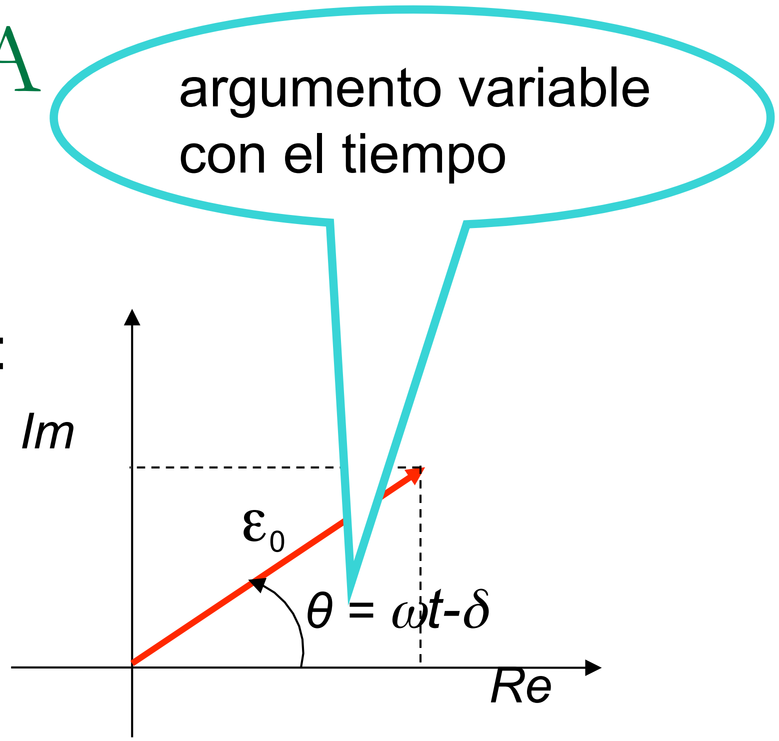
TEMA 4: CIRCUITOS DE CA

4.1 Impedancia

- Representación de magnitudes alternas:
  - Podemos definir una fem compleja

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0 \cdot e^{j(\omega t - \delta)}$$

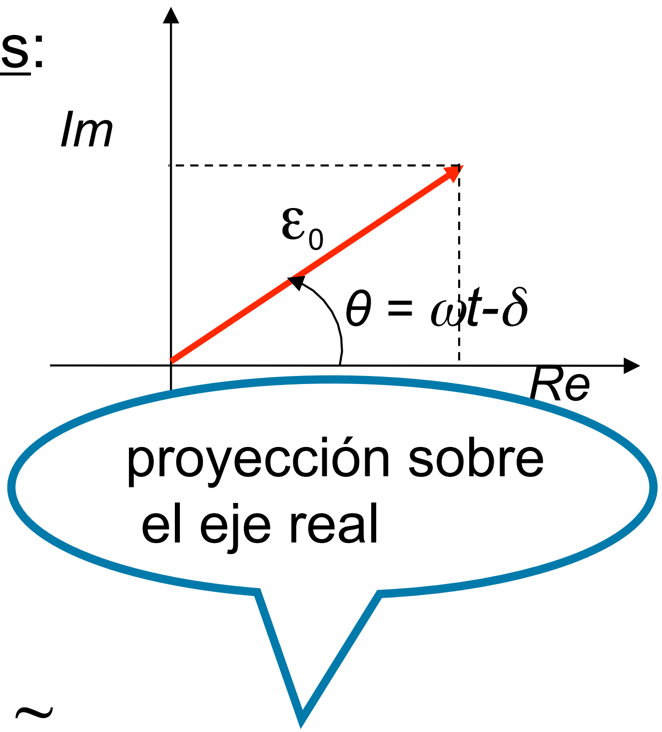


4.1 Impedancia

- Representación de magnitudes alternas:

  - Podemos definir una fem compleja

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0 \cdot e^{j(\omega t - \delta)}$$



  - La parte real:

$$\varepsilon(t) = \mathbf{Re}(\tilde{\varepsilon}) = \varepsilon_0 \cdot \mathbf{cos}(\omega t - \delta)$$

