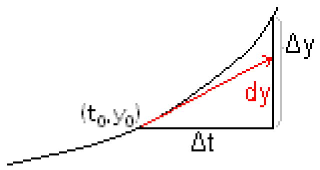
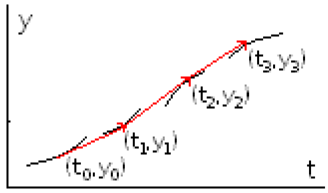
2.3. Obtener el valor futuro de una variable conociendo su valor inicial y la dependencia de su derivada respecto del tiempo y la misma variable, y'=f(t,y):

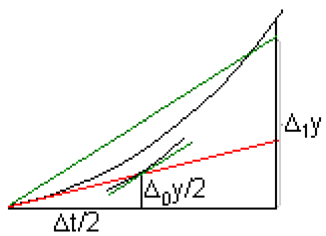
Objetivos:

1. Aproximar soluciones de una ecuación diferencial a partir de unas condicionas iniciales sustituyendo el incremento por la diferencial (MÉTODO DE EULER).
2. Obtener una aproximación de segundo orden a las soluciones de una ecuación diferencial (MÉTODO DE RUNGE).
3. Generalizar la Fórmula de Simpson para integrar ecuaciones diferenciales (MÉTODO DE RUNGE-SIMPSON).
4. Obtener una aproximación de cuarto orden a las soluciones de una ecuación diferencial (MÉTODO DE KUTTA).





Actividad 2.22. Si conocemos $y'=f(t,y)$ así como la condición inicial $y_0=y(t_0)$, teniendo en cuenta el
<u>Teorema -2.8:</u> si $y(t)$ es una función derivable hasta el segundo orden,
$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)\cdot\Delta t + y''(\xi)\cdot(\Delta t)^2/2$ tal que $\xi\epsilon[t_0, t]$
se cumplirá $y(t) = y_0 + f(t_0,y_0)\cdot\Delta t + \Theta\cdot(\Delta t)^2$. Así pues, si sustituimos $\Delta y=y(t)-y_0$ por $dy=y'\cdot\Delta t=f(t_0,y_0)\cdot\Delta t$ el error será proporcional a $(\Delta t)^2$, y si Δt es suficientemente pequeño podremos aproximar la evolución de la variable y aplicando sucesivamente
$t_{i+1}=t_i+\Delta t$, $y_{i+1} = y_i + \Delta_0 y$ con $\Delta_0 y=f(t_i,y_i)\cdot\Delta t$ (**método de Euler**).
<u>Problema 2.8:</u> aplicar el método de Euler para aproximar el valor de y cuando t=1 conociendo que y=1 cuando t=0 y que $y'=0'1y^2-ty$. Tomar $\Delta t=0'2$ y representarlo gráficamente.

