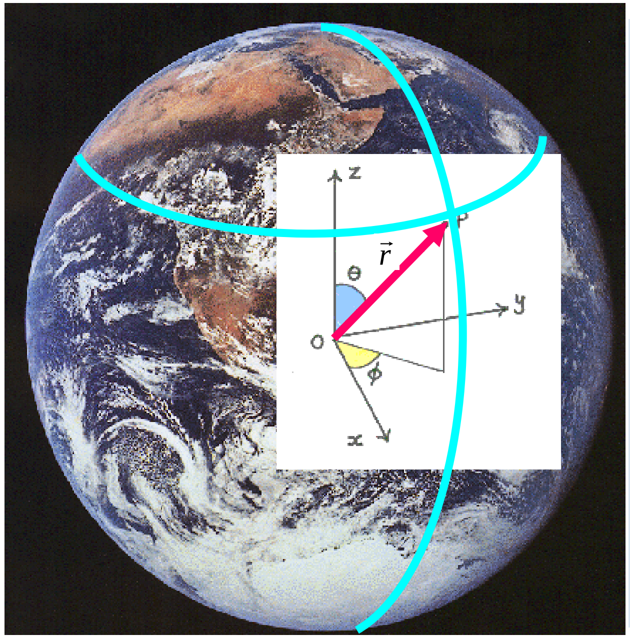
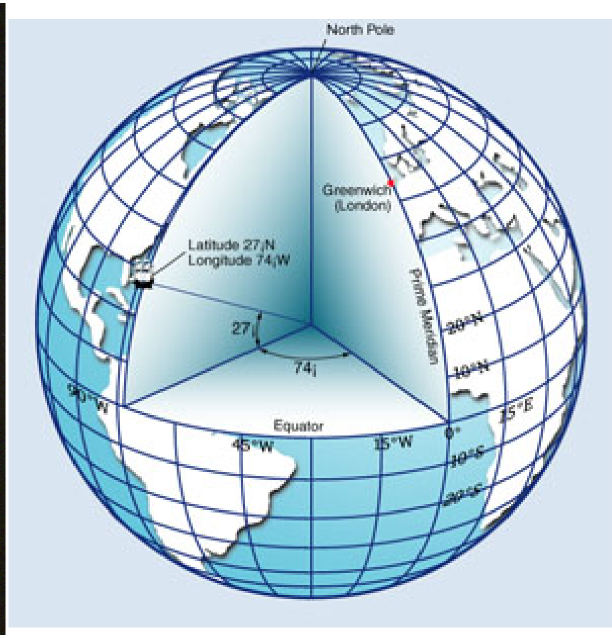
APÉNDICE : COORDENADAS CURVILÍNEAS

Chantal Ferrer Roca 2008



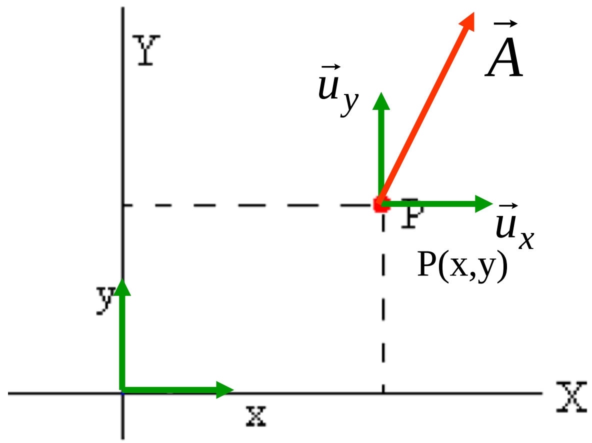


Las coordenadas esféricas se utilizaban en el siglo IV-III a.C., tanto para la determinación de posiciones estelares (por ejemplo, catalogación estelar de Hiparco) como de longitud y latitud sobre la superficie terrestre (por ejemplo, Geografía Física de Eratóstenes)

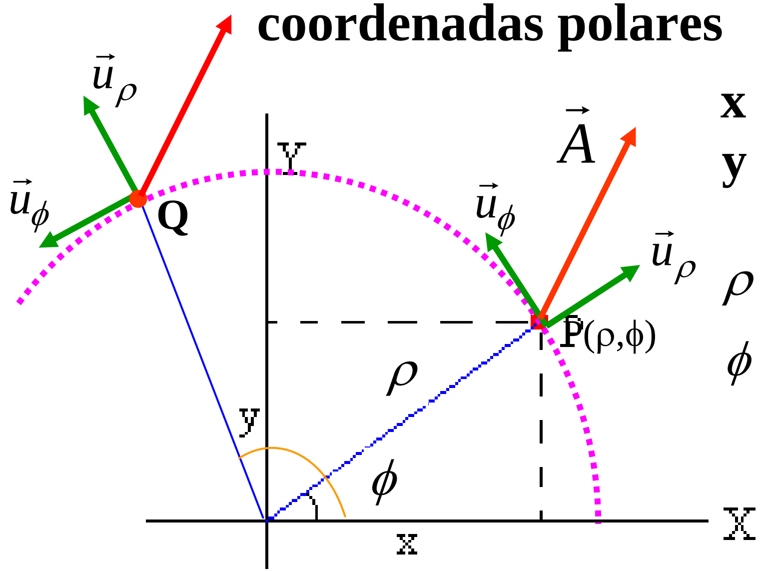
INTRODUCCIÓN A LAS COORDENADAS CURVILÍNEAS: POLARES

Chantal Ferrer Roca 2008

coordenadas cartesianas



coordenadas polares



$$\mathbf{x} = \rho \cos\phi$$
$$\mathbf{y} = \rho \sin\phi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\phi = tg^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\vec{A} = A_x\vec{u}_x + A_y\vec{u}_y$$

