EJERCICIOS T1- CONVERGENCIA Y TEOREMAS LÍMITE

1. En una fábrica la probabilidad de que se produzcan n piezas defectuosas sigue una distribución de Poisson de media 3 diarias. Determinar la probabilidad que en 200 días el número de defectuosas esté comprendido entre 600 y 690.

defectuosas = **D→ P(λ =3)** piezas diarias

en 200 días aplicando el T.C.L o convergencia de la Poisson

así $D_{200} \rightarrow N[600 ; \sqrt{600}] = N[600 ; 24,49]$

$P(600 < D_{200} < 690) = P(t_1 < t < t_2) = P(0 < t < 3,6749) = \mathit{0,4999}$

siendo $t_1 = (600-600)/24,49 = 0$
$t_2 = (690-600)/24,49 = 3,6749$

2. La probabilidad de fabricar una pieza defectuosa y rechazable por el cliente es 0,005. Un lote de 500 piezas es aceptable cuando ninguna pieza es defectuosa. En estas condiciones, si proveemos un pedido de 200 lotes, calcular la probabilidad de que, al menos, el 10% de éstos sean aceptados

defectuosa -------- 1 -------------- p =0.005
no defectuosa -------0 ------------- q = 0.995

Lote correcto si en 500 piezas ningún defecto RA = número de defectos en 500 piezas

así RA→ B(500 ;0.005) siendo probabilidad de lote correcto = P(RA=0) ya que

por binomial $P(RA=0) = \binom{500}{0} 0.005^0 \cdot 0.995^{500} \cong 0.08$

por Moivre sería RA $\xrightarrow{distrib} N[np; \sqrt{npq}] = N[2.5; 1.57]$

P(RA=0) dado que no podría haber negativos $= P(RA<0) = P(t<t_1) =$

$P(t<1.592) = 1-0.9441 = 0.0559$

tomando el valor de la binomial, pues no es una aproximación.

Luego proporción de lotes correctos serán p = 0.08
luego incorrectos = 0.92 = q

luego número de lotes adecuados de los 200 provistos serán
TA→ B(200,0.08)

de 200 lotes al menos el 10% sean aceptados; sería 10%de 200= 20

luego nos piden $P(TA \geq 20) = P(TA = 20) + P(TA = 21) + \ldots + P(TA = 200)$

utilizando Moivre tendríamos TA1 $\xrightarrow{distrib} N\left[np; \sqrt{npq}\right] = N[16;3.84]$

$$P(TA \geq 20) = P(TA1 > 19.5) = P(t > t_1) = P(t > \frac{19.5 - 16}{3.84}) = P(t > 0.91148) = 0.181$$

aplicando, como se observa , (paso de 20 a 19,5) corrección de continuidad por pasar de binomial a normal

3. Las ventas diarias de una empresa siguen una distribución uniforme entre 10000 y 100.000 pts. Suponiendo independientes las ventas de los distintos días del año. ¿Cuál es la probabilidad de que el volumen de ventas anual supere la cifra de 18 millones de pesetas si en la empresa se trabaja 300 días al año?

las ventas **V→ U[10000,100.000]**

luego $\mu_u = \frac{a+b}{2} = \frac{10000 - 100000}{2} = 55000$

$$\sigma_v = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{100000 - 10000}{\sqrt{12}} = 25980{,}7$$

en 300 días y aplicando el TCL

tendremos $v_{300} \Rightarrow N\left[300 \bullet 55000; 25980.7 \bullet \sqrt{300}\right] = N[16.500.000;449.999]$

la probabilidad de que las ventas en 300 días sean superiores a 18 Millones será :

$$P\left[v_{300} \geq 18.000.000\right] = P\left[t \geq t_1\right] = P[t \geq 3.3] \cong 0$$

4. 180 personas están en una cola para cobrar el subsidio del paro; el importe no es el mismo para cada caso, pero se ha estimado una media de 44000 pts y una desviación de 6200. ¿Qué probabilidad hay de que el cajero abone en total más de 8.000.000 de pts.?

