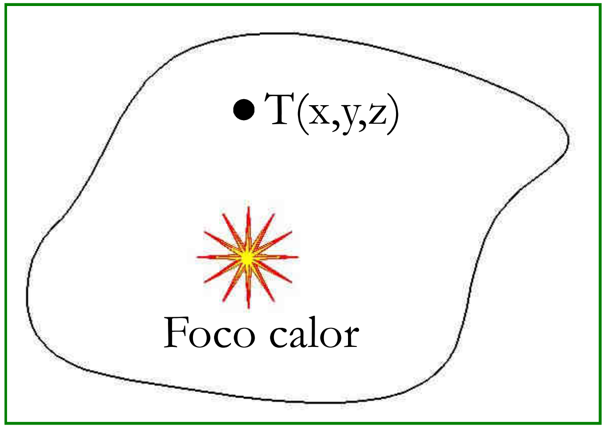
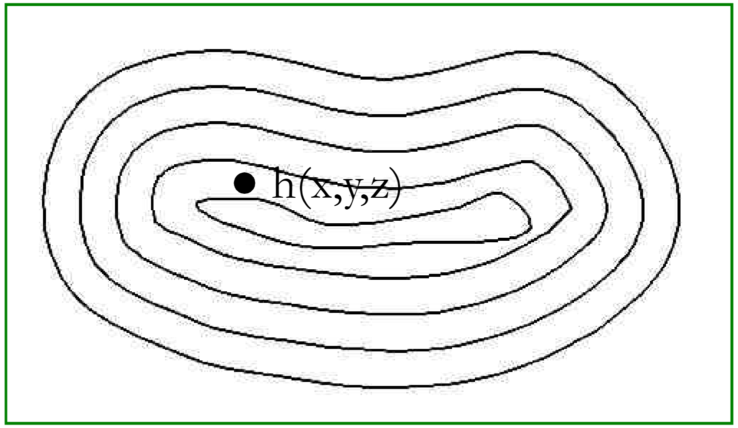
Tema 6. Apéndice. Operadores vectoriales.

Introducción. Concepto de campo.

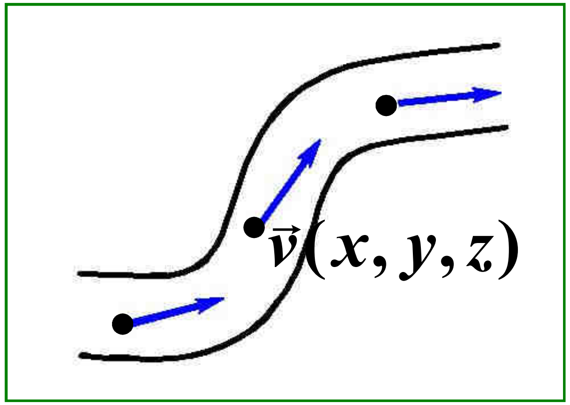
Campo:función que depende de la posición.



Campo escalar: temperatura.



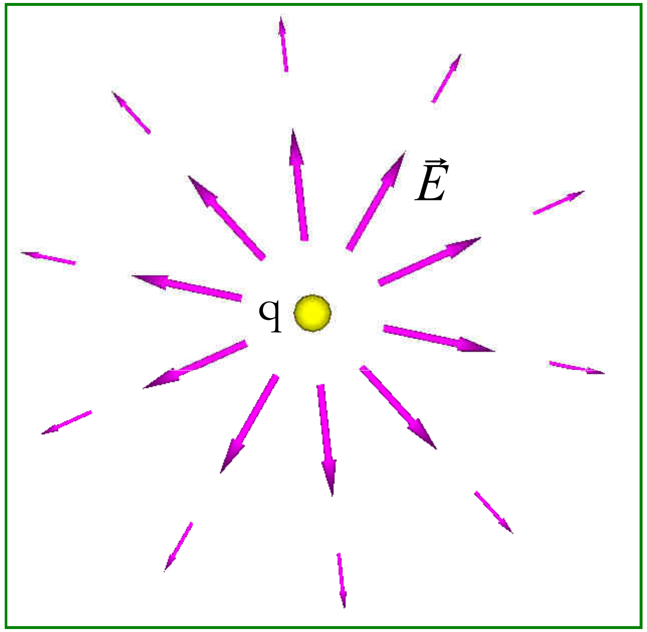
Campo escalar: altitud.



