CONVERGENCIA Y TEOREMAS LÍMITE

En este capítulo trataremos de las propiedades asintóticas que se dan en las variables aleatorias, o mejor, en las sucesiones de variables aleatorias. Estas propiedades y teoremas son, y han sido, imprescindibles para el desarrollo de la inferencia estadística

1. Convergencia de sucesiones de variables aleatorias.

Consideramos una sucesión infinita de variables aleatorias $\{X_n\}$: $\{X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots\}$

Donde cada X_i es una variable aleatoria con su correspondiente distribución de probabilidad. , puede darse el caso que la sucesión converja a una variable aleatoria (límite) X, con una distribución de probabilidad asociada.

Por ejemplo: $\{X_n\}$ con $X_n \rightarrow B(n,p)$ para n=1,2,….

Juan Mtnez. de Lejarza
Ignacio Mtnez. de Lejarza

Así, y definidas todas las variables aleatorias que componen la sucesión sobre el mismo espacio probabilístico; dicha sucesión podrá converger a una variable aleatoria X de distintas maneras o tipos:

Convergencia casi-segura
Convergencia en probabilidad
Convergencia en media cuadrática
Convergencia en ley (o distribución)

Así:

CONVERGENCIA CASI SEGURA.

Una sucesión de variables aleatorias, $\{X_n\}$, converge con probabilidad 1, o de forma casi segura,
a una variable aleatoria X (que puede degenerar en una constante K) cuando se cumple que:

$$P(\lim_{n\to\infty} x_n = X) = 1$$

de esta forma interpretaremos que

$$x_n \xrightarrow{c.s} X$$

cuando la probabilidad de que en el límite la sucesión de variables aleatorias y aquella a la que converge sean iguales es uno

CONVERGENCIA EN PROBABILIDAD:

Una sucesión de variables aleatorias, $\{X_n\}$, converge en probabilidad ,
a una variable aleatoria X (que puede degenerar en una constante K) cuando se cumple que:

$$\forall\varepsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P\left[|x_n - x| \geq \varepsilon\right] = 0$$

o bien considerando su complementario

$$\lim_{n\to\infty} P\left[|x_n - x| \leq \varepsilon\right] = 1$$

de esta forma interpretaremos que

$$x_n \xrightarrow{p.} X$$

cuando en el límite , la probabilidad de que sucesión de variables aleatorias y aquella a la que converge difieran (en valor absoluto) en un valor mayor ε (pequeño) es cero (o complementariamente).

Ha de tenerse en cuenta en este caso que la sucesión sólo implica a la sucesión de las probabilidades de los sucesos y no a las variables en sentido matemático

CONVERGENCIA EN MEDIA CADRÁTICA

Una sucesión de variables aleatorias, $\{X_n\}$, converge en media cuadrática, a una variable aleatoria X (que puede degenerar en una constante K) cuando se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} E\left[(x_n - x)^2\right] = 0$$

de esta forma interpretaremos que

$$x_n \xrightarrow{m2} X$$

cuando en el límite , la dispersión de la sucesión de variables aleatorias tomando como origen de ésta la variable a la que converge , es 0. Es de importancia notar que pueden plantearse diversos tipos de convergencias en media dependiendo del orden r del exponente (en este caso 2)

- **CONVERGENCIA EN LEY (O EN DISTRIBUCIÓN)**

Una sucesión de variables aleatorias, $\{X_n\}$, converge en ley o en distribución a una variable aleatoria X , cuando se cumpla alguna de las siguientes condiciones , en el convencimiento de que si se cumple una se cumplirán las restantes :

a) Si para toda función real **g** se verifica que :

$$\lim_{n\to\infty} E[g(x_n)] = E[g(x)]$$

b) Si para todo número real **t** se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(e^{t x_n}\right) = E\left(e^{tx}\right)$$

c) Si para todo par de puntos a y b ; tales que b > a se cumple que :

$$\lim_{n\to\infty} P(a < x_n < b) = \lim_{n\to\infty}\left[F_{x_n}(b) - F_{x_n}(a)\right] = P(a < x \le b) = F_x(a) - F_x(b)$$

d) Si para todo punto de X en el que las funciones de distribución de las variables de la sucesión sean continuas,

se cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$$

de esta forma interpretaremos que

$$x_n \xrightarrow{d} X$$

cuando en el límite el comportamiento de la función de distribución de la sucesión de variables aleatorias y la de aquella a la que converge son iguales .

