Ejercicios T2 y T3.- DISTRIBUCIONES MUESTRALES Y ESTIMACIÓN PUNTUAL

1. Se ha realizado una muestra aleatoria simple (m.a.s) de tamaño 10 a una población considerada normal. Llegando a la conclusión que su varianza muestral es 4. Calcular la probabilidad. $P\left[\left|\bar{x}-\mu\right| < 1{,}22\right]$

conocemos relacionado con lo planteado que

$$\frac{\bar{x}-\mu}{s}\sqrt{n-1} \rightarrow t_{n-1}$$

dado que conocemos n=10 y S=2

podemos llevar a cabo los correspondientes cambios en ambas partes de la inecuación y así:

$$P\left[\left|\frac{\bar{x}-\mu}{S}\sqrt{n-1}\right| < \frac{1{,}22}{2}\sqrt{10-1}\right] = P\left[\left|t_{n-1}\right| < 1{,}83\right]$$

en tablas y dado que es en valor absoluto será la probabilidad comprendida entre -1,83 y 1,83 de la tabla de la t de student con 9 gl.; (ir a script de la t de student) siendo dicho valor 0,9

---

2. Los errores que se cometen al estimar el ahorro familiar de un país siguen una distribución normal de media 0 y desviación .Comprobar que la función

$$\frac{n \cdot \bar{e}^2}{\sigma_e^2}$$

sigue una distribución jhi-dos con un grado de libertad, sabiendo que n es el tamaño muestral y $\bar{e}$ el error medio muestral.

Una

$$\chi_1^2 = \left(N[0{,}1]\right)^2$$

si los errores siguen

la media muestral de los errores será

$$\bar{e} = N\left[0;\frac{\sigma_e}{\sqrt{n}}\right]$$

tipificándola luego al cuadrado sería:

$$T^2 = \frac{n\overline{e}^2}{\sigma_e^2} \to \left(N[0,1]\right)^2 = \chi_1^2$$

---

3. Para conocer la proporción de españoles a los que no les gusta el futbol. Realizamos una encuesta que da lugar a una muestra (m.a.s) de tamaño 100. Si por estudios anteriores muy precisos se conoce que dicha proporción es del 40%. Calcular la probabilidad de que nuestra muestra de lugar a una proporción superior al 46%.

Si la muestra es m.a.s de n=100 y por estudios anteriores sabemos que p=0,4 y por tanto q=0,6 y conocemos que:

$$\hat{p} \to N\left[p; \sqrt{\frac{pq}{n}}\right] \to N\left[0{,}4; \sqrt{\frac{0{,}4 \bullet 0{,}6}{100}}\right] \to N[0{,}4; 0{,}049]$$

(ir a script de la mormal)

luego la

$$P(\hat{p} > 0{,}46) = P(t > \frac{0{,}46 - 0{,}4}{0{,}049}) = P(t > 1{,}22) = 0.111$$

---

4. El número de automóviles que repostan por término medio en una gasolinera en una hora es un valor desconocido. Para estimar dicho valor uno de los empleados plantea que dicho valor es de 4 vehículos a la hora otro, en cambio, da la estimación de 5 a la hora. Cuantificar y decidir que estimación de las planteadas es más verosímil si como prueba de ello comprobamos que en una hora cualquiera fueron 5 los vehículos que repostaron.

si **x** = número que repostan **x** $\Rightarrow Poisson(\lambda)$

- Verosimilitud de la estimación del empleado A

P(ocurra lo que ha ocurrido(muestra)/si es cierta su estimación)=

P(x=5/λ =4) = $\frac{e^{-4} \bullet 4^5}{5!} = 0{,}15$ (ir a script de la Poisson)

- Verosimilitud de la estimación del empleado B

P(ocurra lo que ha ocurrido(muestra)/si es cierta su estimación)=

P(x=5/λ =5)= $\frac{e^{-5} \cdot 5^{5}}{5!} = 0{,}17$ [(ir a script de la Poisson)]

dado que la verosimilitud de b es mayor; la estimación realizada por b es más verosímil

---

5. Dados los siguientes valores muestrales: 2,2,3,4,5,2,2,3,3,1,. Obtener una estimación máximo verosímil de la media muestral.