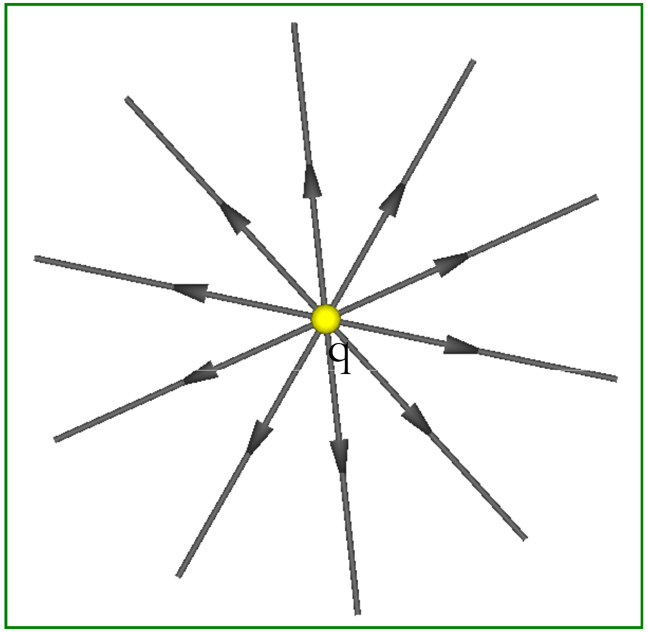
Campo vectorial: velocidad líquido en tubería.

Líneas de campo:

- Las líneas de campo se dibujan tangentes al campo eléctrico.



Representación con vectores campo

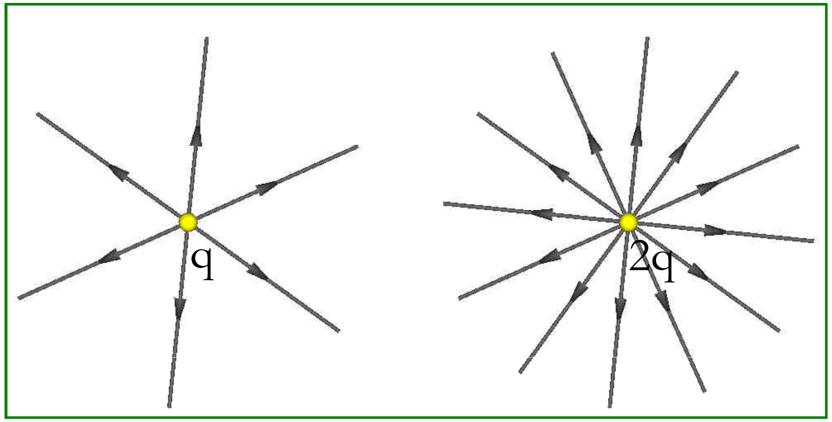


Representación con líneas de campo

- Condición matemática tangencia:

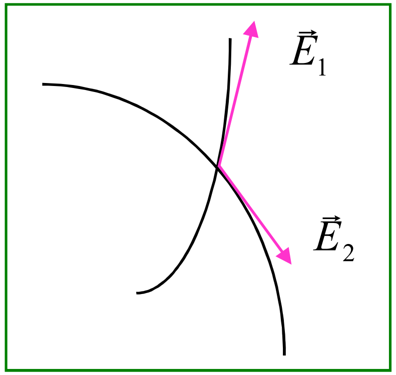
$$\vec{E} \times d\vec{r} = 0 \qquad \frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

- El número de líneas de campo por unidad de superficie es proporcional al campo:



$$\boxed{\frac{n^o \text{ de líneas}}{\text{superficie}} \propto E}$$

- Las líneas de campo no pueden cruzarse...

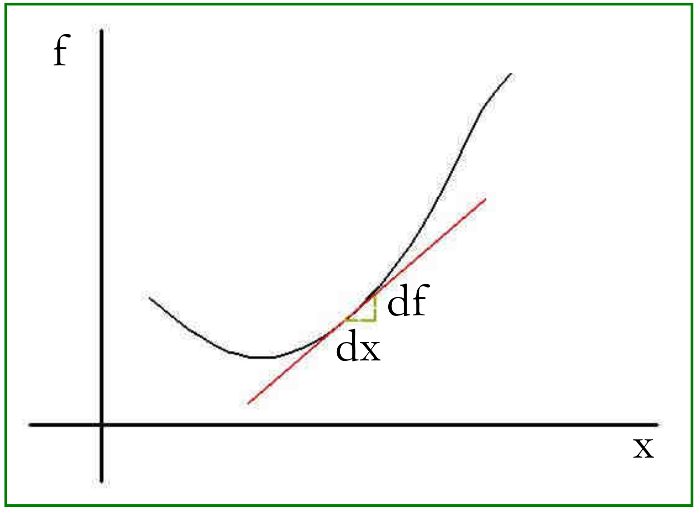


... ya que en ese caso tendríamos dos valores del campo en un mismo punto

Tema 6. Apéndice. Operadores vectoriales.

