiene de media 200 y de momento ordinario de orden dos 40100. ¿Entre qué valores se encontrarán al menos el 80% de las observaciones posibles de la variable?

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2 = 40100 - 200^2 = 100 \quad luego \;\; \sigma = 10$$

por Chesbyshev $\quad P\left[\left|x-\mu\right| < h\sigma\right] \geq 1 - \dfrac{1}{h^2} \quad luego \;\; P\left[\mu - h\sigma < x < \mu + \sigma\right] \geq 1 - \dfrac{1}{h^2}$

$$1 - \frac{1}{h^2} = 0{,}8 \to h^2 = 5 \to h = \sqrt{5} \quad luego$$

$$P\left[200 - 10\sqrt{5} < x < 200 + 10\sqrt{5}\right] \geq 0{,}8 \qquad \Rightarrow \boxed{P\left[177{,}6 < 222{,}4\right] \geq 0{,}8}$$

82.- La vida media de las lavadoras que fabricamos es de ocho años con desviación típica de 2. ¿Qué porcentaje de las vendidas este año seguirán funcionando dentro de 12?

X= v.a. numero de años que funciona una lavadora $\quad$ g(x)=x $\quad$ donde K=12

En aplicación de Markov

$$P\left[g(x) \geq k\right] \leq \frac{E\left[g(x)\right]}{k} \quad siendo \;\; E\left[g(x)\right] = 8 = \mu_X$$

$$luego \quad P\left[g(x) \geq 12\right] \leq \frac{8}{12}$$

luego la probabilidad de que funcionen más de 12 años es más pequeña que 0,666

83.- En una distribución de probabilidad la varianza resulta ser 100. Se realiza una observación resultando el valor 205. Determinar un intervalo centrado para la media de dicha distribución con probabilidad superior a 0,8

Varianza = 10 $\quad$ por Chesbyshev $\quad$ tendremos $\quad P\left[\left|x-\mu\right| < h\sigma\right] \geq 1 - \dfrac{1}{h^2}$

Nos interesa $\quad P\left[x - h\sigma < \mu < x + \sigma\right] \geq 1 - \dfrac{1}{h^2}$

dado que $\;1 - \dfrac{1}{h^2} = 0{,}8 \to h^2 = 5 \to h = \sqrt{5} \quad luego \quad P\left[x - h\sigma < \mu < x + \sigma\right] \geq 0{,}8$

$$P\left[205 - 10\sqrt{5} < \mu < 205 + 10\sqrt{5}\right] \geq 0{,}8 \qquad \Rightarrow \boxed{P\left[182{,}6 < 227{,}4\right] \geq 0{,}8}$$

84.- A pesar de desconocer la distribución de la renta familiar de un país sabemos que como mucho el 25% de las familias superan la renta de 30000 euros. ¿Qué proporción de familias de ese país tendrá una renta inferior a 25000 euros?

X= variable aleatoria renta   g(x)= X   conocemos que

$$P\left[g(x)\geq 30000\right]\leq \frac{E\left[g(x)\right]}{k=30000}=0,25 \quad \textit{siendo entonces}$$

$$E\left[g(x)\right]=30000\cdot 0,25=\mu_X=7500$$

$$P\left[g(x)\leq 25000\right]\geq 1-\frac{E\left[g(x)\right]}{25000}=1-\frac{7500}{25000}=0,7$$

85.- Un fabricante de piezas ha de realizarlas con longitud comprendida entre 48 y 52 cm. para poderlas vender. La fabricación se realiza con media 50 y desviación típica 1. El coste de fabricación es de 1000 u.m. la unidad. ¿Cuál ha de ser el precio de venta de la pieza si el fabricante espera obtener al menos el 20% de beneficio?

