Ejercicios T9b- VARIABLE ALEATORIA, MODELOS DE PROBABILIDAD UNIVARIANTES B

55.- Dada una variable aleatoria definida para los valores X={2,3} siendo su función de cuantía P(x)=0,2x .Obtener la media y el momento ordinario de orden dos, así como la varianza.

	x_i	$P(x_i)$
x_1	2	0,4
x_2	3	0,6

$$\mu = E[x] = \sum_{i=1}^{2} x_i P(x_i) = 2 \cdot 0,2 \cdot 2 + 3 \cdot 0,2 \cdot 3 = 2,6$$

$$\alpha_2 = E\left[x^2\right] = \sum_{i=1}^{2} x_i^2 P(x_i) = 4 \cdot 0,2 \cdot 2 + 9 \cdot 0,2 \cdot 3 = 7$$

varianza

$$\sigma^2 = E\left[\left(x-\mu\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{2}\left(x_i - 2,6\right)^2 P(x_i) = 0,36 \cdot 0,2 \cdot 2 + 0,16 \cdot 0,2 \cdot 3 = 0,24$$

o bien de manera mas sencilla:

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2 = 7 - 2,6^2 = 7 - 6,76 = 0,24$$

56.- Dada una variable aleatoria definida en el intervalo [2,3] con función de densidad

$f(x) = \frac{4}{65} x^3$ **obtener media y varianza.**

$$\mu = E[x] = \int_2^3 x f(x)dx = \int_2^3 x \frac{4}{65} x^3 dx = \frac{4}{65}\int_2^3 x^4 dx = \frac{4}{65}\left[\frac{x^5}{5}\right]_2^3 = \frac{4}{65} \cdot \frac{211}{5} = 2,5969$$

la varianza sería $\sigma^2 = \int_2^3 \left(x-\mu\right)^2 f(x)dx$ o bien $\sigma^2 = \alpha_2 - \mu^2$

así $\alpha_2 = E\left[x^2\right] = \int_2^3 x^2 f(x)dx = \int_2^3 x^2 \frac{4}{65} x^3 dx = \frac{4}{65}\int_2^3 x^5 dx = \frac{4}{65}\left[\frac{x^6}{6}\right]_2^3 = 6,8205$

luego la varianza será $\sigma^2 = 6,8205 - 2,5969^2 = 0,07$

57.- Para la distribución anterior hallar la $E\left[3x^2 - 2x + 1\right]$

Juan Mtnez. de Lejarza
Ignacio Mtnez. de Lejarza

conocemos que $E\left[3x^2-2x+1\right]=3E\left[x^2\right]-2E[x]+1$

Luego 3·6,8205+2·2,5969+1=26,655

58.- Un comercial lleva a cabo las visitas a clientes. Cada cliente que consigue le supone unos ingresos de 150 € y, cada visita que realiza, unos gastos que sufraga él mismo. Por experiencias anteriores se conoce que la probabilidad de que a la segunda visita se consiga la primera venta es 0,25. Si el día de hoy se ha planteado visitar a 10 clientes. ¿Qué gasto medio tendrá por cliente si espera (hoy) unos beneficios de 200 €?

Beneficio=I-G

E[B]= E[I]-E[G] = 200

Gasto = 10 · (gasto por visita)

Ingresos = 150 · (número de éxitos de 10 visitas)

E[I] =150 E[número de éxitos de 10 visitas] ó 150·10E[éxito en visita]

E[número de éxitos de 10 visitas] = 10 · P(éxito)

P(éxito) = ¿ pero … P(primer éxito a segunda prueba) = 0,25

Es decir P(no éxito)· P(éxito)=0,25 ó (1-P(éxito)· P(éxito)=0,25

Como (1-P(éxito)+P(éxito)=1 de donde P(éxito)=0,5

por lo que E[I]=150 ·10·0,5=750 luego si

E[B]=200= 750 –[10·gasto por visita] →550=10·(gasto medio por visita)

Luego gasto medio 55 euros

59.-De las siguientes afirmaciones que se llevan a cabo en los siguientes apartados, establecer cuales son necesariamente ciertas (tautológicas), cuales necesariamente falsas (contradictorias) o cuales son simplemente posibles (contingentes). Justificando la respuesta.

a) si x es v. a. continua y, $x \in \left[0 \quad , \quad 8\right]$ con f(x)=x/32 entonces $\sigma_x^2 = 34$