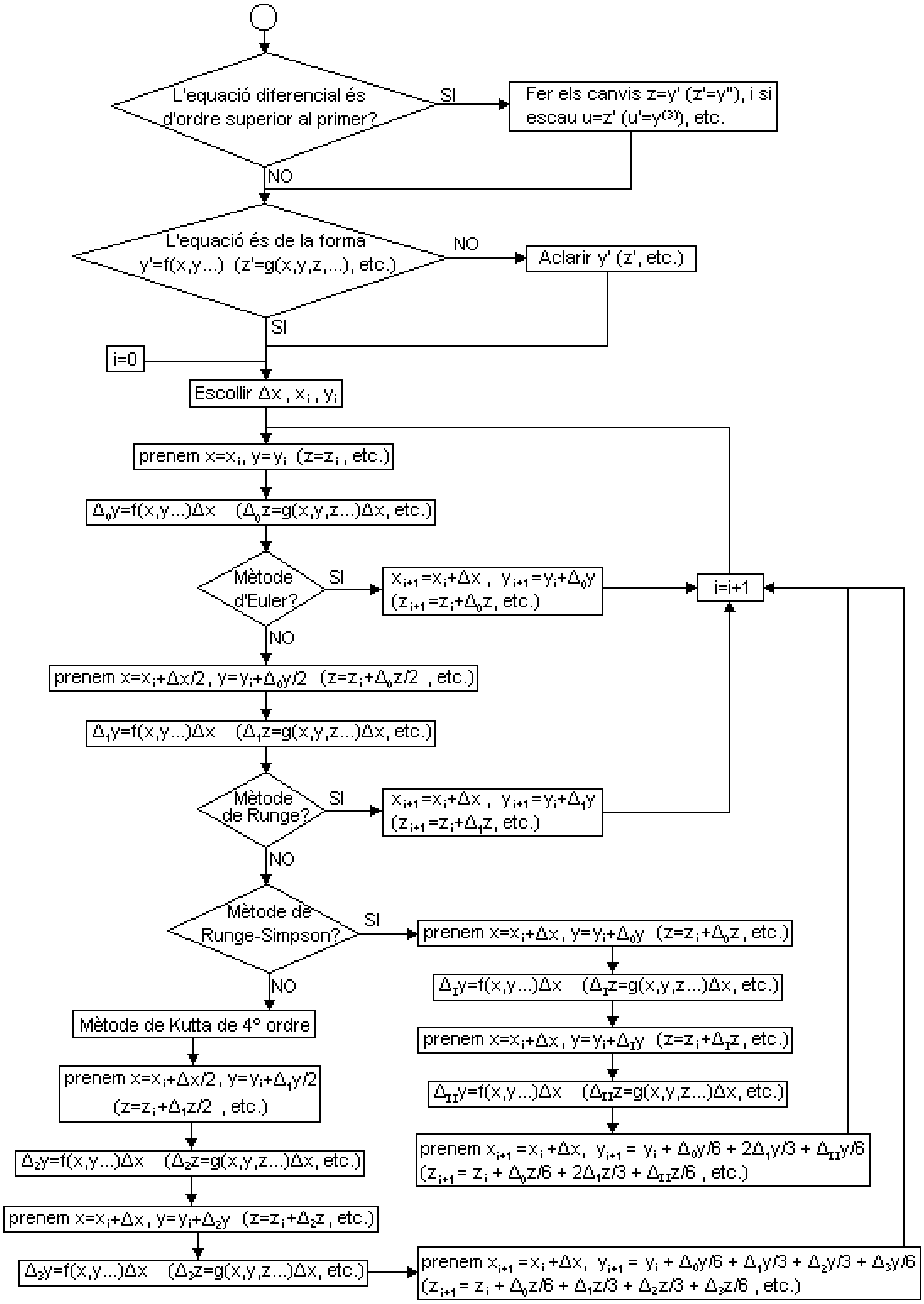


Actividad 2.23. El método de Euler daría un resultado exacto si la derivada y', representada por la pendiente de la curva, fuera constante (y por lo tanto la segunda derivada valiera cero). Si no es así, encontraremos que la derivada en el punto (t_1,y_1) será $f(t_1,y_1)=f(t_0+\Delta t,y_0+\Delta_0 y)\neq f(t_0,y_0)$. En este caso, podemos obtener una mejor aproximación si calculamos la derivada en el punto intermedio $(t_0+\Delta t/2,y_0+\Delta_0 y/2)$ y tomamos $y_1=y_0+\Delta_1 y$ con $\Delta_1 y=f(t_0+\Delta t/2,y_0+\Delta_0 y/2)\cdot\Delta t$, y así sucesivamente (**método de Runge** de segundo orden); en este caso el error es proporcional a $(\Delta t)^3$.
<u>Problema 2.9:</u> aplicar el método de Runge de segundo orden para aproximar el valor de y cuando t=0'4 conociendo que y=1 cuando t=0 y que $y'=0'1y^2-ty$. Tomar $\Delta t=0'2$.

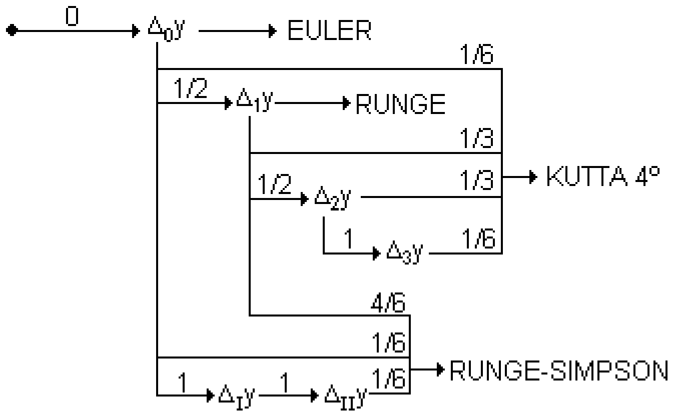
Actividad 2.24. Con el método de Runge de segundo orden hemos mejorado la aproximación calculando un nuevo incremento para la función y a partir de un punto auxiliar (en este caso, intermedio). Podemos obtener mejores aproximaciones escogiendo sucesivamente de forma adecuada nuevos puntos auxiliares. En particular, si

tomamos sucesivamente
$\Delta_I y=f(t_0+\Delta t,\ y_0+\Delta_0 y)\cdot\Delta t$
$\Delta_{II} y=f(t_0+\Delta t,\ y_0+\Delta_{Y\ y})\cdot\Delta t$
obtendremos una aproximación de tercer orden, con error proporcional a $(\Delta t)^4$, si tomamos
$t_1=t_0+\Delta t$, $y_1 = y_0 + \Delta_0 y/6 + 4\cdot\Delta_1 y/6 + \Delta_{II} y/6$ y así sucesivamente (**método de Runge-Simpson**).
Comprobar que en el caso particular en que tengamos y'=f(x), este método es equivalente a la Fórmula de Simpson.