- Gradiente:

- En 1D el cambio de una función lo determinamos con la derivada:



$$df = \frac{df}{dx}dx$$

- Si tenemos una función T(x,y,z) (un campo escalar):

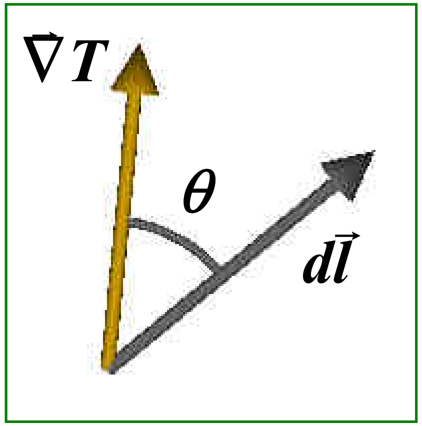
$$dT = \frac{\partial T}{\partial x}dx + \frac{\partial T}{\partial y}dy + \frac{\partial T}{\partial z}dz$$

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{u}_z\right)(dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z) \equiv \vec{\nabla}T \cdot d\vec{l}$$

$$d\vec{l} \equiv dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$ Desplazamiento

$$\boxed{\vec{\nabla}T \equiv \frac{\partial T}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{u}_z}$$ **Gradiente** de T

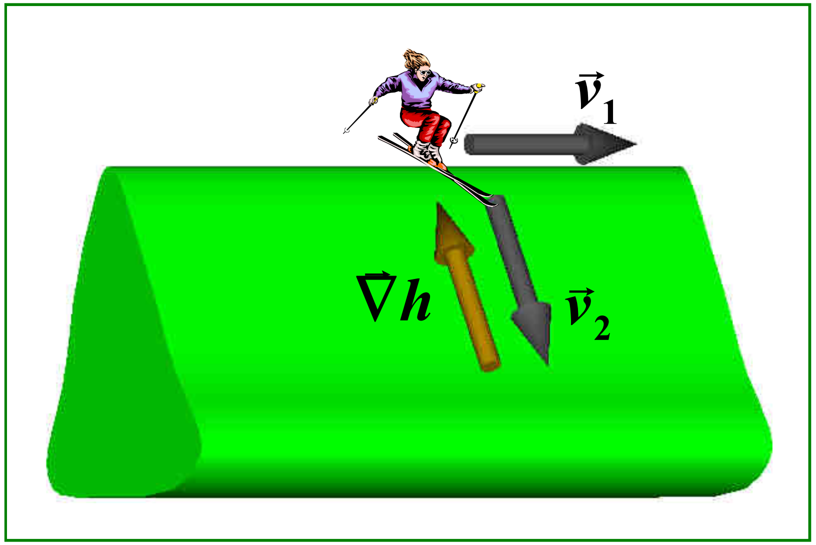
- Interpretación geométrica:



$$dT = \vec{\nabla} T \cdot d\vec{l} = |\vec{\nabla} T| dl \cos\theta$$

- Cuanto mayor sea $|\vec{\nabla} T|$ más variará la función
- Si θ=0 el aumento es máximo ⇒ La dirección del gradiente coincide con la del aumento máximo de la función.
- Si θ=90 no hay variación

- **Ejemplo:** Esquiador en lo alto de una cadena montañosa.

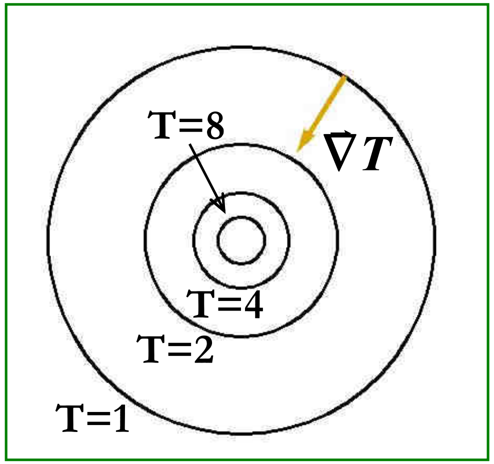


$\vec{\nabla} h$: del valle a la montaña

$d\vec{l}$ según $\vec{v}_1$ $\quad dh = |\vec{\nabla} h| dl \cos 90 = 0$

$d\vec{l}$ según $\vec{v}_2$ $\quad dh = |\vec{\nabla} h| dl \cos 180 = -|\vec{\nabla} h| dl$

- **Ejemplo:** Gradiente de la función T=1/r.



