2.1. Interpolar el valor de una función polinómica desconocida que pase por un conjunto de puntos:

Objetivos:

1. Demostrar la existencia y unicidad del **polinomio interpolador** de grado menor o igual que **m** que pasa por **m+1** puntos de abscisas distintas.
2. Encontrar una fórmula que nos dé directamente la expresión del polinomio interpolador.
3. Encontrar un método para obtener sucesivamente puntos interpolados a medida que introducimos nuevos puntos para interpolar.
4. Encontrar un método que nos dé sucesivos términos del polinomio interpolador.
5. Entender los problemas de fiabilidad de la interpolación, especialmente si se realiza fuera del intervalo en el cual se tienen datos (extrapolación) o se utilizan polinomios de un grado elevado.

Actividad 2.2. Teniendo en cuenta la condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales sea determinado, el valor del *determinante de Vandermonde*,
Teorema -2.1: $|x_k^i| = \prod_{k>i} (x_k-x_i)$
y la
Definición 2.1: diremos que $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ es **un polinomio interpolador** de grado menor o igual que **m** en los puntos
$\{(x_k,f_k) / k=0,1...m\}$ si y sólo si, para todo k=0,1...m, $p(x_k)=f_k$,
demostrar el
Teorema 2.1: si para todo $i\neq k$, $x_i\neq x_k$, entonces existe un único polinomio interpolador de grado menor o igual que **m** en los puntos $\{(x_k,f_k) / k=0,1...m\}$.

Actividad 2.3. Teniendo en cuenta que
$\sum_{i=0}^{m} \Xi_i = \Xi_k + \sum_{i\neq k} \Xi_i$ para todo k=0,1...m, y que
$\prod_{j\neq i} \Xi_{kj} = \Xi_{kk}\cdot\prod_{j\neq i\ \&\ j\neq k} \Xi_{kj}$ para todo $i\neq k$.
demostrar el

Teorema 2.2: si para todo $i\neq k$, $x_i\neq x_k$, entonces $p(x) = \sum_{i=0}^{m} f_i \dfrac{\prod_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}$
es el polinomio interpolador de $\{(x_k,f_k) / k=0,1...m\}$ (**método de Lagrange**).

Actividad 2.4.
Problema 2.1: dados los puntos

$x_{k.}$	1.	2.	4.	5.
f_k	0.	2.	12.	21.

obtener por el método de Lagrange su interpolación para x=3.
(Sugerencia: al aplicar la fórmula, escribir primero cada denominador para evitar errores)

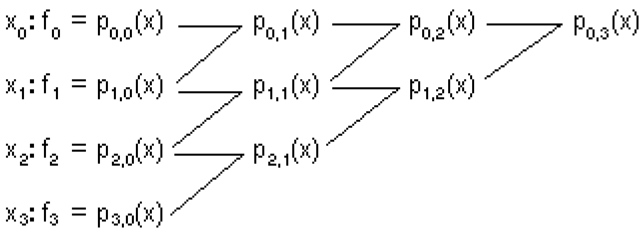
Actividad 2.5. Demostrar el

Teorema 2.3: si para todo i,j=0,1...m, si $i\neq k$, entonces $x_i\neq x_k$,
& si $i+j\leq m$, entonces $p_{i,j}$ es el polinomio interpolador de grado menor o igual que j en $\{(x_k,f_k) / k=i,i+1...i+j\}$,
entonces para todo j=1...m, i=0,1...m-j,

$$p_{i,j}(x) = \frac{(x_{i+j}-x)p_{i,j}-1 + (x-x_i)p_{i+1,j-1.}}{x_{i+j} - x_i}$$

(Sugerencia: comprobar que $p_{i,j}(x_i)=f_i$ & $p_{i,j}(x_{i+j})=f_{i+j}$ & para todo k=i+1...i+j-1, $pi_{,j}(x_k)=f_k$).

Actividad 2.6. Teniendo en cuenta que, con los $p_{i,j}$ definidos en el Teorema 22,
Teorema 2.4: para todo y=0,1...m & para todo x∈R, $p_{i,0}(x) = f_i$
y
Teorema 2.5: $p_{0,m}$ es el polinomio interpolador de grado menor o igual que **m** en $\{(x_k,f_k) / k=0,1...m\}$,
utililizar el algoritmo



(**método de Neville**)

para resolver el
Problema 2.2: dados los puntos

x_k	1.	2.	4.
f_k	0.	2.	12.

obtener por el método de Neville su interpolación para x=3 .
Añadir a continuación el punto $(x_3, f_3) = (5, 21)$ y obtener la nueva interpolación para x=3.
Comparar el resultado obtenido con el del problema 2.1.

Actividad 2.7. De acuerdo con la

Definición 2.2: con $\{(x_k,f_k) / k=0,1...m\}$ tal que para todo i,j=0,1...m, si $i\neq k$, entonces $x_i\neq x_k$, definiremos las **diferencias divididas** $f[x_i,x_{i+1},...x_j]$ mediante

$f[x_i] = f_i$ para todo i=0,1...m

$$f[x_i,x_{i+1},x_j] = \frac{ff[x_{i+1},...x_j] - f[x_i,...x_{j-1}]}{x_j - x_i}$$ para todo i=0,1...m-1 , j=i+1,...m

y calculándolas con el algoritmo

$f[x_0]$ > **$f[x_0,x_1]$** > **$f[x_0,x_1,x_2]$** > **$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$**
$f[x_1]$ > $f[x_1,x_2]$ > $f[x_1,x_2,x_3]$
$f[x_2]$ > $f[x_2,x_3]$

$f[x_3]$

<u>Problema 2.3:</u> comprobar a partir de los puntos

k.	0.	1.	2.	3.
x_k	1.	2.	4.	5.
f_k	0.	2.	12.	21.

y comparando con los resultados obtenidos por el método de Neville que, para m=0,1,2,3,

$p_m(x) = \sum_{j=0}^{m} \mathbf{f[x_0,...x_j]} \prod_{i=0}^{j-1} (x-x_i)$

es el polinomio interpolador de grado menor o igual que **m** en $\{(x_k,f_k) / k=0,1...m\}$ (**método de Newton**)

Actividad 2.8. Asumiendo que el error de la interpolación polinómica de grado menor o igual que **m** viene dada por

<u>Teorema -2.2:</u> $f(x)-p_m(x) = [f^{(m+1)}(\xi(x))/(m+1)!] \prod_{i=0}^{m} (x-x_i)$ tal que $\xi(x)\epsilon[a,b]$ tal que para todo i=0,1...m, $x_i\epsilon[a,b]$

<u>Problema 2.4:</u> acotar el valor de f(3) suponiendo que

x_k	1.	2.	4.	5.
$f(x_k)$	0.	2.	12.	21.

y que la cuarta derivada de la función f(x) en el intervalo [1,5] está entre 1 y 2 .