  - De forma similar:

$$\tilde{V} = V_0 \cdot e^{j(\omega t - \delta_V)} \qquad V(t) = \mathbf{Re}(\tilde{V}) = V_0 \cdot \mathbf{cos}(\omega t - \delta_V)$$

$$\tilde{I} = I_0 \cdot e^{j(\omega t - \delta_I)} \qquad I(t) = \mathbf{Re}(\tilde{I}) = I_0 \cdot \mathbf{cos}(\omega t - \delta_I)$$

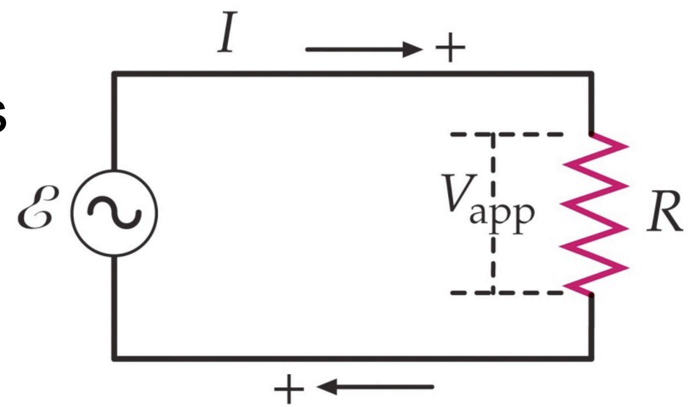
TEMA 4: CIRCUITOS DE CA

Objetivo: relacionar ***V(t)*** e ***I(t)***

4.1 Impedancia

- Ddp entre los extremos de una resistencia:
  - Si $I(t) = I_0 \cos(\omega t - \delta_I)$ entonces

$$V(t) = R \cdot I(t) = \underbrace{R\, I_0}_{V_0} \cos(\omega t - \delta_I)$$



- Como R real, $V(t)$ e $I(t)$ están en fase

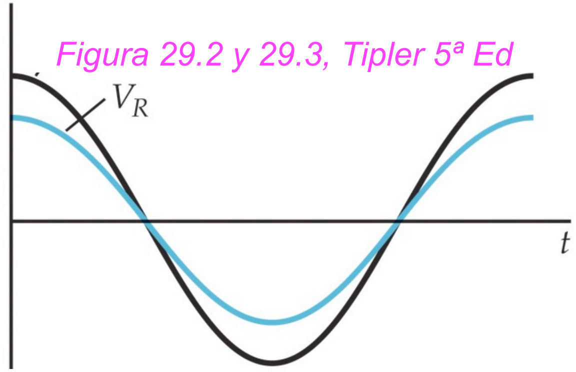


Figura 29.2 y 29.3, Tipler 5ª Ed

  - Con notación compleja $\tilde{V} = R\,\tilde{I}$
  - Comprobación:

$$V(t) = \mathbf{Re}(\tilde{V}) = \mathbf{Re}(R\,\tilde{I}) = R\,\mathbf{Re}(\tilde{I}) = R\, I_0 \cos(\omega t - \delta_I)$$

TEMA 4: CIRCUITOS DE CA

Objetivo: relacionar ***V(t)*** **e** ***I(t)***

4.1 Impedancia

- <u>Ddp entre los extremos de un condensador</u>:
  - Magnitud característica: $C = \dfrac{Q(t)}{V(t)}$
  - Cálculo de *I(t)*: $I(t) = \dfrac{dQ(t)}{dt}$