Existen relaciones de implicación (demostrables) entre los diversos tipos de convergencia:

Así:

La convergencia en media cuadrática implica la convergencia en probabilidad, no siendo cierto (generalmente) el comportamiento inverso:

Luego $x_n \xrightarrow{m2} X \quad \underset{\text{no}}{\overset{\text{si}}{\rightleftarrows}} \quad x_n \xrightarrow{p.} X$

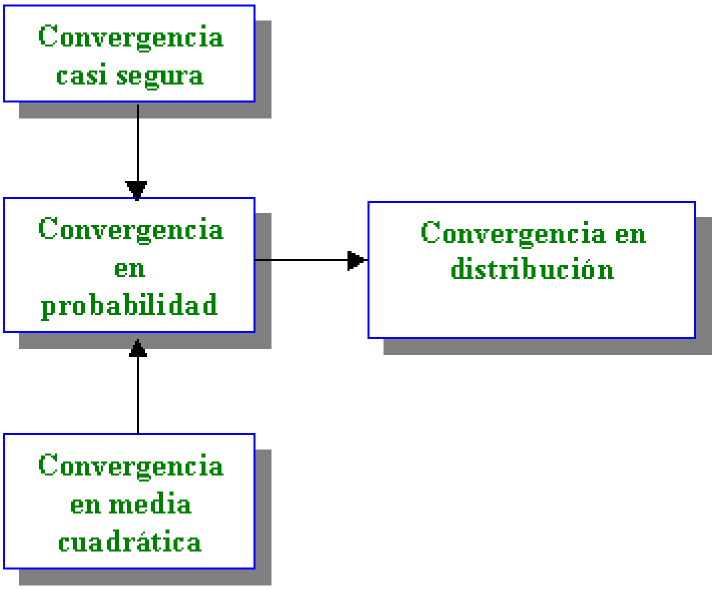
La convergencia casi segura implica la convergencia en probabilidad , no siendo cierto (generalmente) el
planteamiento inverso :

Luego $x_n \xrightarrow{c.s} X \quad \underset{\text{no}}{\overset{\text{si}}{\rightleftarrows}} \quad x_n \xrightarrow{p.} X$

La convergencia en probabilidad implica la convergencia en distribución, no siendo cierto (generalmente) el
planteamiento contrario:

Luego $x_n \xrightarrow{p.} X \quad \underset{\text{no}}{\overset{\text{si}}{\rightleftarrows}} \quad x_n \xrightarrow{d} X$

Esquemáticamente quedaría:



2. Leyes de los grandes números. Teoremas límite

Reciben el nombre de leyes de los grande números aquellas que parten del comportamiento asintótico de la variable η_n; que no es otra cosa que el valor medio de las n variables que componen una sucesión ;

Así si estamos ante una sucesión $\{X_n\}$

establecemos que

$$\eta_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

el comportamiento de η_n da lugar a las denominadas leyes de los grandes números ; de manera que , si la convergencia que se produce lo es en *"probabilidad"* , dará lugar a una ley ***débil*** de los grandes números . Si la convergencia que se da es en forma *"casi segura"* la ley a la que de lugar se conocerá como ley ***fuerte*** de los grandes números. Y, por último, si la convergencia a que da lugar el planteamiento lo es en *"distribución"*, y además esta es normal, dará lugar a lo que conocemos como teoremas centrales del límite.

- Convergencia en probabilidad ----- ley débil de los grandes números
- Convergencia casi segura --- implica ---- Convergencia en probabilidad -- ley fuerte de los grandes números.
- Convergencia el distribución (normal) ----teoremas centrales del límite

3. Ley débil de los grandes números

Concretando lo antes citado. Una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}$

cumple la ley débil de los grandes números si dada una sucesión de constantes $\{C_n\}$

la variable

$$\eta_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

verifica que

$\eta_n \xrightarrow{p} c_n$ es decir se cumpla que :

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\eta_n - c_n\right| \le \varepsilon\right] = 1$$

pudiéndose interpretar como que para un valor muy alto de n (en el límite) no deben existir diferencias entre el valor medio de una sucesión y una determinada constante.