?

vectores unitarios base

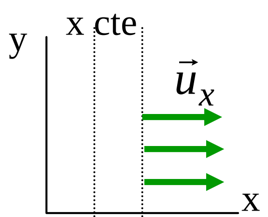
$$\vec{A} = A_\rho\vec{u}_\rho + A_\phi\vec{u}_\phi$$

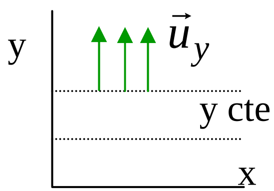
⊥ a las líneas de x cte.
sentido: incremento de x

⊥ a las lineas de y cte.
sentido: incremento de y

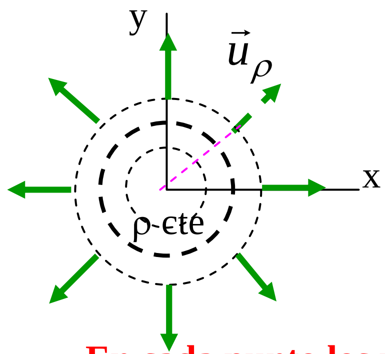
⊥ a las líneas de ρ cte.
sentido: incremento de ρ

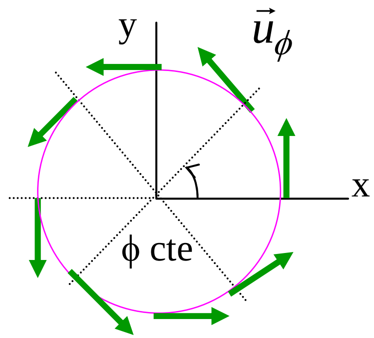
⊥ a las líneas de φ cte.
sentido: incremento de φ





En todos los puntos los vectores unitarios tienen la misma dirección



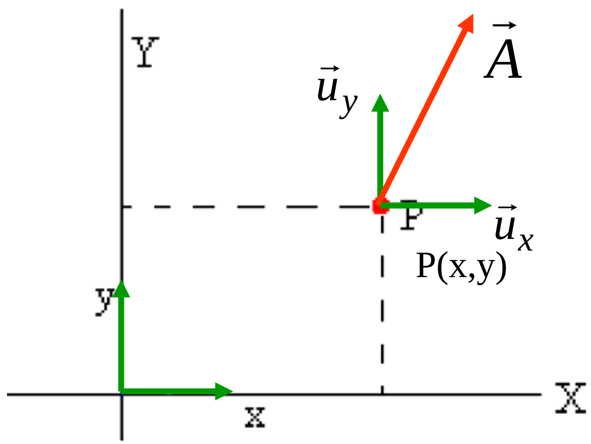


En cada punto los vectores unitarios tienen dirección diferente

INTRODUCCIÓN A LAS COORDENADAS CURVILÍNEAS: POLARES

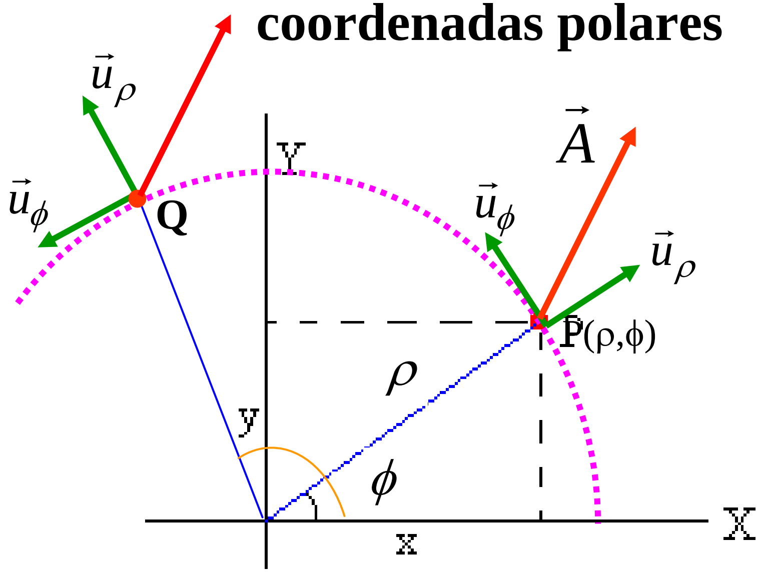
Chantal Ferrer Roca 2008

coordenadas cartesianas



En todos los puntos los vectores unitarios tienen la misma dirección

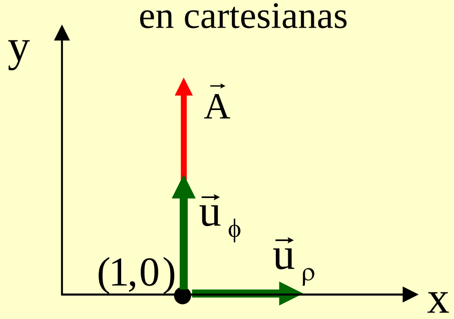
coordenadas polares



En cada punto los vectores unitarios tienen dirección diferente

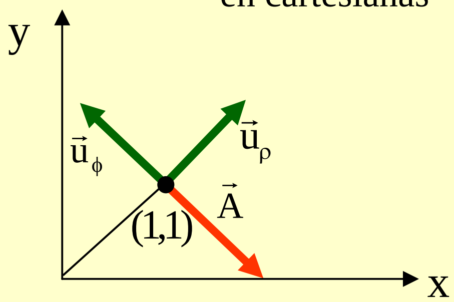
Ejemplos 2

$\vec{A} = (0, 2)$ En el punto (1,0) en cartesianas



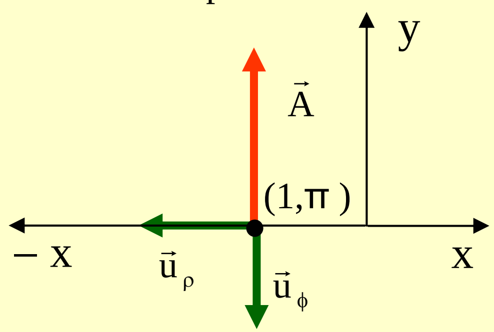
$\vec{A} = (0,2) = 2\vec{u}_\phi$ En polares