$\sigma_x^2 = \alpha_2 - \mu_x^2 =$ 32-28,44=3,555 distinto de 34 luego falso, contradictorio

$$\alpha_2 = E\left[x^2\right] = \int_0^8 x^2 f(x)dx = \int_0^8 x^3/32\,dx = \frac{1}{32}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^8 = \frac{1}{128}\cdot 4096 = 32$$

$$\mu_x = \alpha_1 = E[x] = \int_0^8 xf(x)dx = \int_0^8 \frac{x^2}{32}dx = \frac{1}{32}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^8 = \frac{1}{96}\cdot 512 = 5,33$$

b) si x es v. a. continua y, $x \in \begin{bmatrix} 0 & , & 8 \end{bmatrix}$ con f(x)=x/32 entonces $E\left[2x^2 - 34\right] = 30$

$E\left[2x^2 - 34\right] = 2E\left[x^2\right] - 34 =$ 2· 32-34=30 luego necesariamente cierto

$$\alpha_2 = E\left[x^2\right] = \int_0^8 x^2 f(x)dx = \int_0^8 x^3\!/\!_{32}\,dx = \frac{1}{32}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^8 = \frac{1}{128}\cdot 4096 = 32$$

60.-Una máquina fabricó placas de titanio para el Guggenheim a un coste de 1000 euros cada una. Las fabricaba con una holgura al alza entre 0 y 8 cm .Siendo la holgura una variable aleatoria. La holgura de la pieza (siempre a mayor) no podía sobrepasar los 6 cm., las placas con mayor holgura no se podía utilizar y por tanto vender, pero si tenían un valor residual de 500 euros. Las placas útiles se vendían a 1500 cada una. Si para revestir la obra de Gerhy se fabricaron 20000 placas, calcular el beneficio esperado de la empresa que fabricó el revestimiento, conociendo que la holgura tenía una función de densidad f(x)=x/32.

función de beneficio $\begin{cases} si \quad holgura \quad mayor \quad 6 \quad B = -500n \\ si \quad holgura \quad memor \quad 6 \quad B = 500(20000 - n) \end{cases}$

PD = número de piezas desperdiciadas de una , variable aleatoria
PD = 0 es que la holgura es menor que 6
PD =1 es que la holgura es mayor que 6

E[PD] = 0·P(x<6)+1·P(x>6)=0,437

P(x>6)=P(holgura mayor que 6)= $\int_6^8 \frac{x}{32}dx = \frac{1}{32}\left[\frac{x^2}{2}\right]_6^8 = 0{,}437$

n = número de piezas desperdiciadas de 20000= 20000·PD
E[B]= -500E[n]+500(20000-E[n])
E[n]= 20000· E[PD]=8740

Luego E[B] = -4370000+5630000=1260000 euros

61.-El número de errores contables que se cometen semanalmente en una empresa es por término medio de tres y función de cuantía es $P(x) = \frac{e^{-3} \cdot 3^x}{x!}$ **para x= 0,1,2,3….. Si no se cometen errores en una semana el coste es cero, si se cometen menos de tres dicho coste semanal es de 100 euros y si se cometen más dicho coste pasa a ser de 200 euros sea cual fuere su número. Calcular el coste que cabe esperar que tendrá dicha empresa por este concepto en un mes de cuatro semanas.**

F. de cuantía es $P(x) = \dfrac{e^{-3} \cdot 3^{x}}{x!}$

X= número de errores contables en una semana

$$\text{Coste semanal} = \begin{cases} 0 \rightarrow si \cdots X = 0 \\ 100 \rightarrow si \ldots 1 \leq X \leq 2 \\ 200 \rightarrow si \ldots X \geq 3 \end{cases}$$

E[coste semanal] = $0 \bullet P(x=0) + 100 \bullet P(1 \leq x \leq 2) + 200 \bullet +200 \bullet P(x \geq 3)$

$$P(x=0) = \frac{e^{-3} \bullet e^{0}}{0!} = 0{,}04978 \qquad P(1 \leq x \leq 2) = \frac{e^{-3} \bullet 3^{1}}{1!} + \frac{e^{-3} \bullet 2^{2}}{2!} = 0{,}373$$

$$P(x \geq 3) = 1 - P(x \leq 2) = 1 - [P(x=0) + P(1 \leq x \leq 2) = 1 - (0{,}04978 + 0{,}373) = 0{,}57692$$

E [coste semanal]= 0·0,04978+100·0,373+200·0,57692 =152,684
Coste mensual = 4 · coste semanal
E[coste mensual] = 4 ·E[coste semanal]= 4· 152,684=610,736 euros

62.-Un detallista recibe la oferta de adquirir piezas de carne congelada a 22300 pts. la unidad . Se estima que la comercialización de cada pieza produce unos ingresos de 30000 pts. durante el primer mes , perdiendo entonces calidad por lo que su reventa sería al precio de 10000 pts. la unidad.
Si la demanda prevista para el primer mes es la siguiente:

X = número de piezas	P(x)
Menos de 2	0,028
2	0,128
3	0,229
4	0,221
5	0,108
6	0,101
Mas de 6	0,203

Calcular el número de piezas que se deben adquirir para asegurar el mayor beneficio esperado (autor. Joan Baró)

B=Beneficio X= nº de piezas demandadas al mes
S = nº de piezas adquiere el detallista ¿

$$B = f(x,s) = \begin{cases} x > s \rightarrow (30000 - 22300)S \\ x \leq S \rightarrow (30000 - 22300)S + (10000 - 22300)(S - x) \end{cases}$$

$$E\left[B\right]=7700S\cdot P(x<S)+\left[7700x-12300(S-x)\right]P(x\leq S)$$

Por lo que $\max E\left[B\right]=\dfrac{dE\left[B\right]}{dS}=7700P(x>S)-12300P(x\leq S)=0$

$$7700\left[1-F(S)\right]=12300F(S)\quad\rightarrow F(S)=0,385$$

$$acudiendo\, a\, la\;\; función\, de\, cuantía\;\; S=3$$

63.- A una empresa le ofrecen 85000 u.m diarias por un contrato que le obliga a prestar servicios de limpieza a seis salas de espectáculos .Si una vez acabada la función una sala presenta condiciones que podíamos llamar normales el coste de limpieza para la empresa será de 10600 u.m., en el caso de que esté más sucia de lo normal el coste es de 15200.

Si por experiencias anteriores conocemos que una sala esta excesivamente sucia en el 10% de las veces. Calcular el beneficio esperado que obtendrá la empresa de limpieza si acepta el contrato.

B=I-G E[B]=E[I]-E[G]=85000-E[G]

Si Y= número de salas muy sucias de 6

G = (6-Y)10600 + Y·15200 de donde E[G]=(6-E[Y])·10600 +E[Y]·15200

E[Y]=E[6X]=6E[X]

Siendo X una variable aleatoria = número de salas muy sucias de una. Cuya función de cuantía se nos dice:

X	P(X)
0	0,9
1	0,1

luego E[X]=0·0,9+1·0,1=0,1

de donde E[Y]=6·0,1=0,6 por lo que E[G]=57240+9120=66360

de donde E[B]= 85000-66360=18640

64.- Nuestra empresa produce miles de metros de tela al año. Tenemos un coste fijo para dicha producción de 10000 euros .El coste de producción es de 10 euros el metro.

Si esperamos obtener unos beneficios de 3000 euros. ¿A qué precio el metro tendremos que vender nuestra tela? (la producción es una v.a. cuya función de densidad es $f(x)=4x^3\;\; para\, x\in\left[0,1\right]en\, miles$) (se vende toda la producción)

B=I-G por lo que B= (X·1000·P)- (X·1000·10)-10000

Por lo que E[B]=3000= 1000P·E[X] -10000·E[X]-10000

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx = \int_0^1 x\cdot 4\cdot \chi^3 dx = 4\int_0^1 \chi^4 dx = 4\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{5}$$

Luego E[B]= 1000·4/5 ·P-10000·4/5-10000 =3000 de donde P =26,25 euros

65.- Se ha ofrecido a una editorial los derechos de publicación de una obra. Considerando que ello implicará unos costes fijos de 3.000.000 de pts. y que el margen por libro vendido será de 500 pts. La ganancia está en función de los que compren 20 distribuidores y el número de ejemplares que venda cada uno. Cuya distribución de probabilidad es

x	**P(x)**
100	**0,1**
200	**0,2**
500	**0,6**
700	**0,1**

Nos preguntamos si deben adquirirse los derechos de publicación (autor. J. Baró)

Se deberán adquirir si el Beneficio adquiriéndose es mayor que no adquiriéndose, es decir si el Beneficio esperado adquiriéndose es mayor que 0

El beneficio = B = 500·20·X-3.000.000 siendo X= número de ejemplares vende cada distribuidora

Así E[B]= 10.000E[X]-3.000.000

$$E[X]=\sum_{i=1}^{4} \chi_i \cdot P(\chi_i) = 100\cdot 0,1 + 200\cdot 0,2 + 500\cdot 0,6 + 700\cdot 0,1 = 420$$

Luego E[B] = 1.200.000 pts de beneficio esperado ,
luego deben comprarse los derechos

66.- Una asociación benéfica lanza una lotería con 100 boletos de 500 pts. Con tres premios de 25000, 10000 y 5000 pts. ¿Qué beneficio cabe esperar que obtenga una persona que ha comprado dos boletos? (autor.J. Baró)