Dentro de la ley débil de los grandes números se pueden establecer algunos teoremas importantes y que enunciamos sin demostrar.

- **Teorema de Chebyschev**

Partiendo del planteamiento general, es decir que dada una sucesión $\{X_n\}$

en la que concretamos

$$\eta_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

el teorema de Chebyshev hace verificar que :

$$\eta_n \xrightarrow{p} E\left[\eta_n\right]$$

o , lo que es lo mismo

$$\eta_n \xrightarrow{p} \overline{\mu}_n$$

por lo que podría demostrarse que

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\eta_n - E\left[\eta_n\right]\right| \geq \varepsilon\right] = 0$$

Es decir, en el limite, la probabilidad de que haya diferencias entre la variable valor medio de la sucesión y el valor esperado de la variable valor medio de dicha sucesión es cero. Como caso particular que ayuda a comprender mejor esta situación, tendríamos que: si las variables aleatorias de la sucesión tienen todas la misma distribución, la variable η_n (valor medio de la sucesión) converge en probabilidad a la media de la distribución común, μ

- **Teorema de Khintchine**

El teorema se basa en las mismas condiciones de partida que el de Chebyshev, incidiendo además en que las variables que forman la sucesión han de ser independientes y todas con una misma y común distribución de probabilidad; si así ocurre se puede demostrar que:

$$\eta_n \xrightarrow{p} \mu$$

siendo μ la media común a las variables que forman la sucesión

Evidentemente, y por lo enunciado, puede tomarse este teorema como el caso particular (ya citado) del teorema de Chebyshev

Es posible generalizar el teorema de Kintchine para todos los momentos ordinarios y no sólo para la media con lo que tendremos que:

$$a_r \xrightarrow{p} \alpha_r$$

es decir la variable momento ordinario de orden r de la sucesión converge en probabilidad al momento de orden r de la distribución común a todas las variables que forman la sucesión.

- **Teorema de Bernouilli.**

Con el mismo planteamiento que el anterior, es decir;

Dada una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}$

y estableciendo una nueva variable

$$\eta_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

y siendo ,en este caso, las variables que forman la sucesión dicotómicas de parámetro p

El teorema de Bernouilli plantea que

$$\eta_n \xrightarrow{p} p$$

o , de otra manera

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\eta_n - p\right| \geq \varepsilon\right] = 0$$

Es decir , que la variable media de la sucesión de dicotómicas de parámetro p converge en probabilidad al parámetro p común a todas ellas

De otro modo podríamos plantear la sucesión de (n) dicotómicas de parámetro p como una binomial y así:
la sucesión $\{X_n\}$ sería una B(X, n, p)

donde la variable aleatoria anterior

$$\eta_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

sería, ahora, la razón frecuencial de éxitos o frecuencia relativa del suceso , X/n ; de esta manera el teorema de Bernouilli nos diría que:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right] = 0$$

ó lo que es lo mismo

$$\frac{X}{n} \xrightarrow{p} p$$

es decir, "la razón frecuencial de éxitos converge en probabilidad a la probabilidad de éxito de una binomial"

Para demostrarlo partimos de la conocida desigualdad de Chebyshev, así:

$$\forall k < 0 \qquad P(\mu - k\sigma < x < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

haciendo

$$k = \varepsilon\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}$$

y dado que conocemos que en la binomial

$$\mu = np \quad y \quad \sigma = \sqrt{npq}$$

tendremos que :

$$P(n \cdot p - \varepsilon n < x < n \cdot p + \varepsilon n) \geq 1 - \frac{p \cdot q}{\varepsilon^2 \cdot n}$$

dividiendo por n (los miembros del primer término) y despejando tendríamos:

$$P\left(\left|\frac{x}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p \cdot q}{\varepsilon^2 \cdot n}$$ o , lo que es lo mismo

$$P\left(\left|\frac{x}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) < \frac{p \cdot q}{\varepsilon^2 \cdot n}$$

y, dado que el valor máximo de p·q=0,4

tendremos que:

$$P\left(\left|\frac{x}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) < \frac{1}{4\,\varepsilon^2 \cdot n} \qquad \textbf{(1)}$$

y que evidentemente tiende a 0 cuando n tiende a infinito :

demostrando que

$$\frac{X}{n} \xrightarrow{p} p$$

Como curiosidad, se ha establecido en **(1)** una cota de probabilidad que nos permite calcular la probabilidad máxima con la que diferirán en una determinada cantidad la "razón frecuencial de éxitos" y la "probabilidad de éxito" de una binomial.