$\vec{A} = (1,-1)$ En el punto (1,1) en cartesianas



$\vec{A} = (0,-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}\vec{u}_\phi$ En polares

$\vec{A} = (0,-2)$ En el punto (1,π) en polares

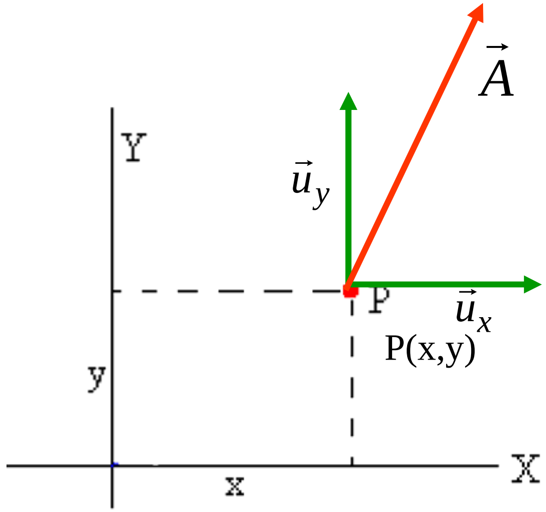


$\vec{A} = (0,2) = 2\,\vec{j}$ En cartesianas

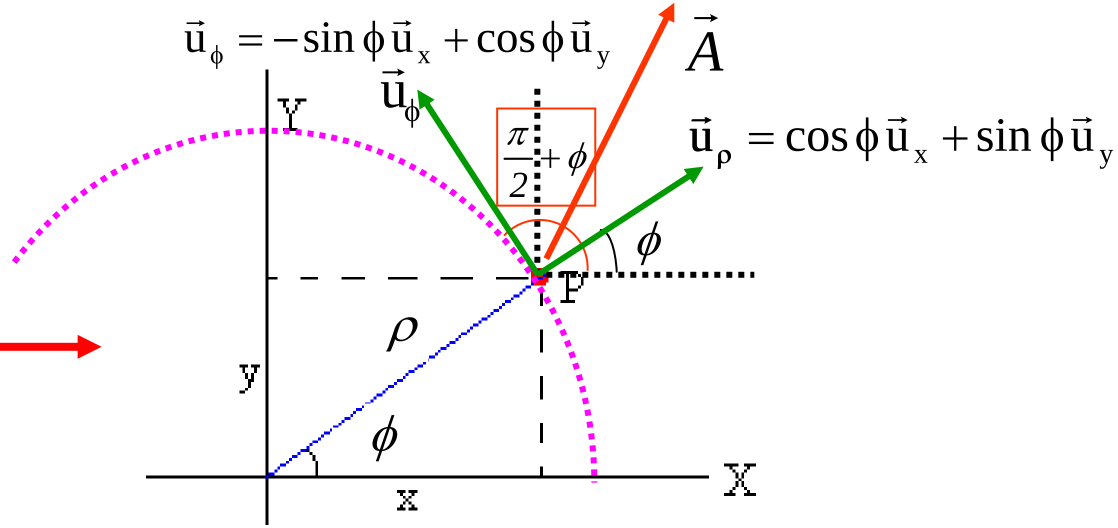
INTRODUCCIÓN A LAS COORDENADAS CURVILÍNEAS: POLARES

Chantal Ferrer Roca 2008

coordenadas cartesianas



coordenadas polares



$$\vec{A}_{car} = A_x\vec{u}_x + A_y\vec{u}_y$$

$$\vec{A}_{pol} = A_\rho \underbrace{\vec{u}_\rho}_{\cos\phi\,\vec{u}_x + \sin\phi\,\vec{u}_y} + A_\phi \underbrace{\vec{u}_\phi}_{-\sin\phi\,\vec{u}_x + \cos\phi\,\vec{u}_y}$$

$$\vec{A}_{pol} = (A_\rho\cos\phi - A_\phi\sin\phi)\,\vec{u}_x + (A_\rho\sin\phi + A_\phi\cos\phi)\,\vec{u}_y$$

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}}_{T^{-1} = T^T} \begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\phi \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}_\rho \\ \vec{u}_\phi \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{A}_{car} = T^{-1}\vec{A}_{pol}}$$