$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{u}_r = -\frac{1}{r^2}\vec{u}_r$$

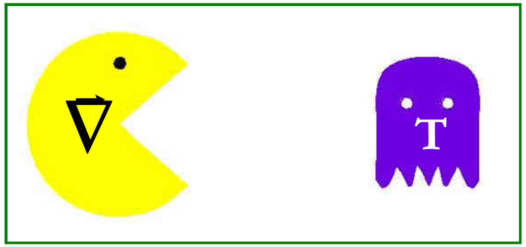
En la dirección perpendicular al gradiente no hay cambio.

- El operador gradiente:

$$\vec{\nabla} T \equiv \frac{\partial T}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{u}_z \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z \right) T$$

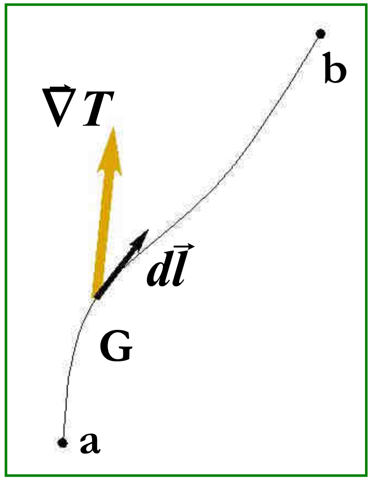
$$\boxed{\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z}$$

Operador gradiente



$\vec{\nabla}$ es un operador hambriento de funciones.

- Teorema:

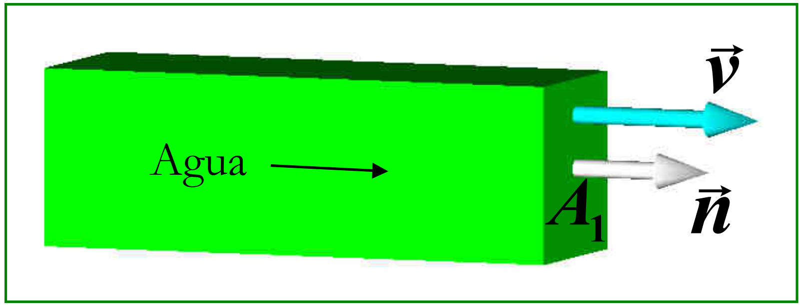


$$\boxed{\int_{\Gamma} \vec{\nabla} T \cdot d\vec{l} = \int_a^b dT = T(b) - T(a)}$$

(Análogo en 3D de: $\displaystyle\int_a^b \frac{df}{dx}dx = f(b) - f(a)$)

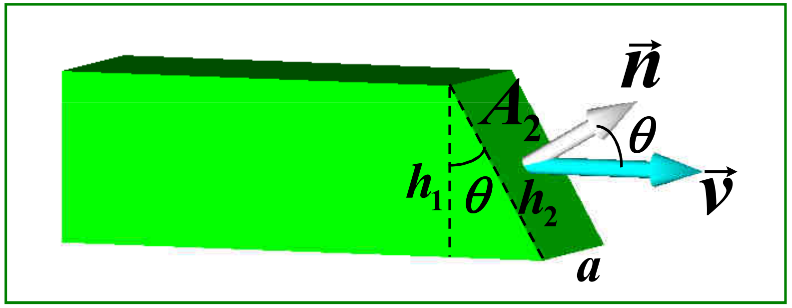
Tema 6. Apéndice. Operadores vectoriales.