Así, y como ejemplo, nos planteamos;

Si nos planteamos que la probabilidad sea inferior a 0,10 , para el hecho de que , al lanzar una moneda con el ánimo de conseguir caras , la diferencia entre las que han salido y las que debieran haber salido (la mitad) sea superior al 2% , ¿Cuántas veces debemos de lanzar la moneda?

Nos planteamos conocer n (número de lanzamientos) , despejando de (1)

Tendremos

$$n < \frac{1}{4P\left(\left|\frac{x}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \cdot \varepsilon^2} = \frac{1}{4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}02^2} = 6250$$

veces lanzaremos para que la diferencia entre el número de caras que han de salir (3125) y las que verdaderamente saldrán, sea mayor del 2% (mas, menos 125 caras), con una probabilidad inferior a 0,1.

Es conveniente, por último, precisar, que el teorema de Bernouilli demuestra la estabilidad de las frecuencias relativas de éxito entorno a la probabilidad de éxito, no asegurando que sea la verdadera probabilidad de éxito la derivada de las frecuencias relativas de éxito

4. Ley fuerte de los grandes números

Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ se comporta u obedece la ley fuerte de los grandes si: existiendo dos sucesiones de constantes $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$

La nueva variable

$$\gamma_n = x_1 + x_2 + \cdots x_n$$

en combinación con las sucesiones de constantes , cumple

$$\frac{\gamma_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{c.s.} 0$$

sea

$$a_n = \mu_1 + \mu_2 + \cdots \mu_n$$ la suma de constantes cada una de ellas la media de cada una de las variables de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

y :

$$b_n = n$$

tenemos , además , que

$$\frac{a_n}{n} = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n}{n} = \overline{\mu}_n$$

Dado que

$$\gamma_n = x_1 + x_2 + \cdots x_n \quad \text{y} \quad \eta_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

tendremos que :

$$\frac{\gamma_n}{n} = \eta_n$$

Y así

$$\frac{\gamma_n' - a_n}{b_n} = \frac{\gamma_n'}{n} - \frac{a_n}{n} = \frac{\gamma_n'}{n} - \overline{\mu}_n = \eta_n - \overline{\mu}_n \xrightarrow{c.s.} 0$$

explicitándose , de esta manera más simple , la ley fuerte de los grandes números.

Dentro de la ley fuerte de los grandes números se pueden establecer algunos teoremas importantes y que enunciamos sin demostrar.

- **Teorema de Kolmogorov.**

Dada una sucesión de variables aleatorias independientes $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ con medias μ_n y varianza σ_n^2

estableciéndose

$$\eta_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \qquad \overline{\mu}_n = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n}{n}$$

se cumple que existe ley fuerte de los grandes números ; así

$$\eta_n - \overline{\mu}_n \xrightarrow{c.s.} 0 \qquad \text{ó bien .} \qquad \eta_n \xrightarrow{c.s.} \overline{\mu}_n$$

Por lo que la variable aleatoria media de una sucesión converge de manera casi segura a la media de las medias de las variables que forman la sucesión .

- **Teorema de Glivenko-Cantelli**

Si consideramos una muestra como una sucesión de variables aleatorias $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que procede de ser un subconjunto de la población , tomada ésta como otra sucesión de tamaño mayor (máximo-completa-segura) . Evidentemente con la misma función de probabilidad para todas las variables de la sucesión (muestra) ; el teorema de Glivenko-Cantelli nos indica que la función de distribución de probabilidad común a las variables de la sucesión muestra , convergen de manera "casi segura" a la verdadera función de distribución de la población , así :