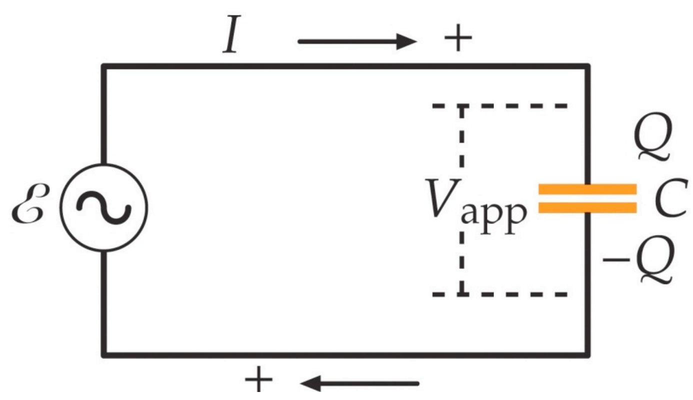


Figura 29.8, Tipler 5ª Ed

$$Q(t) = \int I(t)\,dt$$

  - Cálculo de *V(t)*: $V(t) = \dfrac{1}{C} Q(t) = \dfrac{1}{C}\int I(t)\,dt$
  - Derivando: $\dfrac{dV(t)}{dt} = \dfrac{1}{C} I(t)$
  - Notación compleja: $\dfrac{d\tilde{V}}{dt} = \dfrac{1}{C}\tilde{I}$

Objetivo: relacionar ***V(t)*** **e** ***I(t)***

4.1 Impedancia

- Ddp entre los extremos de un condensador:
  - Cálculo de $\frac{d\tilde{V}}{dt} = \frac{1}{C}\tilde{I}$ como: $\begin{cases} \tilde{V} = V_0 \cdot e^{j(\omega t - \delta_V)} \\ \tilde{I} = I_0 \cdot e^{j(\omega t - \delta_I)} \end{cases}$

$$\frac{d\left(V_0\, e^{j(\omega t - \delta_V)}\right)}{dt} = j\omega V_0\, e^{j(\omega t - \delta_V)}$$

$$j\omega V_0\, e^{j(\omega t - \delta_V)} = \frac{1}{C} I_0\, e^{j(\omega t - \delta_I)}$$

$$V_0\, e^{j(\omega t - \delta_V)} = \frac{1}{jC\omega} I_0\, e^{j(\omega t - \delta_I)}$$

$$V_0\, e^{j(\omega t - \delta_V)} = \frac{1}{C\omega} I_0\, e^{j(\omega t - \delta_I - 90^\circ)}$$

  - Así:

$$V_0 \cos(\omega t - \delta_V) = \frac{1}{C\omega} I_0 \cos(\omega t - \delta_I - 90^\circ)$$

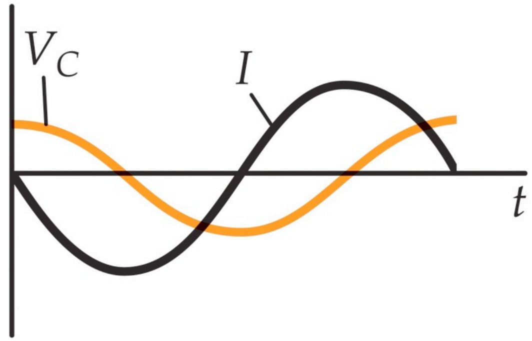


Figura 29.9, Tipler 5ª Ed

- *V(t)* e *I(t)* están desfasadas 90º

Objetivo: relacionar ***V(t)*** e ***I(t)***

4.1 Impedancia

- Ddp entre los extremos de una bobina:
  - Magnitud característica: $V(t) = L\dfrac{dI(t)}{dt}$
  - Cálculo de *I(t)*:

$$\tilde{V} = L\frac{d\tilde{I}}{dt}$$

$$\frac{d(I_0 e^{j(\omega t-\delta I)})}{dt} = j\omega I_0 e^{j(\omega t-\delta I)} = j\omega \tilde{I}$$

$$V_0 e^{j(\omega t-\delta_V)} = jL\omega I_0 e^{j(\omega t-\delta_I)}$$

$$V_0 e^{j(\omega t-\delta_V)} = L\omega I_0 e^{j(\omega t-\delta_I+90^o)}$$

  - Así, las partes reales:

$$V_0 \cos(\omega t-\delta_V) = L\omega I_0 \cos(\omega t-\delta_I+90^o)$$

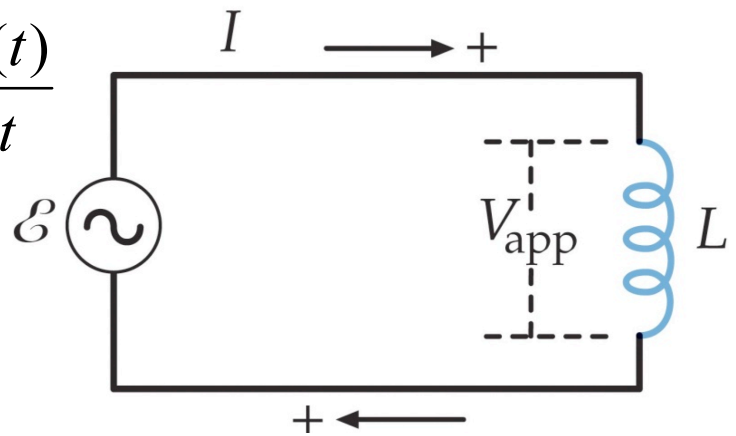
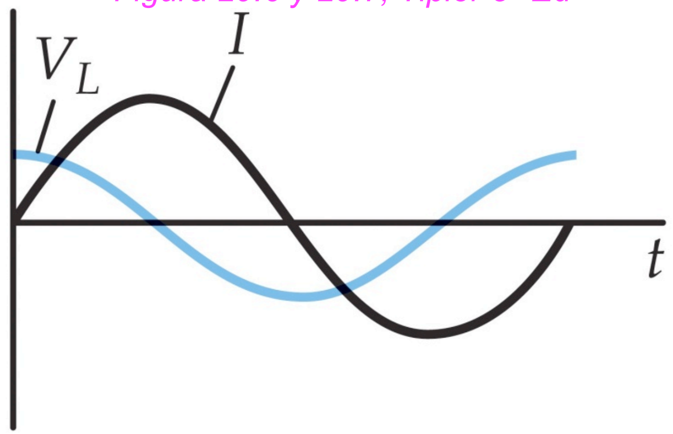


Figura 29.6 y 29.7, Tipler 5ª Ed



- *V(t)* e *I(t)* están desfasadas 90º

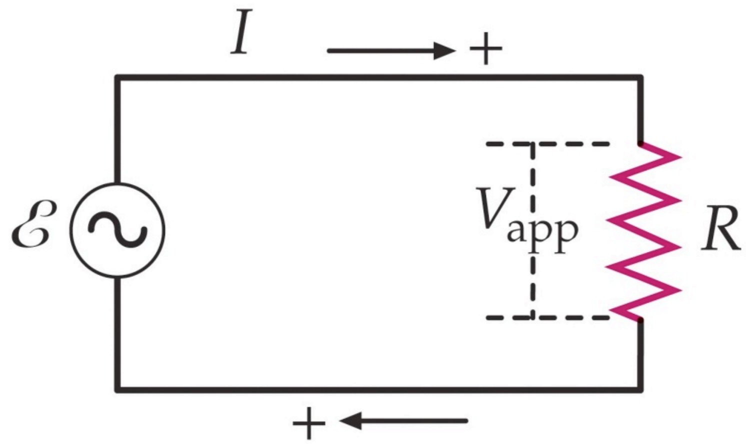
TEMA 4: CIRCUITOS DE CA

4.1 Impedancia RESUMEN

- Ddp entre los extremos de…:
  - Resistencia

iguales

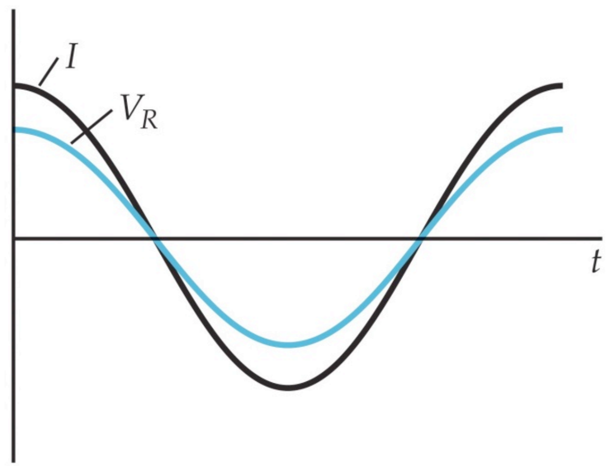
$$V_0\, e^{j(\omega t-\delta_V)} = R \cdot I_0\, e^{j(\omega t-\delta_I)}$$