$$\boxed{\vec{A}_{pol} = T\,\vec{A}_{car}}$$

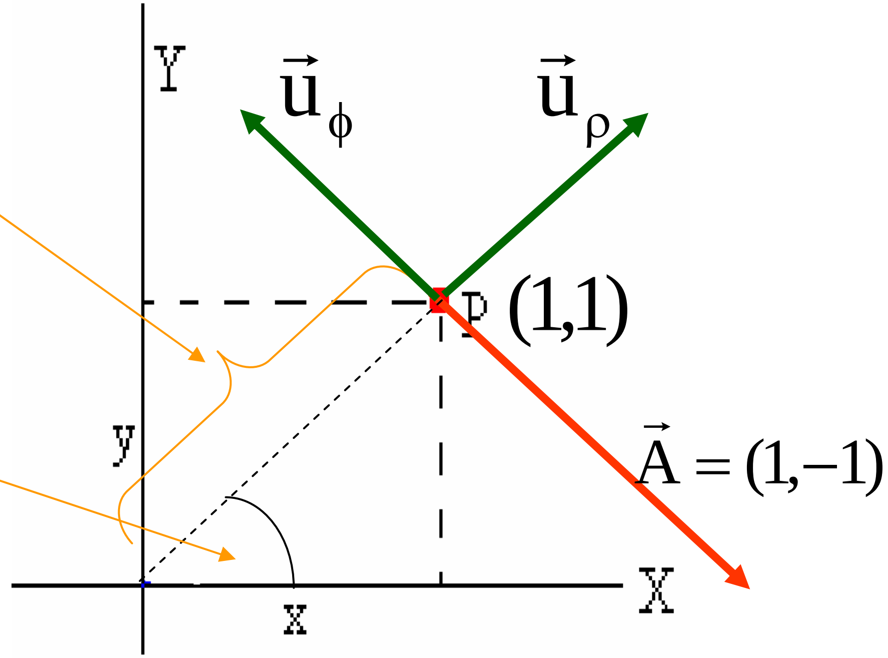
Ejemplo 3: (Problema 1.1 b) boletín)

El vector (1,-1) está aplicado en el punto (1,1), ambos en cartesianas. Escribid el vector en coordenadas polares

Geométricamente: es fácil ver que en el punto P (1,1) el vector (1,-1) tiene dirección u_ϕ (y sentido opuesto), sin realizar una transformación de las coordenadas.

$$P\,(x=1, y=1) \longrightarrow \rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}$$

$$\phi = tg^{-1}\frac{y}{x} = tg^{-1}1 = 45^o$$



$$\vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{pol}} = \begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^o & \sin 45^o \\ -\sin 45^o & \cos 45^o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -\sqrt{2}\vec{u}_\phi$$

INTRODUCCIÓN A LAS COORDENADAS CURVILÍNEAS: POLARES

Chantal Ferrer Roca 2008

vector de posición del punto P(x,y,z)

$$\vec{\mathbf{r}}_{car} = (x,y) = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y = \rho\cos\phi\,\vec{u}_x + \rho\sin\phi\,\vec{u}_y$$

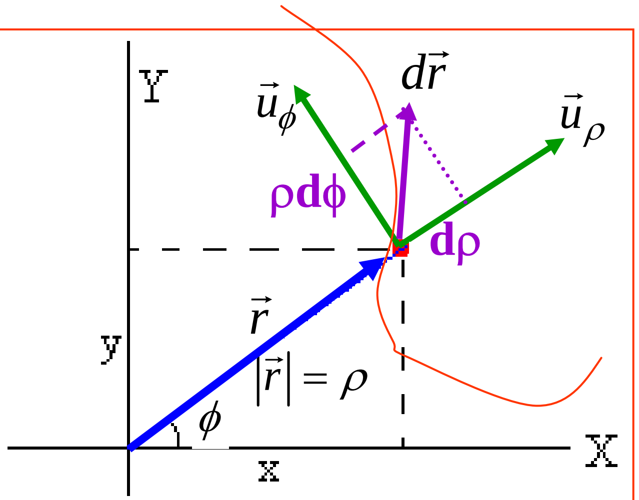
$$\vec{\mathbf{r}}_{pol} = (\rho,0) = \rho\,\vec{u}_\rho$$

elemento de trayectoria (geométricamente)

$$d\vec{\mathbf{r}}_{car} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y \qquad d\vec{\mathbf{r}}_{pol} = d\rho\,\vec{u}_\rho + \rho\,d\phi\,\vec{u}_\phi$$

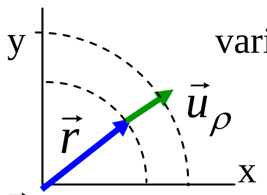
variación de la distancia radial

variación del elemento de arco



mismos resultados usando la matriz T

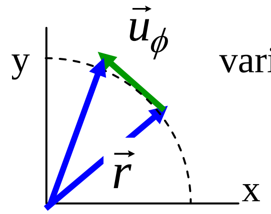
Obtención analítica de los vectores unitarios



variación de ρ

$$\frac{d\vec{r}}{d\rho} = \cos\phi\,\vec{u}_x + \sin\phi\,\vec{u}_y = \vec{u}_\rho$$

$$\vec{u}_\rho = \frac{d\vec{r}}{d\rho} = \frac{1}{\underbrace{\left|d\vec{r}/d\rho\right|}_{h_\rho}}\frac{d\vec{r}}{d\rho}$$



variación de ϕ

$$\frac{d\vec{r}}{d\phi} = \rho(-\sin\phi\,\vec{u}_x + \cos\phi\,\vec{u}_y) = \rho\vec{u}_\phi$$

$$\vec{u}_\phi = \frac{1}{\rho}\frac{d\vec{r}}{d\phi} = \frac{1}{\underbrace{\left|d\vec{r}/d\phi\right|}_{h_\phi}}\frac{d\vec{r}}{d\phi}$$

COORDENADAS CURVILÍNEAS- GENERALIZACIÓN

Chantal Ferrer Roca 2008

Curvilíneas q_1, q_2, q_3

sistema de coordenadas

$$\begin{Bmatrix} x = f_1(q_1, q_2, q_3) \\ y = f_2(q_1, q_2, q_3) \\ z = f_3(q_1, q_2, q_3) \end{Bmatrix}$$

vectores unitarios

$$\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}; \quad \mathbf{h_i} = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right|;$$

matriz de transformación cart-curv

$$T = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \end{pmatrix}$$

elemento de línea

$$\mathbf{d\vec{r}} = h_1 dq_1 \vec{u}_1 + h_2 dq_2 \vec{u}_2 + h_3 dq_3 \vec{u}_3$$