Si denominamos DI a las máximas diferencias que pueden existir entre los valores que proporciona una función de distribución (muestra-sucesión) y otra (función de distribución de la población)

$$DI_n = \sup_{-\infty < x < \infty} \left| F_n^{muestra}(x) - F^{población} \right|$$

tendremos que se cumple que

$$P\left(\lim_{n\to\infty} DI_n = 0\right) = 1 \quad \text{luego} \quad DI_n \xrightarrow{c.s.} 0$$

5. Teoremas Centrales del Límite

La que podemos denominar familia de los teoremas límite tiene como punto de partida la siguiente situación:

Si estamos ante una sucesión de variables aleatorias $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

y establecemos que

$$\gamma_n = x_1 + x_2 + \dots + n_n$$

se cumplirá que:

$$\eta_n = \frac{\gamma_n - E[\gamma_n]}{\sqrt{D(\gamma_n)}} \xrightarrow{d} N[0,1]$$

en donde

$D(\gamma_n)$

es la desviación típica y tiene carácter finito :

de otra manera, podemos decir que la tipificada de la variable aleatoria suma de variables aleatorias de una sucesión converge en "distribución" a una normal 0,1.

- **Teorema de Moivre**

Es el primer teorema central del límite, históricamente hablando (1756).

Dada una sucesión de variables aleatorias $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de manera que cada una de ellas tenga una distribución

$$x_n \Rightarrow B(n,p)$$

donde p=q=0,5 (Moivre introdujo la restricción p=q=0,5, que no es necesaria tras la generalización del teorema por Laplace) se establece que la nueva variable sucesión

$$\eta_n = \frac{x_n - E[x_n]}{\sqrt{D(x_n)}} = \frac{x_n - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}} \xrightarrow{d} N[0,1]$$

Lo demostraremos mediante la convergencia de la F.G.M.

Así la F.G.M de las variables de la sucesión (binomiales) X_n serán del tipo:

$$\varphi_{x_n}(t) = \left(p e^t + q\right)^n$$

en consecuencia la F.G.M. de la sucesión η_n será :

$$\varphi_{\eta_n}(t) = e^{-\frac{\mu}{\sigma}\cdot t} \cdot \left(p e^{\frac{t}{\sigma}} + q\right)^n$$

Pudiéndose probar que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\eta_n} = e^{t^2/2}$$

que es la F.G.M. de la N[0,1]

Del teorema de Moivre-Laplace se deduce fácilmente que una distribución binomial puede aproximarse a una distribución normal de media n·p y desviación típica $\sqrt{npq}$ cuando n tienda a infinito.

- **Teorema Central del Límite; Forma de Lyapounov**

Se trata de la primera (1901) demostración rigurosa de un teorema central del límite, aunque como dijimos antes la forma de Moivre es anterior es solo válida para el caso de distribuciones binomiales. Así

dada una sucesión de variables aleatorias $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ independientes de manera que las variables tendrán de medias y varianzas :

$$E(x_i) = \mu_i \quad \text{y} \quad D^2(x_i) = \sigma_i^2$$

tendremos que la sucesión η_n

definida como :

$$\eta_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}}$$

converge en distribución a una N[0,1]

- **Teorema Central del Límite; Forma Lindeberg-Lévy**

En cierto modo es un caso particular de la forma de Lyapounov dado que las premisas previas son más restrictivas; así

dada una sucesión de variables aleatorias $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ independientes y con la misma distribución , de manera que las variables tendrán la misma media y varianza :
$E(x_i) = \mu$ y $D^2(x_i) = \sigma^2$
tendremos que:

La sucesión η_n definida como:

$$\eta_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot \mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

converge en distribución a una N[0,1]

de donde

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \rightarrow N\left[n \cdot \mu, \sigma\sqrt{n}\right]$$
: es decir ;

que si sumamos un gran número de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas , con la misma media y varianza ; esta suma se distribuirá normalmente con media n veces la media común y , desviación típica raíz cuadrada de n veces la desviación típica común.