Sería 97 boletos a 0 pts , 1 a 25000 , 1 a 10000 , 1 a 5000 extracción de dos sin reemplazamiento por lo que las probabilidades asociadas al beneficio serían

x	P(x)
0	9312/9900
5000	194/9900
10000	194/9900
15000	2/9900
25000	194/9900

30000	2/9900
35000	2/9900

E[ganancia] = E[beneficio]-1000 =-200 pts. espera ganar

E[beneficio]= $\sum_{i=1}^{7} x_i \cdot P(x_i) = 0 \cdot \frac{9312}{9900} + 5000 \cdot \frac{194}{9900} + ... + 35000 \cdot \frac{2}{9900} = 800$

67.-Una máquina fabrica piezas de acero de una cierta longitud y que nunca supera los 10 metros. Si la pieza es menor o igual a 4 metros ésta no se puede vender y si supera esta medida se corta el excedente de los cuatro metros y se utiliza el mismo para fundir. Si el coste de producción es de 100 pesetas y una pieza se vende a 600 la unidad. Obtener el beneficio esperado sabiendo que la longitud (L) de la pieza fabricada es en función de X en metros $P(L \le x) = \left(1 - e^{-0,25x}\right) \quad siendo\ x \in [0,10]$

La función de beneficio quedaría

$$600 - 100x \quad si\ x \le 4$$

$$600 - 100x\ si\ 4 \le x \le 10$$

$$E[B] = 600 - 100E[x] = 600 - 100\int_0^{10} x \cdot f(x)dx$$

$$E[x] = \int_0^{10} x \cdot 0,25 \cdot e^{-0,25x} dx \quad dado\ que\ f(x) = F'(x) = 0,25 \cdot e^{-0,25x}$$

$$E[x] = \left| -xe^{-0,25x} \right|_0^{10} + \int_0^{10} e^{-0,25x} dx$$

$$dado\ que\ x = u\ dx = du\ \ y\ \ dv = 0,25e^{-0,25x}dx\ \ v = -e^{-0,25x}$$

así :

$$luego\ \ E[x] = -10e^{-2,5} + \left| \frac{-e^{-0,25x}}{0,25} \right|_0^{10} = -10e^{-2,5} + \frac{1 - e^{-2,5}}{0,25} \quad luego$$

$$E[B] = 600 + 1000e^{-2,5} - 400 + 400e^{-2,5} = 314,96$$

68.- Una fabrica produce piezas de longitud X según una función de densidad $f(x)=3x^2$ si x pertenece al intervalo [0,1] m.. Las piezas son correctas si su longitud está entre 0,7 y 0,8 m. Las piezas correctas se venden a razón de 600 euros. El coste de producción es de 100 euros por metro. Si la pieza no es correcta vuelve a producción. Calcular el beneficio esperado por pieza

Longitud fabricada, por tanto costeada x siendo x una v.a con $f(x)=3x^2$ si x pertenece a [0,1]

Expresión del beneficio =B

$$B=\begin{cases}600-100x & si\ 0,7<x<0,8\\ -100x & si\ x>0,8\\ -100x & si\ x<0,7\end{cases}$$

$$E[B]=\int_0^1 B\cdot f(x)dx=$$

$$=\int_{0,7}^{0,8}(600-100x)f(x)dx-100\int_{0,8}^{1}xf(x)dx-100\int_{0}^{0,7}xf(x)dx=$$

$$\int_{0,7}^{0,8}(600-100x)f(x)dx=\int_{0,7}^{0,8}(600\cdot 3x^2-100\cdot 3x^3)dx=600\left[x^3\right]_{0,7}^{0,8}-100.3\left[\frac{x^4}{4}\right]_{0,7}^{0,8}=$$

$$=600\cdot 0,169-75\cdot 0,1695=101,4-12,7125=88,6875$$

$$-100\int_{0,8}^{1}xf(x)dx=-100\int_{0,8}^{1}3x^3dx=-100\left[\frac{3}{4}x^4\right]_{0,8}^{1}=-100(0,75-0,3072)=-44,28$$

$$-100\int_{0}^{0,7}xf(x)dx=-100\int_{0}^{0,7}3x^3dx=-100\left[\frac{3}{4}x^4\right]_{0}^{0,7}=-100(0,18-0)=-18$$

$$E[B]=88,6875-44,28-18=26,4075$$

Otra manera:

B = I – G E [B]= E[I]-E[G]

$$G=100x \quad si \quad 0<x<1$$

$$Luego\ \ E[G]=100E[x]=100\cdot\int_0^1 x\cdot 3x^2dx=100\cdot 3\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=100\cdot\frac{3}{4}=75$$

$$I=600 \quad si \quad 0,7<x<0,8$$

$$Luego\ \ E[I]=600\cdot P(0,7<x<0,8)=600\cdot\int_{0,7}^{0,8}3x^2dx=600\left[x^3\right]_{0,7}^{0,8}=600\cdot 0,169=101,4$$

Luego E[B]= 101,4-75= 26,4

69.- El tiempo total de producción T está en función del tiempo de realización de una determinada tarea X. Siendo así $T = 2x + 5x^2 + x^3$ **. Conocemos que el tiempo (en horas) necesario para la realización de la tarea es aleatorio con función de densidad.** $f(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x < 0 \\ 2x \; \; si \; \; x \in [0 \; ; \; 0,08] \\ 0,72 \; \; si \; \; x \in [0,8 \; ; \; 1,3] \\ 0 \; si \; \; x > 1,3 \end{cases}$

Hallar el tiempo esperado de producción.

Tiempo esperado de producción = E[T]

$$E[T] = E\left[2x + 5x^2 + x^3\right] = 2E[x] + 5E\left[x^2\right] + E\left[x^3\right]$$

Así:

$$\alpha_1 = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_0^{0,8} x \cdot 2x dx + \int_{0,8}^{1,3} x \cdot 0,72 dx = \frac{2}{3}\left[x^3\right]_0^{0,8} + 0,36\left[x^2\right]_{0,8}^{1,3} = 0,7193$$

$$\alpha_2 = E\left[x^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_0^{0,8} x^2 \cdot 2x dx + \int_{0,8}^{1,3} x^2 \cdot 0,72 dx = \frac{1}{2}\left[x^4\right]_0^{0,8} + 0,24\left[x^3\right]_{0,8}^{1,3} = 0,6092$$

$$\alpha_3 = E\left[x^3\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \cdot f(x)dx = \int_0^{0,8} x^3 \cdot 2x dx + \int_{0,8}^{1,3} x^3 \cdot 0,72 dx = \frac{2}{5}\left[x^5\right]_0^{0,8} + 0,18\left[x^4\right]_{0,8}^{1,3} = 0,57144$$

por lo que E[T]= 2·0,7193+5·0,6092+0,57144= 5,05604

70.-Se ha especificado un ratio de liquidez con la función de distribución incompleta:

$$F(x) = \begin{Bmatrix} 0 & x < 0 \\ ax^2 + bx^3 & 0 \le x \le 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{Bmatrix}$$ **. Si, además conocemos que el valor modal es 1.**

Calcular "a" y "b".

Conocemos que $F(x = 2) = a2^2 + b2^3 = 1 = 4a + 8b$

Conocemos, también que: $M_o = 1 \Rightarrow f'(M_o) = 0$

Dado que $F'(x) = f(x) = 2ax + 3bx^2$ *función de densidad*

Por lo que $f^{'}(x)=2a+6bx$ $y\ sabemos\ que\ 2a+6bM_0=0$
Dado que la moda es 1 $2a+6b=0$
Con las dos ecuaciones

Obtendríamos -4b=1 despejando sustituyendo en la primera:

71.-El estudio que realiza una empresa asesora (A) nos promete que tendremos 400 clientes diarios, otra empresa asesora (B) nos estima en 450 el número de clientes. En un principio valoramos por igual la capacidad predictiva de ambas. Para verificar las apreciaciones de sendas empresas establecemos una experiencia tal que la probabilidad de éxito si damos por válida la estimación de A es 0,7, mientras que si suponemos cierta la de B valoramos dicha probabilidad en 0,6. Con la información anterior. ¿Qué número de clientes cabe esperar que tendremos en nuestra empresa diariamente?

C= número de clientes que es una V.A. de la que sabemos que está entre 400-450

A= acierte empresa A = tengamos 400 clientes
B= acierte empresa B = tengamos 450
P(A)=P(B)= 0,5 a priori

Se realiza un experimento E (éxito en el experimento)
Conocemos que P(E/A)= 0,7 y P(E/B)=0,6
De lo que:

$$P(Acierte\ \ A(sea\ verdad\ \ 400)/E)=\frac{P(E/A).P(A)}{P(E/A)\cdot P(A)+P(E/B)\cdot P(B)}=$$

$$=\frac{0,7\cdot 0,5}{0,7\cdot 0,5+0,6\cdot 0,5}=\frac{0,35}{0,65}=0,538=P(A/E)=P(C=400/E)$$

$$P(Acierte\ \ B(sea\ verdad\ \ 450)/E)=\frac{P(E/B).P(B)}{P(E/B)\cdot P(B)+P(E/A)\cdot P(A)}=$$

$$=\frac{0,6\cdot 0,5}{0,6\cdot 0,5+0,7\cdot 0,5}=\frac{0,30}{0,65}=0,4615=P(B/E)=P(C=450/E)$$

con esta información: la distribución de C será.

