2.2. Aproximar la integración de una función, acotando el error de aproximación:

Objetivos:

1. Obtener unos pesos W_k independientes de la función f(x) tales que sumando su producto por los correspondientes valores de la función en determinados nodos x_k, $\sum_{k=0}^{m} W_k f(x_k)$, proporcione la integral exacta para polinomios hasta un cierto grado, y una buena aproximación para otras funciones.
2. Aprender a acotar el error de esta aproximación expresándolo como el producto de un factor C independiente de la función f(x) por la derivada de un cierto orden **r** de la función en algún punto ξ del intervalo de integración [a,b] , $Cf^{(r)}(\xi)$.
3. Estudiar el caso de nodos equidistantes, $x_k=a+kh$ (Fórmula de Newton-Cotes).
4. Aprender a mejorar la aproximación aumentando el número de nodos.

Metodología específica:

- Utilizar el método de coeficientes indeterminados para obtener tanto los pesos W_k de integración como el factor C del error, a partir de la integral exacta de potencias simples y resolviendo en grupos pequeños los correspondientes sistemas de ecuaciones para exponer públicamente a continuación los resultados obtenidos.

Actividad 2.9. Teniendo en cuenta la
Definición 2.3: siendo f:[a,b]→R una función integrable, llamaremos **integral numérica polinómica** de f en los nodos x_k tales que $a\le x_0<\ldots<x_m\le b$ a la integral en el intervalo [a,b] del polinomio interpolador de grado menor o igual que **m** en los puntos $\{(x_k,f(x_k))\}_{k=0,1\ldots m}$
y utilizando la expresión del polinomio interpolador proporcionada por el método de Lagrange, justificar la existencia de unos pesos W_k independientes de la función f(x) con los cuales $\sum_{k=0}^{m} W_k f(x_k)$ sea su integral numérica polinómica.

Actividad 2.10. Teniendo en cuenta que una integral numérica polinómica en **m+1** nodos es igual a la integral exacta para polinomios de grado menor o igual que **m**, encontrar un sistema de ecuaciones para la obtención de los pesos W_k y demostrar que si para todo $i\neq k$, $x_i\neq x_k$, este sistema de ecuaciones tiene solución única.

Actividad 2.11. Teniendo en cuenta el
Teorema -2.3: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))\,u'dt$
demostrar el
Teorema 2.6: en el caso de nodos equidistantes $x_k=a+kh$, con k=0,1...m, h=(b-a)/m, demostrar que los pesos para el cálculo de la correspondiente integral numérica polinómica (pesos de **Newton-Cotes**) tienen la forma $W_k=hW'_k(m)$, dónde $W'_k(m)$, que son los pesos correspondientes al caso h=1, sólo dependen de k y de m (pero no de a y de b).
Puede utilizarse para la demostración la expresión de los pesos W_k obtenida en la

Actividad 2.9, aplicando en la correspondiente integral el cambio de variable $x=a+th$.

Actividad 2.12. Obtener los pesos de Newton-Cotes para m=2 y el intervalo [0,2]. A partir de los mismos, obtener la fórmula general (**Fórmula de Simpson**) para la integral numérica polinómica en los nodos {a, a+h, a+2h} = {a, (a+b)/2, b},
S =

Actividad 2.13.
Problema 2.5: aproximar mediante la Fórmula de Simpson $\int_{-1}^{1} e^{x^2} dx$.

Actividad 2.14. Teniendo en cuenta la expresión del error de la interpolación polinómica de grado menor o igual que **m** dada por el Teorema -2.2 , así como que

Teorema -2.4: para toda función integrable $f:[a,b]\to R$, $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.
Teorema -2.5: para todo par de funciones integrables $f:[a,b]\to R$, $g:[a,b]\to R^+$, existe $\xi\in[a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$$

demostrar el
Teorema 2.7: el valor absoluto del error de la integral numérica polinómica en m+1 nodos puede acotarse por el producto de dos factores, uno de los cuales depende únicamente de los nodos, y el otro depende únicamente de la derivada de orden m+1 en algún punto ξ del intervalo de integración [a,b].

Actividad 2.15. Suponiendo que el error de un método de integración aproximada sea de la forma

$$\varepsilon = C\cdot f^{(r)}(\xi)$$

para algún punto ξ del intervalo de integración [a,b], deducir cómo utilizar la función $f(x)=x^r$ para obtener el valor de C.
NOTA: en caso de obtenerse C=0 puede inferirse que el método es exacto para esta función, y deberá repetirse el proceso sustituyendo **r** por **r+1** .