Ejemplo: coordenadas polares

$$\mathbf{x} = \rho \cos\phi \qquad q_1 = \rho$$

$$\mathbf{y} = \rho \sin\phi \qquad q_2 = \phi$$

$$\vec{u}_\rho = \frac{d\vec{r}}{d\rho} = \underbrace{\frac{1}{|d\vec{r}/d\rho|}}_{h_\rho}\frac{d\vec{r}}{d\rho}$$

$$\vec{u}_\phi = \frac{1}{\rho}\frac{d\vec{r}}{d\phi} = \underbrace{\frac{1}{|d\vec{r}/d\phi|}}_{h_\phi}\frac{d\vec{r}}{d\phi}$$

$$T = \begin{pmatrix} \vec{u}_\rho \\ \vec{u}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

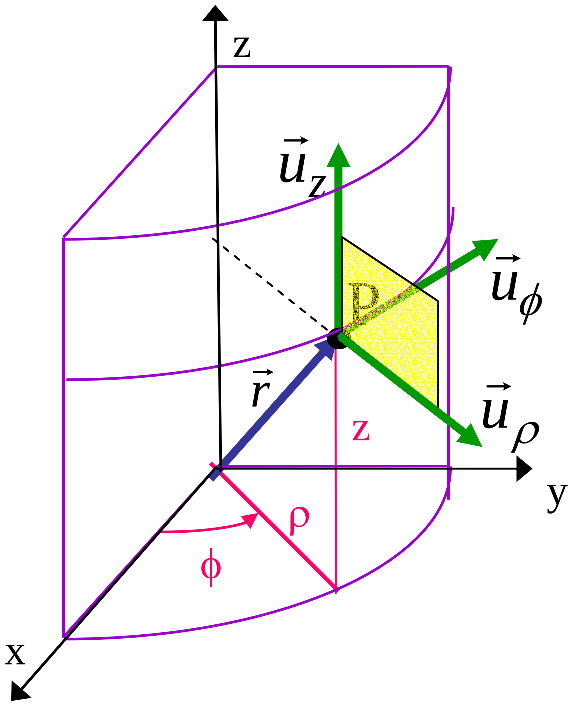
$$\mathbf{d\vec{r}} = d\rho\, \vec{u}_\rho + \rho\, d\phi\, \vec{u}_\phi$$

- Si la coordenada q_i es una distancia, $h_i = 1$

- Si la coordenada q_i es un ángulo, h_i es la cantidad que lo transforma en una distancia de arco $h_i\, dq_i$.

COORDENADAS CILÍNDRICAS

Chantal Ferrer Roca 2008



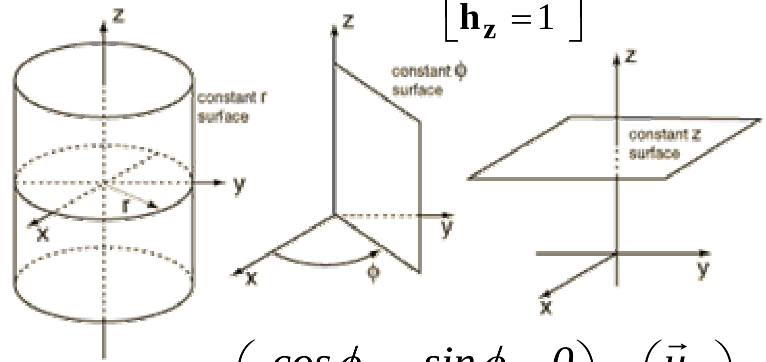
$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{x} &= \rho\cos\phi \\ \mathbf{y} &= \rho\ \sin\phi \\ \mathbf{z} &= z \end{aligned}\right\}$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\phi = tg^{-1}\frac{y}{x}$$

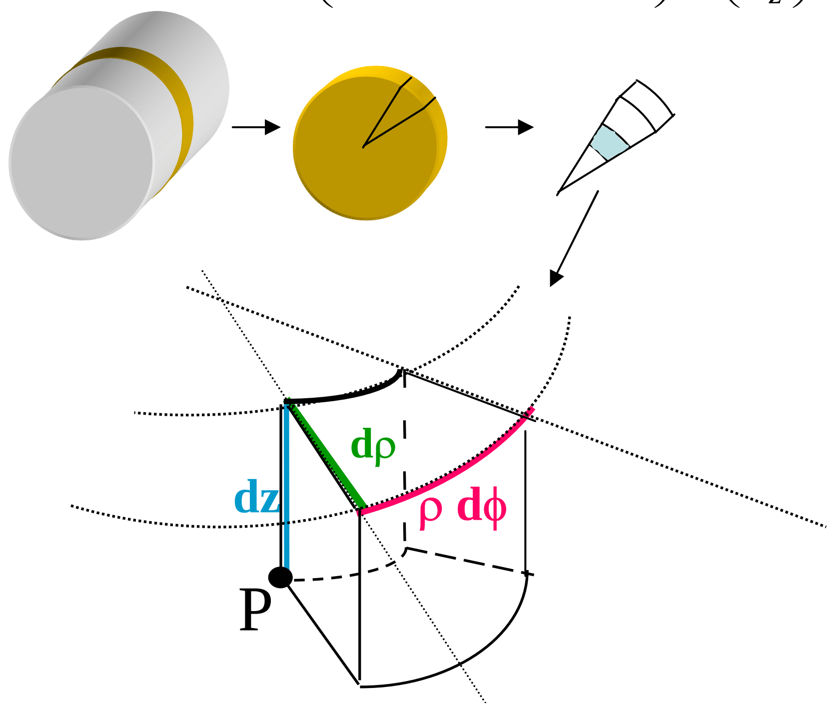
$$\mathbf{z} = z$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_\rho = 1 \\ \mathbf{h}_\phi = \rho \\ \mathbf{h}_\mathbf{z} = 1 \end{bmatrix}$$