Beneficio = I-G   Beneficio esperado = 0,2·gastos =200 u.m.
luego ingreso esperado =1200 u.m
es decir E[I]=1200 = precio venta·P(pieza buena)

P(pieza buena) = P(48<x<52) = $P\left[\mu-h\sigma<x<\mu+\sigma\right]\geq 1-\frac{1}{h^2}$

Si $48=\mu-h\sigma=50-h\cdot 1\rightarrow h=2$

luego   P(48<x<52)= $P\left[\mu-h\sigma<x<\mu+\sigma\right]\geq 1-\frac{1}{h^2}=1-\frac{1}{2^2}=0,75$

por lo P(buena)=0,75   de donde E[I]=1200=precio·0,75   luego precio = 1600

86.- ¿Es posible que el 60% de los ordenadores que se venden es España lo hagan a un precio de venta superior al doble del precio medio de los propios ordenadores?

X= precio de venta de los ordenadores   g(x)=X   precio medio de venta =μ

Por Markov $P\left[g(x)\geq k\right]\leq \frac{E\left[g(x)\right]}{k}$

en nuestro caso $P\left[g(x)\geq 2\mu\right]\leq \frac{E\left[g(x)\right]}{k}=\frac{\mu}{2\mu}=0,5\neq 0,6$

luego como máximo el 50% y no el 60% como se nos plantea

87.- La variable aleatoria X se distribuye normalmente con media 2 y desviación típica desconocida. Dar una cota mínima para la probabilidad de que dicha variable sea menor que 6.

dado que nos piden una cota mínima sería

P(X<6) > ¿aplicando Markov sería $P(g(x) < K) \geq 1 - \frac{E[g(x)]}{k}$ en nuestro caso

$P(x < 6) \geq 1 - \frac{2}{6} = 2/3$

88.- La variable W =gasto variable se distribuye según un modelo con media 32. El gasto total tiene la expresión G = 0,23W + 6 . Dar una cota máxima para la probabilidad de que el gasto total sea mayor que 26,72

G(W)=0,23W+6 luego E[G(W)]= 0,23E[W]+ 6 = 0,23·32+6=13,36

Por Markov conocemos que $P(g(x) \geq k) \leq \frac{E[g(x)]}{k}$

nos indica cota máxima de probabilidad

en nuestro caso $P(G \geq 32{,}48) \leq \frac{13{,}36}{26{,}72} = 0{,}5$

88(2).-Si la media de vida útil que nos garantiza el fabricante de nuestro ordenador es de 4 años. Y nos asegura que con probabilidad superior a 0,75 su vida útil estará comprendida entre 2 y 6 años Calcular la varianza de vida útil con la que salen de fábrica dichos ordenadores.

$\mu = 4$

por Chesbyshev $P\left[|x-\mu| < h\sigma\right] \geq 1 - \frac{1}{h^2}$ $luego\ P\left[\mu - h\sigma < x < \mu + \sigma\right] \geq 1 - \frac{1}{h^2}$

$P\left[2 < x < 6\right] \geq 0,75 \rightarrow P\left[4 - h\sigma < x < 4 + h\sigma\right] \geq 1 - \frac{1}{h^2} \rightarrow h\sigma = 2 \rightarrow$

$0,75 = 1 - \frac{1}{h^2} \rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{4} \rightarrow h = \sqrt{4} = 2 \quad h\sigma = 2 \quad y \quad 2\sigma = 2$

$\sigma = 1 \ \ luego \ \ \sigma^2 = 1$

88(3).-Si la media de vida útil que nos garantiza el fabricante de nuestro ordenador es de 4 años con varianza 1 año al cuadrado. Calcular una probabilidad mínima con la que nuestro ordenador durará entre 2 y 6 años.

$\mu = 4 \quad \sigma^2 = 1 \rightarrow \sigma = 1$

por Chesbyshev $\quad P\left[\left|x-\mu\right| < h\sigma\right] \geq 1-\frac{1}{h^2}$ $\quad$ *luego* $P\left[\mu - h\sigma < x < \mu + \sigma\right] \geq 1-\frac{1}{h^2}$

$P\left[2 < x < 6\right] \geq ? \rightarrow P\left[4 - h\sigma < x < 4 + h\sigma\right] \geq 1-\frac{1}{h^2} \rightarrow h\sigma = 2 \rightarrow h1 = 2 \rightarrow h = 2$

$P\left[2 < x < 6\right] \geq 1-\frac{1}{h^2} = 1-\frac{1}{4} = 0,75$