- Relación entre las funciones temporales

Figura 29.2 y 29.3, Tipler 5ª Ed

$$V_0 \cos(\omega t - \delta_V) = R\, I_0 \cos(\omega t - \delta_I)$$



- Relación entre V e I complejas

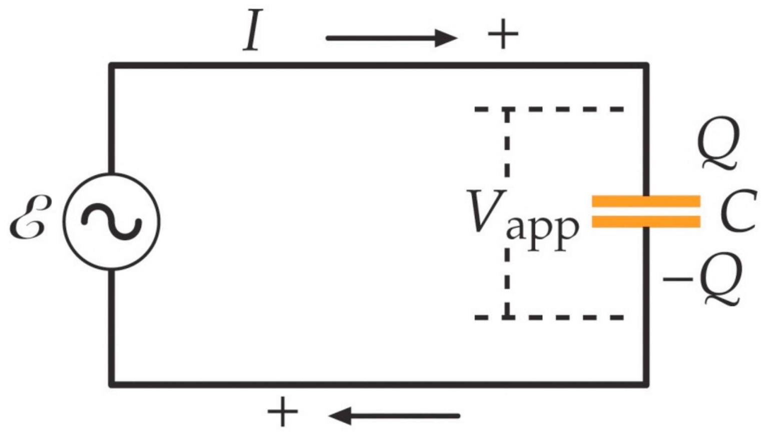
$$\tilde{V} = R \cdot \tilde{I}$$

TEMA 4: CIRCUITOS DE CA

4.1 Impedancia RESUMEN

- Ddp entre los extremos de…:
  - Condensador

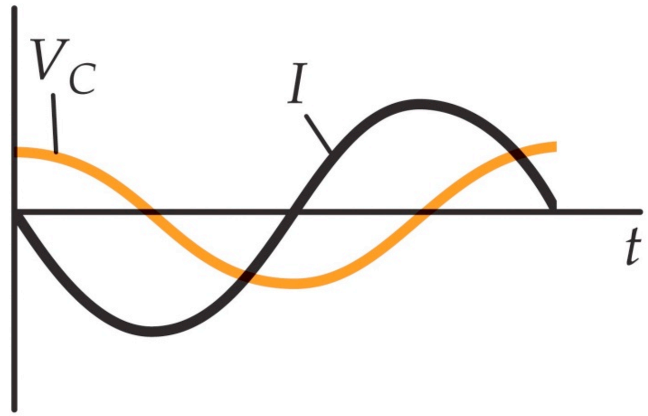
$$V_0\, e^{j(\omega t-\delta_V)} = \frac{1}{jC\omega} I_0\, e^{j(\omega t-\delta_I)}$$



- Relación entre las funciones temporales

$$V_0 \cos(\omega t - \delta_V) = \frac{1}{C\omega} I_0 \cos(\omega t - \delta_I - 90^{\text{o}})$$