vectores unitarios $\mathbf{T}_{\mathbf{cil}} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}_\rho \\ \vec{u}_\phi \\ \vec{u}_z \end{pmatrix}$

$$\vec{\mathbf{r}} = \rho\vec{\mathrm{u}}_\rho + z\vec{\mathrm{u}}_z$$



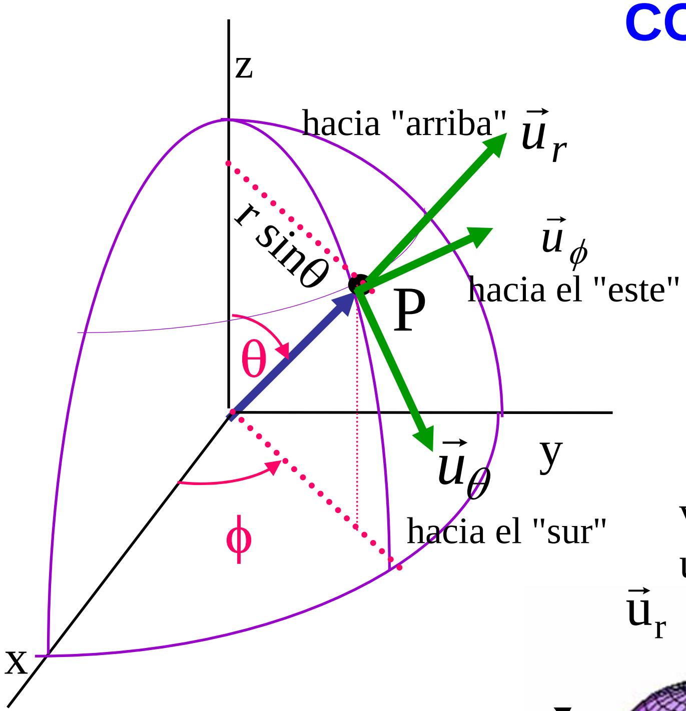
$$\mathbf{d}\vec{\mathbf{r}} = d\rho\,\vec{u}_\rho + \rho\,d\phi\,\vec{u}_\phi + dz\,\vec{u}_z;$$

$$\mathbf{ds} = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\phi)^2 + (dz)^2}$$

Problema 1.1, 1.3 boletín   Cuestiones **1.4, 1.9**

COORDENADAS ESFÉRICAS

Chantal Ferrer Roca 2008



$$\begin{bmatrix} \mathbf{h_r} = 1 \\ \mathbf{h}_\theta = r \\ \mathbf{h}_\phi = r\sin\theta \end{bmatrix}$$

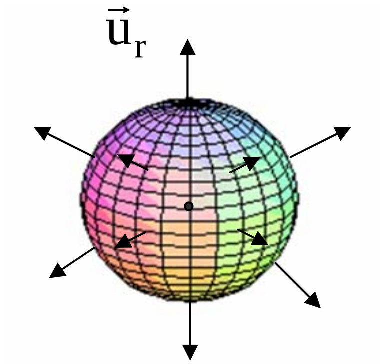
$$\begin{cases} \mathbf{x} = r\sin\theta\cos\phi \\ \mathbf{y} = r\sin\theta\sin\phi \\ \mathbf{z} = r\cos\theta \end{cases} \qquad \mathbf{r} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

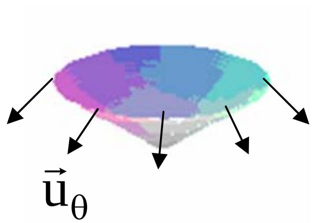
$$\theta = \cos^{-1}\frac{z}{r};\ \phi = tg^{-1}\frac{y}{x} \qquad \theta\in[0,\pi],\quad \phi\in[0,2\pi]$$

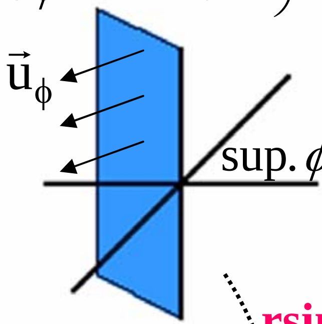
vectores unitarios

$$\mathbf{T_{esf}} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{u}_\theta \\ \vec{u}_\phi \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{r}} = r\vec{u}_r$$