A= cantidad abonada a cada persona se distribuye desconocidamente
pero su media y varianza son

$$\mu_A = 44.000 \quad \sigma_A = 6200$$

aplicando en TCL para 180 personas dado que el cobro de cada una es independiente tendremos

$$A_{180} \Rightarrow N\left[180 \bullet 44.000; 6200 \bullet \sqrt{180}\right] = N[7.920.000; 83.131'7]$$

$$P\left[A_{180} > 8.000.000\right] = P\left[t > \frac{8.000.000 - 7.920.000}{83.131,7}\right] = P[t > 0'96] = 0'1685$$

5. Se ha calculado que el 40% de los habitantes de un país tienen ingresos mensuales superiores a las 65.000 pts. Elegida una muestra al azar de 20 personas ¿Qué probabilidad existe de que hayan más de 10 con ingresos superiores a 65.000?

M = número de personas con ingresos superiores a 65.000 de 20

M→ B(n=20 ;p=0,4) o bien por Moivre entonces

$$M \Rightarrow N\left[np; \sqrt{npq}\right] = N[8;2,19]$$

nos preguntan por la probabilidad de que M sea superior a 10 así :

$$P[M > 10] = P[M \geq 11] = P[M = 11] + P[M = 12] + \ldots + P[M = 20] =$$
$$= \sum_{M=11}^{20} \binom{20}{M} \cdot 0{,}4^{M} \cdot 0{,}6^{20-M} = 0{,}128$$

por binomial

por normal $P[M > 10] \neq P[M \geq 11]$ luego lo conveniente sería "discretizar" la normal calculando

$$P[M > 10{,}5] = P\left[t > \frac{10{,}5 - 8}{2{,}19}\right] = P[t > 1{,}14] = 0{,}127$$

por los resultados puede observarse la convergencia entre la binomial y la normal .

6. En nuestra empresa hay dos comedores de personal para 60 comensales cada uno; ambos son de características similares, con los mismos precios y calidades. Dichos comedores los emplean diariamente 100 personas. ¿Qué probabilidad hay de que todos los que han elegido uno determinado comedor puedan comer?

La probabilidad de escoger uno u otro es la misma por tanto =0,5 podrá escogerse entre el comedor A y B (no A)

por lo que el número de personas que entrarán en el A será una binomial
$\rightarrow B(n = 100; p = 0{,}5)$
por lo que por Moivre podríamos hacerla converger a una

$$N\left(np = 50; \sqrt{npq} = 5\right)$$

Todos podrán comer cuando en el comedor A entren igual o más de 40, hasta 60 inclusive, siendo, por tanto, la probabilidad

$$P(40 \leq N \leq 60)$$

para aplicar Moivre debiéramos realizar la corrección debida a que con la normal no incluimos el valor 40 y 60 así:
para que el 40 quede incluido debiéramos transformarlo en 39,5 y para que el 60 quedase incluido debiéramos utilizar el 60,5; luego la probabilidad sería:

$$P(40 \leq N \leq 60) = P(39{,}5 < N < 60{,}5) = P\left(t_1 < t < t_2\right) = P\left(\frac{39{,}5-50}{5} < t < \frac{60{,}5-50}{5}\right) =$$

$$= P(-2{,}1 < t < 2{,}1) = F(2{,}1) - (1-(F(2{,}1)) = 0{,}982 - (1-0{,}982) = 0{,}964$$

Puede plantearse la pregunta cómo la probabilidad de que comieran los que han elegido un determinado comedor sin preocuparnos por lo que ocurre en el otro (supere su capacidad o no); en este caso, sólo nos interesa que entren menos o igual a 60 personas en un comedor que puede ser, por ejemplo en el A. Así sería:

$$P(N \leq 60) = P(N < 60{,}5) = P\left(t < t_2\right) = P\left(t < \frac{60{,}5-50}{5}\right) =$$

$$= P(t < 2{,}1) = F(2{,}1) = 0{,}982$$

7. Para el vuelo (en avión; claro) entre dos ciudades con capacidad para 120 personas se ha comprobado que alrededor del 35% de las reservas no son cubiertas y el cliente no se presenta ¿Cuántas reservas se pueden aceptar, para que con un 90% de probabilidad se pueda asegurar asiento en el vuelo a todos aquellos que acudan y que previamente lo han reservado ?