La media muestral no se estima, es una variable aleatoria que toma diversos valores en este caso un valor concreto y conocido que es 2,7

---

6. El número de impagados que mantiene una empresa en un ejercicio se distribuye según la siguiente función:

f(x) $\left\{ \begin{matrix} (k+1)\,x^{k} \ldots .si..0 < x < 1 \\ 0\ldots si\ldots .resto \end{matrix} \right\}$

Donde k es un parámetro con valores mayores que -1 .Estimar k si para ello hemos establecido una muestra de tamaño n. Estimar dicho parámetro por el método de los momentos y el de MV.

- Método de los momentos

  Analogía entre $\bar{x} \to \mu,$ entre el estimador y el estimado

Si

$$\mu = \int_0^1 x(k+1)\,x^{k}\,dx = \left[\frac{k+1}{k+2}x^{k+2}\right]_0^1 = \frac{k+1}{k+2}$$

Luego

$$\bar{x} \xrightarrow{estimador} \frac{k+1}{k+2}$$

luego

$$\hat{k} = \frac{2\bar{x}-1}{1-\bar{x}}$$

- Máximo verosimilitud:

$$L(x_1, x_2, \ldots x_n / \theta = k) = f(x_1/k) \cdot f(x_2/k) \cdots f(x_n/k)$$

luego sería

$L = (k+1)^n \cdot x_1^k \cdot x_2^k \cdots x_3^k$ tomando logaritmos la expresión sería:

$$L' = \ln L = n \ln(k+1) + k \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

derivando para maximizar tendríamos:

$$\frac{\delta L'}{\delta k} = \frac{n}{k-1} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \to 0$$ luego

$$\hat{k} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i} - 1$$

---

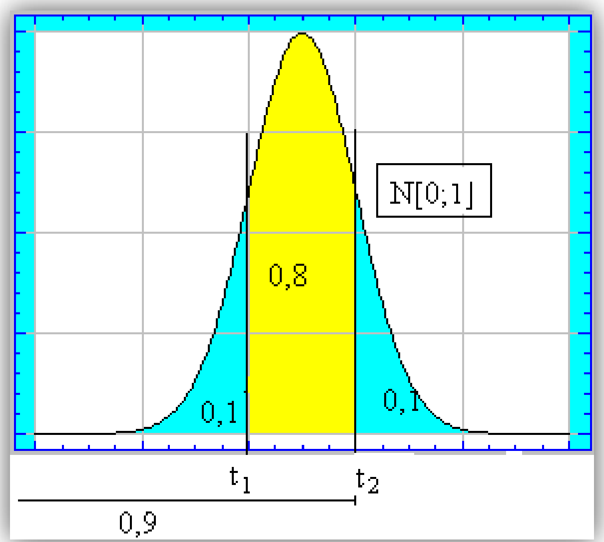
7. El número de errores que se cometen diariamente en la producción de un artículo parece comportarse como un modelo de Poisson. Si hemos obtenido una muestra de dichos errores tal que en siete días se han producido 59 errores. Obtener un estimador máximo verosímil del número de errores diarios.

Dado que el estimador máximo verosímil de la media de una Poisson es la media muestral tendríamos que :

en una Poisson en la que la variable es el número de errores en siete días luego por aplicación del teorema de adición para un día la estimación de su media poblacional sería

---

8.El departamento comercial de una industria alimenticia conoce que 2 de cada 10 consumidores reconocen su producto en una prueba a ciegas. ¿Cuántas pruebas ciegas de sabor deberían hacerse para que la proporción de que los que conocen la marca oscile entre el 16% y el 24% con una probabilidad mínima de 0,8?



Reconocen el producto el 20% p=0,2
conocemos que
$P(0{,}16 \le \hat{p} \le 0{,}24) \ge 0{,}8$

conocemos que $\hat{p} \to N\left(p; \sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = N\left(0{,}2; \sqrt{\frac{0{,}2 \bullet 0{,}8}{n}}\right)$ así

$$P(0{,}16 \leq \hat{p} \leq 0{,}24) \geq 0{,}8$$

luego en la N[0,1]

$$\to P(t_1 < t < t_2) = 0{,}8$$

dado que es un intervalo centrado en p=0,2

tendremos que siendo el valor $F(t_2) = 0{,}9$

siendo , por tabla $t_2 = 1{,}282$ luego $t_1 = -1{,}282$

destipificando :

$$t_1 = -1{,}218 = \frac{0{,}16 - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0{,}16 - 0{,}2}{\sqrt{\frac{0{,}16}{n}}}$$

resolviendo la ecuación para conocer n tendremos: que n =165, luego para una probabilidad "como mínimo" serán más de 165 pruebas de sabor