Figura 29.8 y 29.9, Tipler 5ª Ed



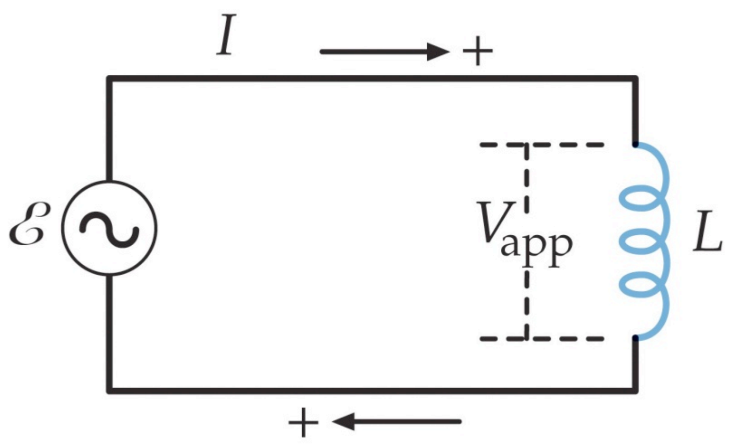
- Relación entre V e I complejas

$$\tilde{V} = \frac{1}{jC\omega}\tilde{I}$$

TEMA 4: CIRCUITOS DE CA

4.1 Impedancia RESUMEN

- Ddp entre los extremos de…:
  - Bobina

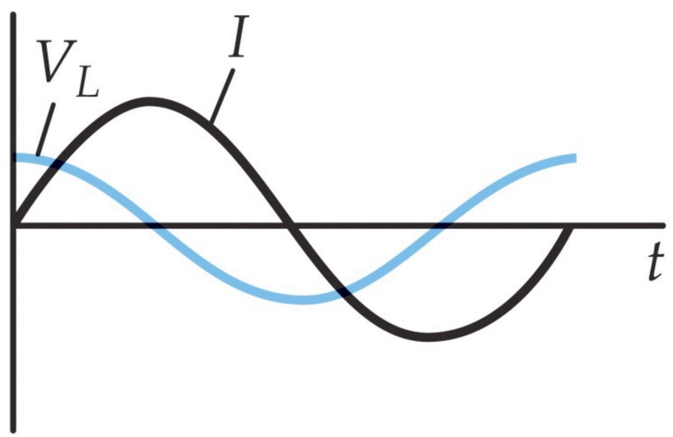


$$V_0\, e^{j(\omega t-\delta_V)} = j\,L\omega\cdot I_0\, e^{j(\omega t-\delta_I)}$$

- Relación entre las funciones temporales

Figura 29.6 y 29.7, Tipler 5ª Ed

$$V_0\,\mathbf{cos}(\omega t-\delta_V) = L\omega\cdot I_0\,\mathbf{cos}(\omega t-\delta_I+90^{\circ})$$



- Relación entre V e I complejas

$$\tilde{V} = j\,L\omega\cdot\tilde{I}$$

4.1 Impedancia LEY DE OHM GENERALIZADA

- Ddp entre los extremos de…:
  - Resistencia $\tilde{V} = R \cdot \tilde{I}$
  - Condensador $\tilde{V} = \dfrac{1}{j\,C\omega}\tilde{I}$
  - Bobina $\tilde{V} = j\,L\omega \cdot \tilde{I}$

LEY DE OHM GENERALIZADA

$$\tilde{V} = Z \cdot \tilde{I}$$

$\Downarrow$

IMPEDANCIA

Z

TEMA 4: CIRCUITOS DE CA

4.1 Impedancia LEY DE OHM GENERALIZADA

- Ddp entre los extremos de…:
  - Impedancia de una resistencia $Z = R$

$$\frac{1}{j} = \frac{j}{j \cdot j} = \frac{j}{\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}} = \frac{j}{-1} = -j$$

  - Impedancia de un condensador $Z = \dfrac{1}{j\,C\omega} = \dfrac{-j}{C\omega}$
  - Impedancia de una bobina $Z = j\,L\omega$

4.2 Circuito serie LCR

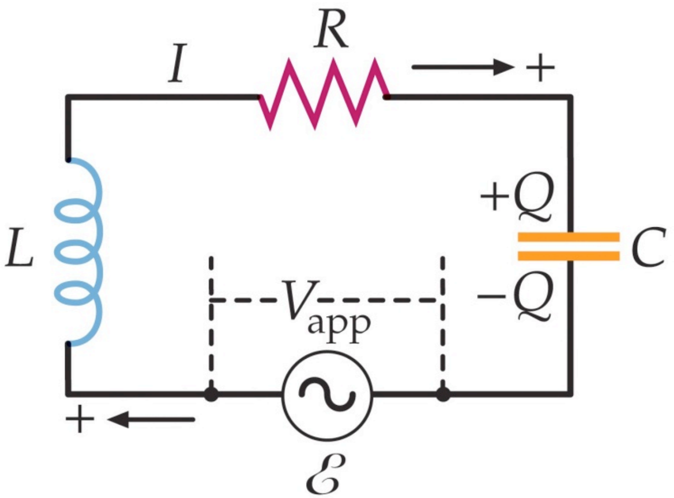


Figura 29.13, Tipler 5ª Ed

$$\varepsilon(t) = V_L(t) + V_R(t) + V_C(t)$$

sustituyendo

$$\varepsilon(t) = L\,\frac{dI(t)}{dt} + R\,I(t) + \frac{1}{C}\int I(t)\,dt$$

derivando

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = L\,\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + R\,\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}\,I(t)$$