Actividad 2.16. Teniendo en cuenta el

Teorema -2.6: para todo $f\in C^r(R\to R)$, $x\in C^1(R\to R)$, $\dfrac{d^r f}{dt^r}(x(t)) = (dx/dt)^r \dfrac{d^r f}{dx^r}(x)$

así como el Teorema -2.3 y el Teorema 2.6, demostrar el
Teorema 2.8: si la expresión del error para aproximar $\int_0^m f(t)dt$ con nodos equidistantes y h=1 es

$$\varepsilon' = C'\frac{d^r f}{dt^r}(\zeta) \text{ para algún } \zeta\in[0,m],$$

entonces la expresión general del error para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ con nodos equidistantes y h=(b-a)/m será

$$\varepsilon = C.\frac{d^r f}{dx^r}(\xi) \text{ para algún } \xi \in [a,b] \text{ con } C=h^{r+1} C'$$

Actividad 2.17. Obtener la expresión del error para la Fórmula de Simpson para el intervalo [0,2] (con h=1), y a partir de ella obtener la expresión general del error para la Fórmula de Simpson para el intervalo [a,b] (con h=(b-a)/2),

ε_S =

Indicar para qué polinomios será exacta esta fórmula.

Actividad 2.18.

Problema 2.6: acotar el error de la Fórmula de Simpson aplicada a $\int_{-1}^{1} e^{x2} dx$. Valorarlo.

Actividad 2.19. Teniendo en cuenta la

Definición 2.4: siendo f:[a,b]→R una función integrable, denominaremos **integral numérica compuesta** de grado **m** en los mM+1 nodos $\{a+kh\}_{k=0,1...mM}$, con h=(b-a)/(mM), a.

$$\sum_{i=0}^{M-1} N_m(i) ,$$

donde $N_m(i)$ es la fórmula de Newton-Cotes de grado **m** para la integración numérica polinómica de la función f(x) en el intervalo [a+imh,a+(i+1)mh] ,

demostrar el

Teorema 2.9: para toda función integrable f:[a,b]→R , su integral numérica compuesta de grado 2 en los 2M+1 nodos $\{a+kh\}_{k=0,1...2M}$, con h=(b-a)/(2M), (**regla de Simpson**) viene dada por

$$[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + ... + 2f(b-2h) + 4f(b-h) + f(b)]\ h/3.$$
$$= [f(a) + f(b) + \sum_{i=1}^{M-1} 2f(a+2ih) + \sum_{i=0}^{M-1} N4f(s+(2i+1)h)](b-a)/(6M)$$

Actividad 2.20. Teniendo en cuenta el

Teorema -2.7: para toda función continua f:[a,b]→R y todo conjunto de puntos $\xi_i \in [a,b]$, i=1...n, existe $\xi \in [a,b]$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)= nf(\xi)$$

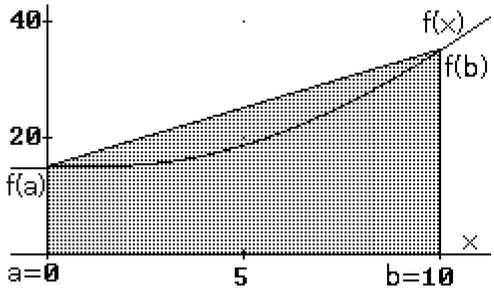
demostrar el

Teorema 2.10: para toda $f \in C^4([a,b],R)$, el error de la regla de Simpson para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ viene dado por

$$\varepsilon_{RS} = - f^{(4)}(\xi)(b-a)^5/(2880M^4) \text{ para algún } \xi \in [a,b]$$

Actividad 2.21.

Problema 2.7: ¿qué incremento **h** deberemos tomar para obtener una aproximación a $\int_{-1}^{1} e^{x2} dx$ con un error menor a 0'01 mediante la regla de Simpson?



Trabajo 4 (para su realización en equipo)**:**
Obtener los coeficientes W_0, W_1 que hacen que

$$W_0\, f(a) + W_1\, f(b)$$

dé el resultado exacto de la integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

si f(x) es un polinomio de grado menor o igual que 1 (**Fórmula del Trapecio** o de Newton-Cotes para m=1). Obtener la expresión del error para cualquier función analítica f(x).
Utilizarlo para acotar $\int_0^{10} (225+x^3)^{½}dx$ a sabiendas de que $|f''(x)|<0'6$ en este intervalo.