Actividad 2.25. Podemos obtener una aproximación de cuarto orden, con error proporcional a $(\Delta t)^5$, si tomamos
$\Delta_2 y=f(t_0+\Delta t/2, y_0+\Delta_1 y/2)\cdot\Delta t$
$\Delta_3 y=f(t_0+\Delta t,\ y_0+\Delta_2 y)\cdot\Delta t$
y finalmente
$t_1=t_0+\Delta t$, $y_1 = y_0 + \Delta_0 y/6 + \Delta_1 y/3 + \Delta_2 y/3 + \Delta_3 y/6$ y así sucesivamente (**método de Kutta** de cuarto orden).
Tenemos recopilados los diferentes métodos en el siguiente diagrama de flujos:


L'equació diferencial és d'ordre superior al primer?
SI
Fer els canvis z=y' (z'=y''), i si escau u=z' (u'=$y^{(3)}$), etc.
NO
L'equació és de la forma y'=f(x,y...) (z'=g(x,y,z,...), etc.)
NO
Aclarir y' (z', etc.)
SI
i=0
Escollir Δx, x_i, y_i
prenem $x=x_i$, $y=y_i$ ($z=z_i$, etc.)
$\Delta_0 y=f(x,y...)\Delta x$ ($\Delta_0 z=g(x,y,z...)\Delta x$, etc.)
Mètode d'Euler?
SI
$x_{i+1}=x_i+\Delta x$, $y_{i+1}=y_i+\Delta_0 y$ ($z_{i+1}=z_i+\Delta_0 z$, etc.)
i=i+1
NO
prenem $x=x_i+\Delta x/2$, $y=y_i+\Delta_0 y/2$ ($z=z_i+\Delta_0 z/2$, etc.)
$\Delta_1 y=f(x,y...)\Delta x$ ($\Delta_1 z=g(x,y,z...)\Delta x$, etc.)
Mètode de Runge?
SI
$x_{i+1}=x_i+\Delta x$, $y_{i+1}=y_i+\Delta_1 y$ ($z_{i+1}=z_i+\Delta_1 z$, etc.)
NO
Mètode de Runge-Simpson?
SI
prenem $x=x_i+\Delta x$, $y=y_i+\Delta_0 y$ ($z=z_i+\Delta_0 z$, etc.)
$\Delta_I y=f(x,y...)\Delta x$ ($\Delta_I z=g(x,y,z...)\Delta x$, etc.)
prenem $x=x_i+\Delta x$, $y=y_i+\Delta_I y$ ($z=z_i+\Delta_I z$, etc.)
$\Delta_{II} y=f(x,y...)\Delta x$ ($\Delta_{II} z=g(x,y,z...)\Delta x$, etc.)
prenem $x_{i+1}=x_i+\Delta x$, $y_{i+1}=y_i+\Delta_0 y/6+2\Delta_1 y/3+\Delta_{II} y/6$ ($z_{i+1}=z_i+\Delta_0 z/6+2\Delta_1 z/3+\Delta_{II} z/6$, etc.)
NO
Mètode de Kutta de 4° ordre
prenem $x=x_i+\Delta x/2$, $y=y_i+\Delta_1 y/2$ ($z=z_i+\Delta_1 z/2$, etc.)
$\Delta_2 y=f(x,y...)\Delta x$ ($\Delta_2 z=g(x,y,z...)\Delta x$, etc.)
prenem $x=x_i+\Delta x$, $y=y_i+\Delta_2 y$ ($z=z_i+\Delta_2 z$, etc.)
$\Delta_3 y=f(x,y...)\Delta x$ ($\Delta_3 z=g(x,y,z...)\Delta x$, etc.)
prenem $x_{i+1}=x_i+\Delta x$, $y_{i+1}=y_i+\Delta_0 y/6+\Delta_1 y/3+\Delta_2 y/3+\Delta_3 y/6$ ($z_{i+1}=z_i+\Delta_0 z/6+\Delta_1 z/3+\Delta_2 z/3+\Delta_3 z/6$, etc.)

Podemos utilizar también el siguiente diagrama a fin de recordar a partir de qué incremento se obtiene un nuevo incremento (con incremento total o con medio incremento) y qué coeficientes hemos de utilizar para obtener el incremento final:



Para el método de Kutta de cuarto orden podemos realizar los cálculos en la siguiente tabla:

t_y y_y	$t_{0.}$ $y_{0.}$				$t_1 = t_0+\Delta t$ $y_1 = \Delta_0 y/6 + \Delta_1 y/3 + \Delta_2 y/3 + \Delta_3 y/6.$
t y y' $\Delta_0 y$ $\Delta_1 y$ $\Delta_2 y$ $\Delta_3 y$	$t_{0.}$ $y_{0.}$ f(t,y) $\Delta_0 y$	$t_0+\Delta t/2.$ $y_0+\Delta_0 y/2.$ f(t,y) $\Delta_1 y$	$t_0+\Delta t/2.$ $y_0+\Delta_1 y/2.$ f(t,y) $\Delta_2 y$	$t_0+\Delta t$ $y_0+\Delta_2 y$ f(t,y) $\Delta_3 y$	

Confeccionar tablas similares para los otros métodos.
Naturalmente, en el momento de aplicar las tablas las expresiones se sustituyen por números.
<u>Problema 2.10:</u> aplicar el método de Kutta de cuarto orden para aproximar el valor de y cuando t=0'6 conociendo que y=1 cuando t=0 y que $y'=0'1y^2-ty$. Tomar $\Delta t=0'2$