La probabilidad de reservar y no acudir es de q=0,35 luego su complementario (reservar y acudir) será p=0,65.
Por ello las personas que acudirán serán A (acuden)

A ha de ser menor o igual a 120 (asientos) con probabilidad 0,90 así:
$P(A \leq 120) = 0{,}9$ para incluir el 120 dado que aplicamos la normal por Moivre será: dado que las que

$$A \rightarrow B(L, p) \xrightarrow{converge} N\left(L \cdot p; \sqrt{L \cdot p \cdot q}\right)$$

siendo L el número de personas que llaman para reservar y este se supone alto , podemos aplicar la convergencia de Moivre

$$P(A < 120{,}5) = 0{,}9 = P(t < t_1)$$

siendo el valor de la normal 0,1 que tiene de probabilidad aculada hasta él 0,9 es decir destipificando:

$$t_1 = 1{,}282 = \frac{120 - A \bullet p}{\sqrt{A \bullet p \bullet q}} = \frac{120 - A \bullet 0{,}65}{\sqrt{A \bullet 0{,}65 \bullet 0{,}35}}$$

donde

$$0{,}4225 A^2 - 156{,}3739 A + 14400 = 0$$

resolviendo la ecuación las soluciones son : 172,26 y 197,8 evidentemente cogemos la mayor por tanto 198.

8. Se ha calculado que el tiempo que pasa desde que entra un cliente hasta que entra otro en un supermercado, sigue una ley exponencial de media 1/4 y desviación típica 1/4 .Obtener la ley de probabilidad que nos indique el tiempo que transcurre para la entrada de 100 clientes.

Dado que n es 100 y podemos considerarlo grande

y conocemos T_i (tiempo un cliente)se distribuye como una exponencial de media 0,25 y desviación típica 1/16

$$(\mu_T = 1/2;\ \sigma_T = 1/4)$$

el tiempo transcurrido en 100 clientes sería

$$T_{100} = T + T + \ldots\ldots + T(100 veces)$$

aplicando el T.C.L. tendríamos que

$$T_{100} \xrightarrow{converge} N\left(n \bullet \mu_T;\ \sigma_T \bullet \sqrt{n}\right) = N(25{,}2{,}5)$$

9. El dinero que un alumno tiene en su cartera se distribuye desconocidamente con media 1000 y desviación típica 100 pesetas. Si en una clase hay 160 alumnos calcular la probabilidad de que un alumno lleve por término medio más de 1100 pts.

dinero = D se distribuye desconocidamente pero :

$$\mu_D = 1000 \quad y \quad \sigma_D = 100$$

lo que llevan por término medio los 160 alumnos será por aplicación del T.C.L.

$$\overline{x}_{160} \to N\left(\mu_D; \frac{\sigma_D}{\sqrt{n}}\right) \to N\left(1000; \frac{100}{\sqrt{160}}\right) = N(1000;7,9)$$

se nos pregunta por

$$P(\overline{x}_{160} > 1100) = P(t > t_1) = P\left(t > \frac{1100-1000}{7,9}\right) = P(t > 12,64) = 1 - F(12,64) = 1-1 = 0$$

10. Se conoce que los errores de impresión de un libro siguen una ley de Poisson de intensidad media 0,8 errores por página. Calcular la probabilidad de que:

a) En una página haya algún error
b) En un capítulo de diez páginas haya más de 10 errores
c) En las 500 páginas de un libro haya menos de 350 errores

a)

los errores por página se distribuyen **e** $\to P(\lambda = 0.8)$

P(algún error)= 1- P(ningún error)

P(ningún error) =P(e=0)= $\dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^0}{0!} = 0,55067$

luego:

P(algún error)= 1-0,55067= 0,44933

b) los errores por capítulo se distribuirán **ec** $\to P(\lambda = 10 \cdot 0,8 = 8)$

P(haya más de 10 errores por capítulo)= P(**ec**>10)= 0,188 $= P(ec \geq 11)$

aplicando convergencia de Poisson a Normal sería **ec** seguiría una N[8 ;2,8284]

luego

$$P(t > \frac{10,5-8}{2,8284}) = P(t > 0,884) = 0,188$$

d) los errores por libro de 500 páginas serían:

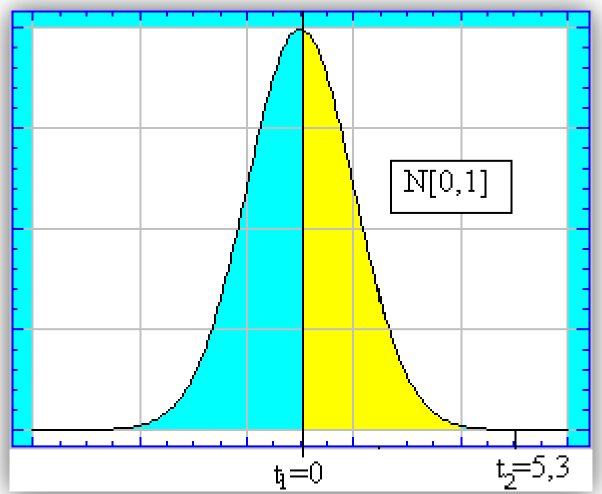
el $\to P(\lambda = 500 \cdot 0.8 = 400) \xrightarrow{ley} N[400; \sqrt{400}] = N[400;20]$

P(menos de 350) =

$$P(el \leq 349{,}5) = P(t < \frac{349{,}5 - 400}{20}) = P(t < -2{,}52) = 0{,}005868$$

11. El número de piezas correctas que elabora una sección de una fábrica cuadruplica al de defectuosas. Calcular la probabilidad de que de las 200 piezas producidas en un día más de 40 y menos de 70 sean defectuosas.

si el número de correctas cuadruplica al de defectuosas tendremos que p = proporción de correctas =0,8
mientras que q = proporción de incorrectas =0,2 así:



el número de piezas correctas de 200 será
C→ B(200 ;0,2) dado que n es grande podemos aplicar el teorema de Moivre y tendremos que

$$N\left[n \bullet p; \sqrt{n \bullet p \bullet q}\right] =$$

$$N\left[200 \bullet 0{,}2; \sqrt{200 \bullet 0{,}2 \bullet 0{,}8}\right] =$$

$$N[40;5{,}656]$$

se nos pregunta por:

$$P(40 < c < 70) = P\left(t_1 < t < t_2\right) =$$

$$P\left(\frac{40-40}{5{,}656} < t < \frac{70-40}{5{,}656}\right) =$$

$$P\left(0 < t < 5{,}304\right) =$$

$$0{,}5 - (1 - F(5{,}656)) = 0{,}5 - (1-1) = 0{,}5$$

12. La demanda diaria de un producto (A) se distribuye según una ley de Poisson cuya media se estima en 36 unidades diarias. ¿Qué número o cantidad de productos A hemos de tener al principio del día en el almacén para poder satisfacer su demanda con probabilidad 95.5%?

Demanda = $D \to$ P$(\lambda = 36)$
Satisfacemos la demanda si en el almacén tenemos más cantidad de producto que la que nos pidan ; si llamamos A a las unidades que debemos tener en el almacén y queremos satisfacer la demanda con probabilidad 95,5% tendremos que:

converge a N[36 ;6]

el valor de la N[0 ;1] que satisface $P\left(t \leq t_1\right) = 0.955$

$$t_1 = 1{,}695 = \frac{A-\mu}{\sigma} = \frac{A-36}{6} \to A = 46{,}17 \cong 47$$

será

por tanto para la normal D→ N[36 ;6] será
(ir a script de la mormal)

unidades deberemos tener almacenadas