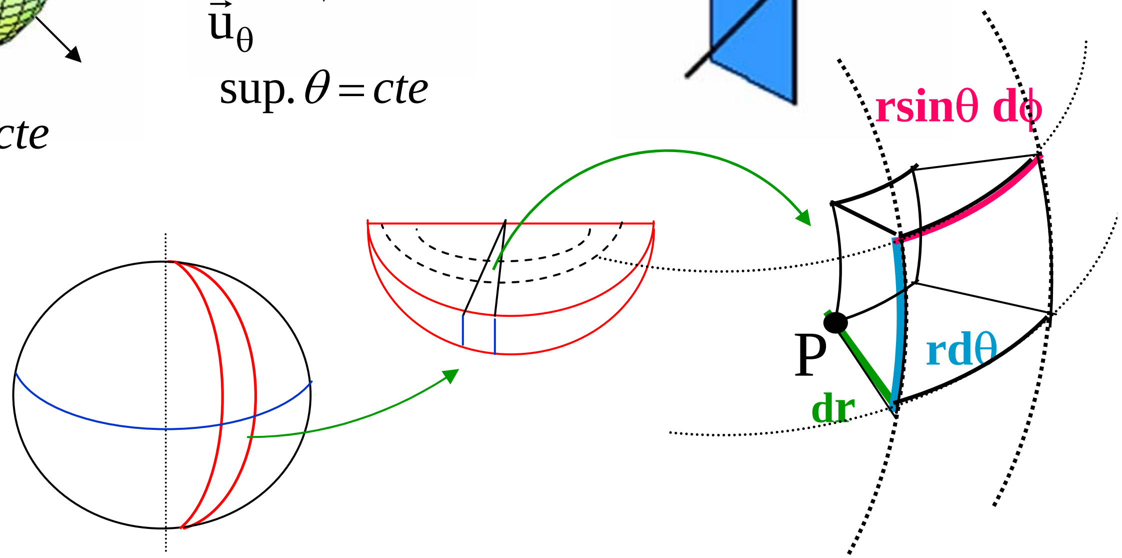






$$\mathbf{d\vec{r}} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,d\phi\,\vec{u}_\phi;$$

$$\mathbf{ds} = \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2 + (r\sin\theta d\phi)^2};$$

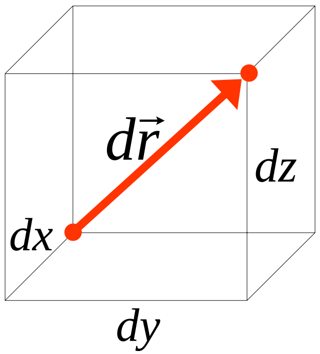


Problema 1.2, 1.3 boletín

Cuestiones 5, **6**

Elementos de línea, superficie y volumen

CARTESIANAS

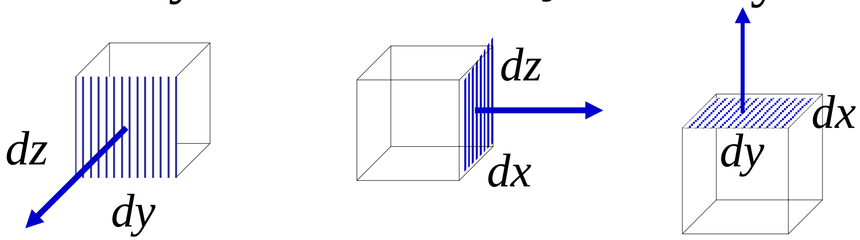


$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

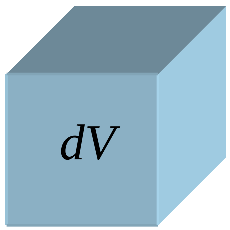
$$C = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$d\vec{S} = dS_x\,\vec{i} + dS_y\,\vec{j} + dS_z\,\vec{k}$$
$$= \mathrm{dydz}\,\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{dxdz}\,\vec{\mathrm{j}} + \mathrm{dxdy}\,\vec{\mathrm{k}}$$

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$



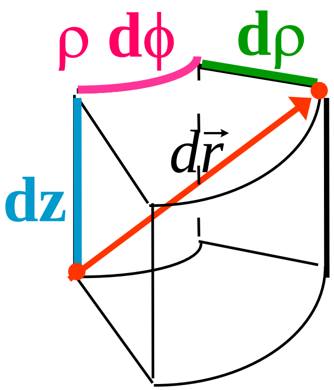
$$M = \int_V \rho \cdot dV$$

$$\Phi = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\,dV$$

Chantal Ferrer Roca 2008

Elementos de línea, superficie y volumen

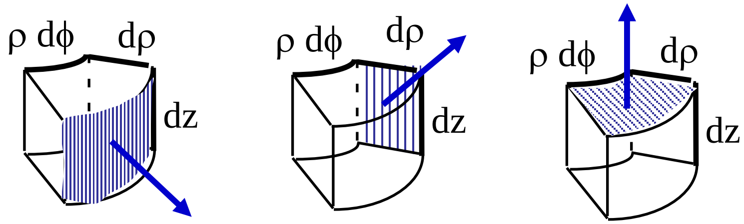
CILÍNDRICAS



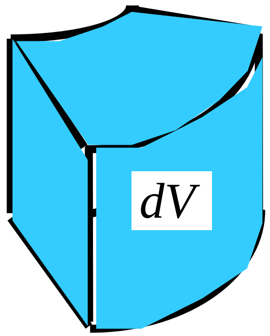
$$\mathbf{d\vec{r}} = d\rho\,\vec{u}_\rho + \rho\,d\phi\,\vec{u}_\phi + dz\,\vec{u}_z$$

$$\mathbf{d\vec{S}} = dS_\rho\,\vec{u}_\rho + dS_\phi\,\vec{u}_\phi + dS_z\,\vec{u}_z;$$

$$= \rho\,d\phi\,dz\,\vec{u}_\rho + d\rho\,dz\,\vec{u}_\phi + \rho\,d\phi\,d\rho\,\vec{u}_z;$$