C	P(C) a priori	P(C/E) a posteriori de E
400	0,5	0,538
450	0,5	0,4615

Por lo que valor esperado =

$$E\left[C_i\right]=\sum_{i=1}^{2}C_i\underbrace{P(C_i)}_{a\ posteriori}=400\cdot 0,538+450\cdot 0,4615=423,07$$

71 bis. Vamos a fabricar 100 piezas al corte cuyo coste total (materia prima , producción , etc) es de 10 euros unidad.. Si la pieza tiene un holgura de más menos 0,3 mm centrada en 0,5mm. la pieza es correcta y la vendemos a 20 euros , si la

pieza es de tamaño inferior la perdemos totalmente . Si su tamaño es superior a la holgura permitida vuelve a almacén sólo perdiendo el coste de producción que es el 30% del total. Calcular el beneficio esperado, sabiendo que el lugar del corte es una variable aleatoria definida entre 0 y 1 mm y función de densidad f(x)= $3x^2$

BT = 100 Bpieza

$$B^o\ pieza = \begin{cases} -10 \quad si\ x < 0,2 \\ -10+20 \quad si\ 0,2 < x < 0,8 \\ -3\, si\ \ x > 0,8 \end{cases}$$

$$E\left[B\ unidad\right] = -10 \cdot P(x<0,2) + 10 \cdot P(0,2<x<0,8) - 3 \cdot P(x>0,8)$$

$$P(x<0,2) = \int_0^{0,2} f(x)dx = 3\int_0^{0,2} x^2 dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{0,2} = \left(0,008-0\right) = 0,008$$

$$P(0,2<x<0,8) = \int_{0,2}^{0,8} f(x)dx = 3\int_{0,2}^{0,8} x^2 dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0,2}^{0,8} = \left(0,512-0,008\right) = 0,504$$

$$P(x>0,8) = \int_{0,8}^{1} f(x)dx = 3\int_{1}^{1} x^2 dx = 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0,8}^{1} = \left(1-0,512\right) = 0,488$$

$$E\left[B\ unidad\right] = -10 \cdot P(x<0,2) + 10 \cdot P(0,2<x<0,8) - 3 \cdot P(x>0,8) =$$
$$E\left[B\ unidad\right] = -10 \cdot 0,008 + 10 \cdot 0,504 - 3 \cdot 0,488 = -0,08 + 5,04 - 1,464 = 3,496$$

E[BT]=100·E[B unidad]=100·3,496=349,6 euros

71 (3). Nuestra producción consiste en realizar un único agujero a una plancha de titanio .Vamos a tratar 100 planchas cuyo coste total por unidad (materia prima, producción, etc.) es de 10 euros. El agujero ha de tener un diámetro de 0,5 ± 0,3mm .Si es así la pieza es correcta y la vendemos a 80 euros, si el agujero es de tamaño superior perdemos la pieza totalmente. Si su tamaño es inferior a la holgura permitida vuelve a almacén sólo perdiendo el coste de realizar la perforación que es el 30% del total. Calcular el beneficio esperado, sabiendo que el tamaño de la perforación es una variable aleatoria definida entre 0 y 1 mm y función de densidad f(x)= $3x^2$

BT = 100 Bpieza

$$B^o\ pieza = \begin{cases} -3 \quad si\ x < 0,2 \\ -10+80 \quad si\ 0,2 < x < 0,8 \\ -10\, si\ \ x > 0,8 \end{cases}$$

$$E\left[B\ unidad\right]=-3\cdot P(x<0,2)+70\cdot P(0,2<x<0,8)-10\cdot P(x>0,8)$$

$$P(x<0,2)=\int_0^{0,2} f(x)dx=3\int_0^{0,2} x^2dx=3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{0,2}=\left(0,008-0\right)=0,008$$

$$P(0,2<x<0,8)=\int_{0,2}^{0,8} f(x)dx=3\int_{0,2}^{0,8} x^2dx=3\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0,2}^{0,8}=\left(0,512-0,008\right)=0,504$$

$$P(x>0,8)=\int_{0,8}^{1} f(x)dx=3\int_{0,8}^{1} x^2dx=3\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0,8}^{1}=\left(1-0,512\right)=0,488$$

$$E\left[B\ unidad\right]=-3\cdot P(x<0,2)+70\cdot P(0,2<x<0,8)-10\cdot P(x>0,8)=$$
$$E\left[B\ unidad\right]=-3\cdot 0,008+70\cdot 0,504-10\cdot 0,488=-0,024+35,28-4,88=30,376$$