Para demostrar este teorema vamos a probar que la F.G.M . de η_n tiende a la F.G.M. de una distribución Normal reducida cuando n tiende a infinito ; esto es :

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\eta_n} = e^{\frac{t^2}{2}}$$

para ello consideramos las nuevas variables tales que :

$w_i = x_i - \mu$ para i = 1,2,3,......n . de manera que :

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{\sigma\sqrt{n}}$$

como todas las X son estocásticamente independientes y están idénticamente distribuidas , las w_i también serán independientes y en consecuencia tendrán la misma distribución ; así y en consecuencia la F.G.M. de η_n será:

$$\varphi_{\eta_n}(t) = \prod_{i=1}^{n}\left(\varphi_{w_i}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right) = \left[\varphi_{w_i}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

por lo que debemos obtener primero :

$$\varphi_{w_i}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = E\left[e^{\frac{t w_i}{\sigma\sqrt{n}}}\right]$$

$$\varphi_{w_i}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = E\left[1 + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} w_i + \frac{t^2}{2\,\sigma n^2} w_i^2 + \phi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right] =$$

desarrollando en serie tendremos:

$$= 1 + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} E[w_i] + \frac{t^2}{2n\,\sigma^2} E[w_i^2] + E\left[\phi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]$$

dado que :

$E[w_i] = 0$ y $E[w_i^2] = \sigma^2$

tendremos que

$$\varphi_{\eta_n}(t) = \left[1 + \frac{t^2}{2n} + E\left[\phi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\right]^n$$

si tomamos límites cuan n tiende a infinito la función ϕ es un infinitésimo de orden superior a $\frac{t^2}{2n}$ y por tanto :

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{\eta_n}(t) = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{t^2}{2n}+E\left[\phi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t^2}{2n}\right)^n = e^{t^2/2}$$

que es la expresión de la F.G.M. de la Normal (0;1).

Esta demostración es sólo válida para el caso en el que las F.G.M. existan; si no fuera así utilizaríamos de manera análoga las funciones características.

Del propio teorema central del límite en forma Lindeberg-Lévy se infiere, lo que podríamos denominar su *versión en media*; así, dada una sucesión de variables aleatorias $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ independientes y con la misma distribución de manera que las variables tendrán la misma media y varianza:

$$E(x_i) = \mu \qquad D^2(x_i) = \sigma^2$$

y tenemos la sucesión :

$$\omega_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$$

es decir, la media de la sucesión ; y dado que conocemos por Lindeberg-Lévy que : La sucesión η_n definida como :

$$\eta_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\cdot\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

converge en distribución a una N[0,1] luego para la nueva sucesión w tendremos que: la sucesión η_n definida como :

$$\eta_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

converge en distribución a una N[0,1]

de donde

$$\omega_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \xrightarrow{d} N\left[\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

: es decir, que la media aritmética de un gran número de variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, con la misma media y varianza; se distribuirá normalmente con media la media común y, desviación típica, la desviación típica común dividida por raíz de n.

La gran importancia de esta convergencia y forma del teorema , radica en su aplicabilidad en la relación muestra-población , y así podemos establecer que : "sea cual fuere la distribución de la población, si extraemos una muestra aleatoria de suficiente tamaño, y de forma que las extracciones sean independientes entre sí; la media de esta muestra tiende a una normal, con media la media de la población, y desviación típica, la desviación típica de la población dividida por la raíz del tamaño muestral".

- **Teorema Central del Límite; convergencia de la distribución de Poisson**

Realmente se trata de un caso particular de aplicación del T.C.L. forma Lindeberg-Lévy ; la particularidad reside en que las variables aleatorias que forman la sucesión son o se distribuyen según una Poisson de parámetro λ . El hecho de que lo tratemos aquí radica en su utilidad y practicidad, y así:

Dada una sucesión de variables aleatorias $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde $X_i \rightarrow$ Poisson(λ) por lo que la media común es λ y su varianza común , también

En aplicación del TCL tendremos que

La sucesión η_n definida como:

$$\eta_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n \cdot \mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

converge en distribución a una N[0,1]