complejos

$$\frac{d\tilde{\varepsilon}}{dt} = L\,\frac{d^2\tilde{I}}{dt^2} + R\,\frac{d\tilde{I}}{dt} + \frac{1}{C}\,\tilde{I}$$

derivando

$$j\omega\,\tilde{\varepsilon} = L(j\omega)^2\,\tilde{I} + R\,(j\omega)\tilde{I} + \frac{1}{C}\,\tilde{I}$$

dividiendo por $j\omega$

$$\tilde{\varepsilon} = j\,L\omega\,\tilde{I} + R\,\tilde{I} + \frac{1}{j\,C\omega}\,\tilde{I}$$

$$\tilde{\varepsilon} = (j\,L\omega + R + \frac{1}{j\,C\omega})\,\tilde{I}$$

$$\tilde{\varepsilon} = \left(R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})\right)\,\tilde{I}$$

TEMA 4: CIRCUITOS DE CA

4.2 Circuito serie LCR

$$\tilde{\varepsilon} = \left(R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega}) \right) \tilde{I}$$

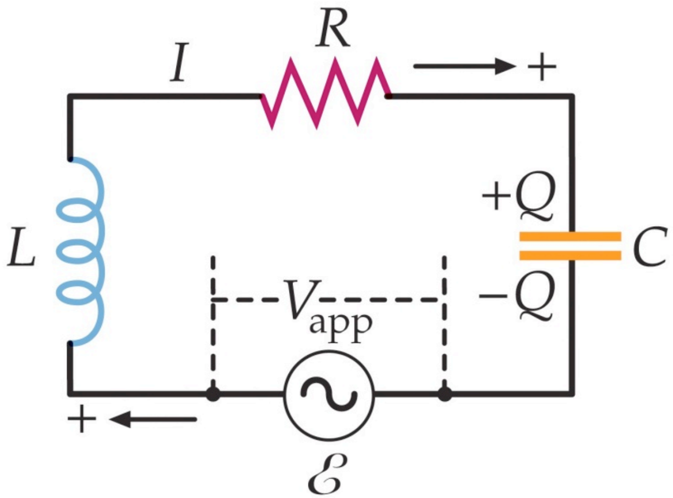


Figura 29.13, Tipler 5ª Ed

- Despejando:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$$

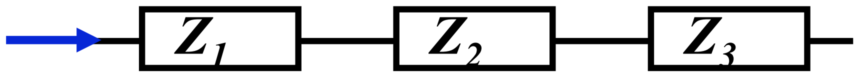
- Impedancia equivalente del circuito LCR

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{Z_{equ}} \Longrightarrow Z_{equ} = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$$

4.3 Circuito serie LCR: asociación de impedancias

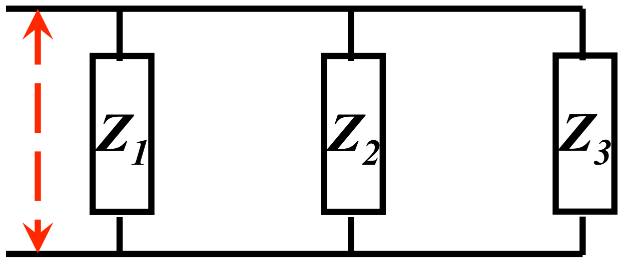
- En serie: Por ellas pasa la misma corriente

$$Z_s = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots$$



- En paralelo: Están sometidas a la misma diferencia de potencial

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \dots$$



- Resolución de circuitos de una malla: igual que CC, pero con formulismo de los números complejos