E[BT]=100·E[B unidad]=100·30,376=3037,6 euros

71(4).- Una empresa obtiene unos ingresos de 1000 euros a la semana si la proporción de artículos defectuosos que fabrica no supera el 3% , si dicho porcentaje se sitúa entre el 3 y el 7% los ingresos se reducen a 500 euros ,mientras que dichos ingresos desaparecen si el porcentaje de defectos es mayor. Sabiendo que los gastos fijos semanales son de 300 euros, y conociendo, además, que el porcentaje (no tanto por uno) de artículos defectuosos es una variable aleatoria X definida entre 0 y 10 con función de densidad $f(x)=\frac{1}{50}x$. Calcular el beneficio esperado semanal

$f(x)=\frac{1}{50}x$. Calcular el beneficio esperado semanal

B = I-G E[B] = E[I-G]= E[I] –E[G] = E[I]-300

$$I=\begin{cases}1000 & si\ \ x<3\\ 500 & si\ 3<x<7\\ 0 & si\ \ x>7\end{cases}$$ siendo X = porcentaje semanal de artículos defectuosos

Así:

$$E[I]=1000\cdot P(x<3)+500\cdot P(3<x<7)+0\cdot P(x>7)$$

$$P(x<3)=\int_0^3 f(x)dx=\frac{1}{50}\int_0^3 xdx=\frac{1}{50}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3=\frac{9}{100}=0,09$$

$$P(3<x<7)=\int_3^7 f(x)dx=\frac{1}{50}\int_3^7 xdx=\frac{1}{50}\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^7=\frac{1}{50}\left(\frac{49}{2}-\frac{9}{2}\right)=0,4$$

luego $E[I]=1000\cdot 0,09+500\cdot 0,4=290$ luego

E[B] = E[I]-300= 290-300 = -10

71(5).- En nuestra empresa de fabricación de lunas para automóvil, nuestros cristales tienen por término medio 3 defectos por unidad, con función de cuantía $P(x) = \frac{e^{-3} \cdot 3^x}{x!}$. Si el número de defectos es superior a este valor (3), no los podemos vender y vuelven a reciclaje. El coste de producción de cada luna es de 100 euros y el de venta de 200. Calcular el beneficio esperado de un día de producción en el que hemos elaborado 500 lunas.

Beneficio 500 lunas = 500 (Beneficio de una)

$$B^o una = \begin{cases} (200-100) & si \quad x \leq 3 \\ -100 & si \quad x > 3 \end{cases}$$

$$E\left[B^o 500 lunas\right] = 500 E\left[B^o \, de \; una\right]$$

$$E\left[B^o \, de \; una\right] = 100 \cdot P(x \leq 3) - 100 P(x > 3)$$

$P(x \leq 3)$ =P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)+P(x=3) = 0,6463

$$P(x=0) = \frac{e^{-3} 3^0}{0!} = 0,0497$$

$$P(x=1) = \frac{e^{-3} 3^1}{1!} = 0,1493$$

$$P(x=2) = \frac{e^{-3} 3^2}{2!} = 0,22365$$

$$P(x=3) = \frac{e^{-3} 3^3}{3!} = 0,22365$$

$$E\left[B^o \, de \; una\right] = 100 \cdot P(x \leq 3) - 100 P(x > 3)$$

$$E\left[B^o \, de \; una\right] = 100 \cdot 0,6453 - 100(1 - 0,6463)$$

$$E\left[B^o \, de \; una\right] = 64,63 - 35,37 = 29,26$$

$$E\left[B^o \, de \; 500\right] = 500 \cdot E\left[B^o \, de \; una\right] = 500 \cdot 29,16 = 14630$$

71 (6) La empresa "economía insostenible SA" fabrica bombillas "led". Acaba de recibir un pedido con 200 semiconductores que ha costado 400 euros. Cada bombilla led que se monta lleva un semiconductor, Un semiconductor es correcto si su longitud es de 2±1 mm. Si esta longitud es inferior se desecha y el proveedor devuelve el dinero y si es superior se corta el sobrante con un coste añadido por ello de 0,5 euros por cada uno. Si los costes fijos por el de montaje de cada bombilla "led" suponen 3 euros. Y se vende cada bombilla a 8. Sabiendo, además, que la longitud del semiconductor tiene un comportamiento aleatorio según especificaciones de $f(L_s) = \frac{1}{8} L_s \quad Para \;\; L_s \in \left[0;4\right]$

a) Calcular el número de semiconductores válidos que cabe esperar habrá en el pedido recibido.