Dado que la distribución de Poisson cumple el teorema de adición para el parámetro λ , tendremos que:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = J \rightarrow \wp\left[\lambda_j = n \cdot \lambda\right]$$

de donde conoceremos que

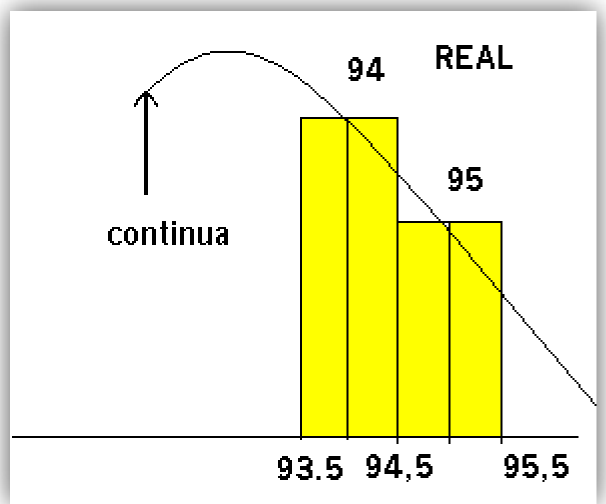
$$\mu_j = \lambda_j = n \cdot \lambda = n \mu$$

y la desviación típica será

$$\sigma_j = \sqrt{\lambda_j} = \sqrt{n\lambda} = \sigma\sqrt{n}$$

por lo que

$$\eta_n = \frac{J - n\cdot\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{J - \lambda_j}{\sqrt{\lambda_j}} \xrightarrow{d} N[0,1]$$



De donde se deduce que una distribución de Poisson cuando λ tiende a infinito converge a una normal con media λ y desviación típica raíz de λ

Apéndice 1:

Corrección por convergencia discreta-continua

Hemos comprobado cómo es posible que ciertas distribuciones discretas (binomial, Poisson, etc.) converjan a otra distribución, principalmente la normal, que es de carácter continuo. El hecho de utilizar la distribución normal (función de distribución continua) para la consecución de probabilidades que parten de un escenario real discreto hace que, en ocasiones, las probabilidades calculadas no se ajusten, o aproximen, correctamente a las que hubiésemos obtenido sin aplicar la convergencia. Es, por ello, que es necesario realizar unas pequeñas correcciones que denominamos de convergencia discreta - continua. Ilustremos dichas correcciones con un ejemplo:

Supongamos que la variable aleatoria X sigue una Poisson de parámetro λ =100 y pretendemos calcular la probabilidad de que X tome valores inferiores o iguales a 95; sería

$X \Rightarrow \wp(100)$ ¿

$$P(x \leq 95) = \sum_{i=1}^{95} \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

siendo dicho resultado realizado directamente el valor 0,33119174

dado que nos encontramos con una Poisson de λ =100 podemos aplicar la convergencia Poisson-Normal y así

$$X \Rightarrow N\left[100; \sqrt{100}\right]$$

por lo que la probabilidad pedida, quedaría :

$$P(x \leq 95) = P\left(t \leq \frac{95-100}{10}\right) = P(t \leq -0{,}5)$$

cuyo valor es 0,309

se observa que ambos valores discrepan ; si bien , claro está , estamos utilizando una aproximación, las diferencias entre valores parecen excesivas y pueden mejorarse.

El error cometido parece estar en la diferencia de utilización discreta-continua. En la utilización de la distribución de Poisson estaba incluido el valor 95, en el caso de la normal no se llegaba a dicho valor, precisamente por su carácter continuo.

Queda, como se observa, una zona que no contempla la función continua por ello, en este caso, es conveniente ampliar la zona para la que se va a calcular su superficie (probabilidad) tomando no 95 si no 95,5, de esta manera quedaría incluida la probabilidad hasta el valor 95 inclusive, así:

$$P(x \leq 95) = P\left(t \leq \frac{95{,}5-100}{10}\right) = P(t \leq -0{,}45)$$ cuyo resultado es 0,326 , mucho más próximo al verdadero valor sin aplicar convergencia.

Apéndice 2.

Utilización de convergencias en el caso de Binomial y Poisson

Para aclarar la utilización de las convergencias en los casos de distribuciones de Poisson y Binomial; ya que conocemos el teorema de Moivre, la convergencia de la distribución de Poisson y la anteriormente conocida Binomial-Poisson, establecemos los siguientes criterios y posibilidades.

- Si n ≥ 50 y p < 0,1 la distribución Binomial podrá aproximarse bien por la Poisson
- Siempre que el parámetro n se grande y p no sea pequeña (p >0,1) debemos aproximar por la distribución normal
- Si p es pequeño pero el producto npq es grande (npq>5) será preferible la aproximación Normal a la aproximación por Poisson