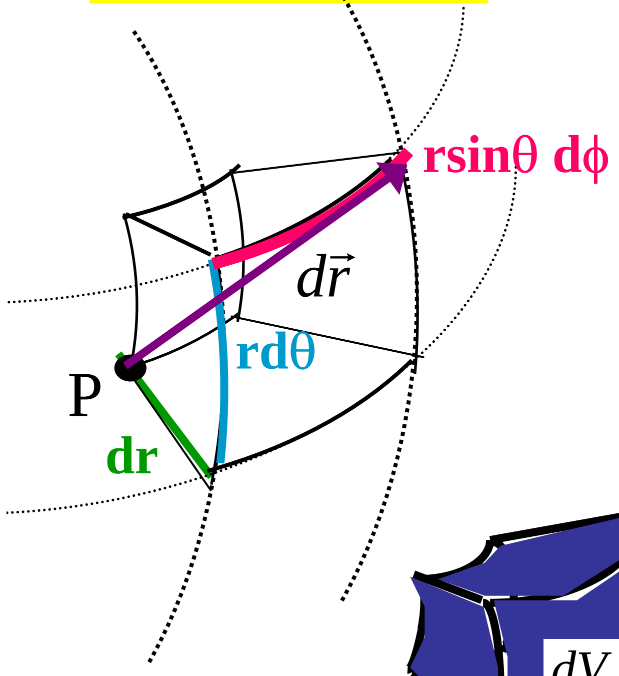
Ejemplo: calcular el flujo a través de una superfície circular de radio a del campo vectorial $\vec{A} = (x^2 + y^2)\vec{u}_z$



$$dV = \rho\,d\rho\,d\phi\,dz$$

Elementos de línea, superficie y volumen

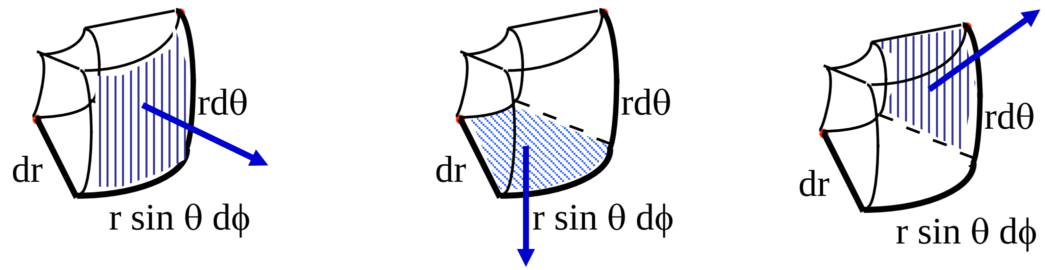
ESFÉRICAS

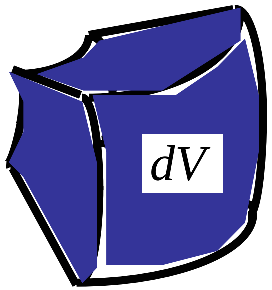


$$d\vec{r} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,d\phi\,\vec{u}_\phi;$$

$$d\vec{S} = dS_r\,\vec{u}_r + dS_\theta\,\vec{u}_\theta + dS_\phi\,\vec{u}_\phi$$

$$= r^2\sin\theta d\theta\,d\phi\,\vec{u}_r + r\sin\theta dr\,d\phi\,\vec{u}_\theta + r\,dr\,d\theta\,\vec{u}_\phi$$





$$dV = r^2 dr\,\underbrace{\sin\theta\,d\theta\,d\phi}_{d\Omega}$$

Elemento de ángulo sólido

Ángulo sólido de una esfera: $\Omega = \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi$

Superficie de una esfera: $S = \int dS_r = a^2 \int d\Omega = 4\pi a^2$

Ejemplo : calcular la carga de una esfera de radio a centrada en el origen, cuya densidad volúmica es

$$\rho(\vec{r}) = x^2 + y^2 + z^2$$

Problema del Boletín: 6.6

Chantal Ferrer Roca 2008

Operadores expresados en coordenadas curvilíneas

Operadores en cilíndricas

GRADIENTE $\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial \phi}\vec{u}_\phi + \frac{\partial \psi}{\partial z}\vec{u}_z$

DIVERGENCIA $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

ROTACIONAL $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\vec{u}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\vec{u}_\phi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right)\vec{u}_z$

LAPLACIANO $\Delta\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\frac{\partial \psi}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$

Problema del Boletín: 6.7

Chantal Ferrer Roca 2008

Operadores expresados en coordenadas curvilíneas

Operadores en esféricas

GRADIENTE $$\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\vec{u}_\phi$$

DIVERGENCIA $$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$

ROTACIONAL $$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\vec{u}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{u}_\phi$$

LAPLACIANO $$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

Problema del Boletín: 6.7

Ejercicios del Cuestionario: 68

Operadores y elementos de línea, superficie y volumen

Coordenadas generalizadas

elementos

$$\mathbf{d\vec{r}} = h_1 dq_1 \vec{u}_1 + h_2 dq_2 \vec{u}_2 + h_3 dq_3 \vec{u}_3 \qquad \textit{elemento de línea}$$

$$\mathbf{ds} = |d\vec{r}| = \left((h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2\right)^{1/2} \qquad \textit{elemento de arco}$$

$$\mathbf{d\vec{S}} = h_2 h_3 dq_2 dq_3 \vec{u}_1 + h_1 h_3 dq_1 dq_3 \vec{u}_2 + h_1 h_2 dq_1 dq_2 \vec{u}_3 \qquad \textit{e. de sup erfície}$$

$$\mathbf{dV} = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \qquad \textit{elemento de volumen}$$

Operadores

GRADIENTE

$$\vec{\nabla}\psi = \frac{\vec{u}_1}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \frac{\vec{u}_2}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2} + \frac{\vec{u}_3}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}$$

DIVERGENCIA

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial(h_2 h_3 A_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 A_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 A_3)}{\partial q_3}\right]$$

ROTACIONAL

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{u}_1 & h_2\vec{u}_2 & h_3\vec{u}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

LAPLACIANO

$$\Delta\psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}\right)\right]$$