b) Calcular el beneficio que cabe esperar que obtendremos al montar las bombillas con el pedido recibido.

a) Semiconductores válidos cabe esperar de 200

$$E\left[V_{200}\right]=E\left[200V_1\right]=200E\left[V_1\right]$$

$$V_1 \equiv n^{o}\ de\ válidos\ de\ uno \qquad \begin{array}{cc} V_1 & P(V_1) \\ 0 & P(L_s<1) \\ 1 & P(L_s>1) \end{array}$$

$$L_s \equiv x$$

$$P(L_s<1)=\int_0^1 f(x)dx=\int_1^1 \frac{1}{8}xdx=\frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{16}=0,0625$$

$$P(L_s>1)=1-P(L_s<1)=1-0,0625=0,9375$$

$$E\left[V_1\right]=0\cdot 0,0625+1\cdot 0,9375=0,9375$$

$$luego\ \ E\left[V_{200}\right]=200\cdot E\left[V_1\right]=200\cdot 0,9375=187,5$$

b)

$$E\left[B_t\right]=E\left[V_{200}\cdot B_{pm}\right]=E\left[V_{200}\right]\cdot E\left[B_{pm}\right]$$

$$B_{por\ montaje}=\begin{cases} 8-3-2\ \ si\ \ 1<L_s<3 \\ 8-3-2-0,5\ \ si\ \ L_s>3 \\ 0\ \ si\ \ L_s<1 \end{cases}$$

$$E\left[B_{pm}\right]=3\cdot P(1<L_s<3)+2,5\cdot P(1<L_s<3)+0\cdot P(L_s<1)$$

$$x=L_s$$

$$P(1<L_s<3)=\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3 \frac{1}{8}xdx=\frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3=\frac{9}{16}-\frac{1}{16}=0,5$$

$$P(L_s>3)=\int_3^4 f(x)dx=\int_3^4 \frac{1}{8}xdx=\frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^4=\frac{16}{16}-\frac{9}{16}=0,4375$$

$$E\left[B_{pm}\right]=4\cdot P(1<L_s<3)+3,5\cdot P(1<L_s<3)+0\cdot P(L_s<1)$$

$$luego\ \ E\left[B_{pm}\right]=3\cdot 0,5+2,5\cdot 0,4375=1,5+1,09375=2,59375\ euros$$

71(7).- Nuestra empresa realiza transportes de ganado .. Si en el transporte empleamos menos de 9 litros de combustible nuestro beneficio es de 30 euros, si gastamos entre 9 y 11 el beneficio es de 20, mientras que si nuestro gasto combustible es superior a 11 perdemos 5 euros. Si en el día de hoy vamos a realizar 5 transportes de cerditos. Calcular el beneficio esperado que tenemos para el día de hoy sabiendo que el consumo de combustible es una variable aleatoria con $f(x) = \frac{1}{504}x^2$ **para**
$x \in [6,12]$ *litros*

$$B^{o}\,dia = 5B^{o}\,transporte \rightarrow E[B^{o}\,dia] = E[5 \cdot B^{o}\,transporte] = 5E[B^{o}\,Transporte]$$

$$B^{o}_{t} = B_t = \begin{cases} 30 \ \ si \ \ c < 9 \\ 20 \ si \ 9 < c < 11 \\ -5 \ si \ c > 11 \end{cases}$$

$$E[B_t] = 30 \cdot P(c < 10) + 20P(10 < c < 11) - 5P(c > 11)$$

$$P(c < 9) = \int_6^9 \frac{1}{504}x^2 dx = \frac{1}{1512}\left[x^3\right]_6^9 = \frac{1}{1512}(729 - 216) = 0,3392$$

$$P(\ 9 < c < 11) = \int_9^{11} \frac{1}{504}x^2 dx = \frac{1}{1512}\left[x^3\right]_9^{11} = \frac{1}{1512}(1331 - 729) = 0,3981$$

$$P(\ c > 11) = \int_{11}^{12} \frac{1}{504}x^2 dx = \frac{1}{1512}\left[x^3\right]_{11}^{12} = \frac{1}{1512}(1728 - 1331) = 0,2625$$

$$E[B_t] = 30 \cdot 0,3392 + 20 \cdot 0,3981 - 5 \cdot 0,2625 = 10,176 + 7,962 - 1,3125 = 16,8$$

$$B^{o}_{t} = B_t = 19,45 \rightarrow E[B^{o}\,dia] = 5 \cdot 16,8 = 84$$