- Flujo:



$$\Phi = vA_1$$

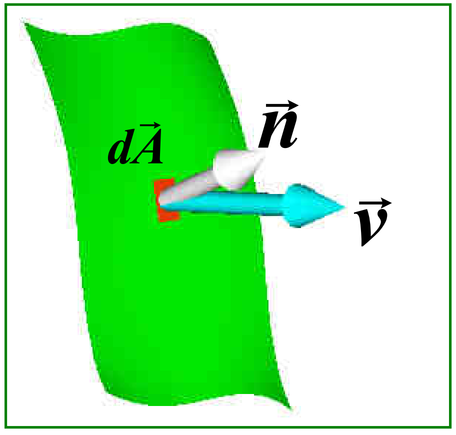
$$[\Phi] = m^3/s$$ (¡Flujo de agua!)



$$\Phi = vA_1$$

$$A_1 = h_1 a = h_2 \cos\theta a = A_2 \cos\theta$$

$$\Phi = vA_2 \cos\theta = \vec{v} \cdot \vec{A}_2$$



$$d\Phi = \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

$$\boxed{\Phi = \int_A \vec{v} \cdot d\vec{A}}$$

- Divergencia:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}}$$

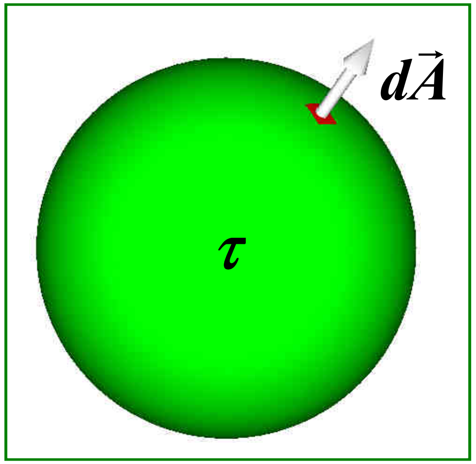
- La divergencia actúa sobre un vector y devuelve un escalar.

$$\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\overbrace{\vec{v}}^{vector}}_{escalar}$$

- Regla mnemotécnica: es como si multiplicáramos escalarmente dos vectores:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z\right)(v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y + v_z\vec{u}_z)$$

- T. de Gauss:



Superficie cerrada

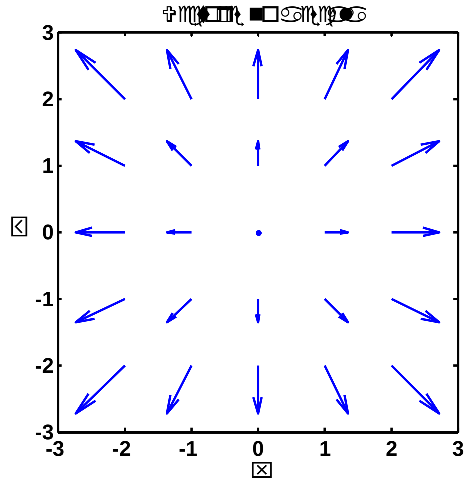
$$\boxed{\int_\tau \vec{\nabla}\cdot\vec{v}\,d\tau = \underbrace{\oint_A \vec{v}\cdot d\vec{A}}_{\text{Flujo de } \mathbf{v} \text{ a través de A}}}$$

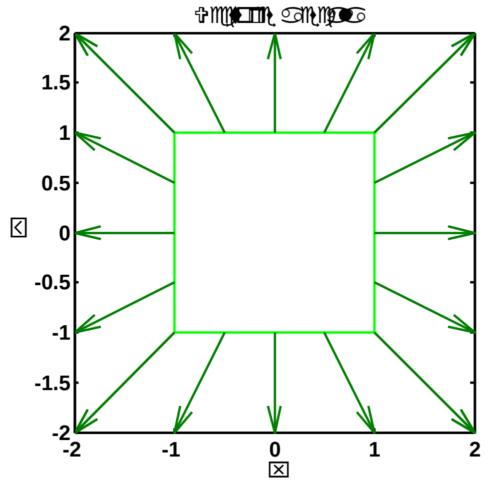
Interpretación de la divergencia: $\vec{\nabla}\vec{v}$ es el flujo por unidad de volumen.

- Ejemplo:

$$\vec{v} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 1 + 1 = 2$$

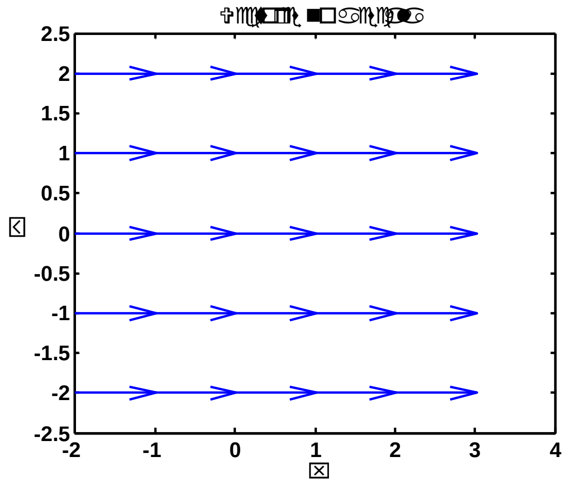


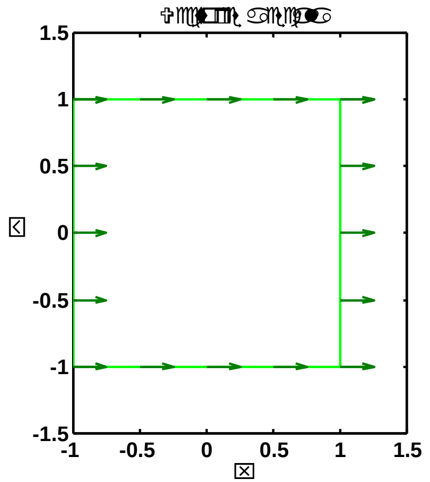


- Ejemplo:

$$\vec{v} = c\vec{u}_x$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

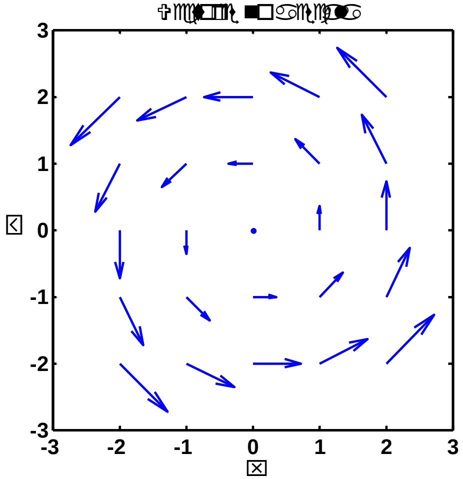


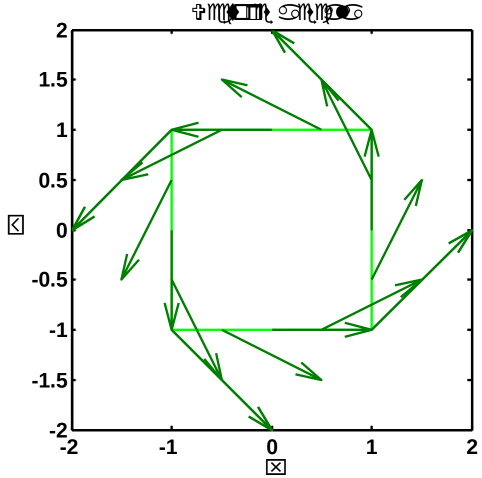


- Ejemplo:

$$\vec{v} = -y\vec{u}_x + x\vec{u}_y$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

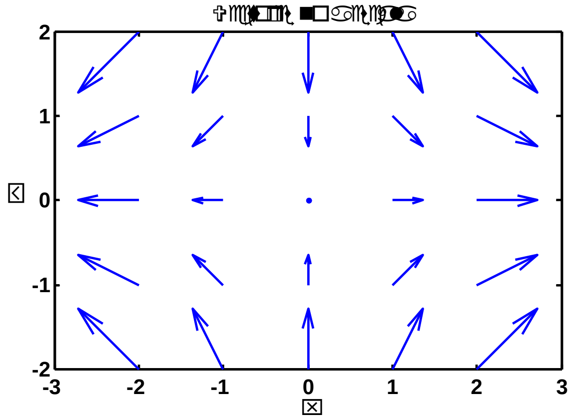


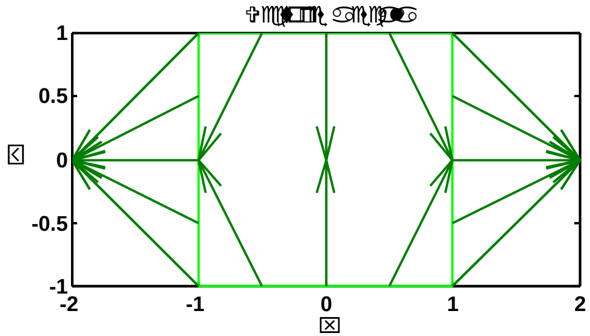


- Ejemplo:

$$\vec{v} = x\vec{u}_x - y\vec{u}_y$$

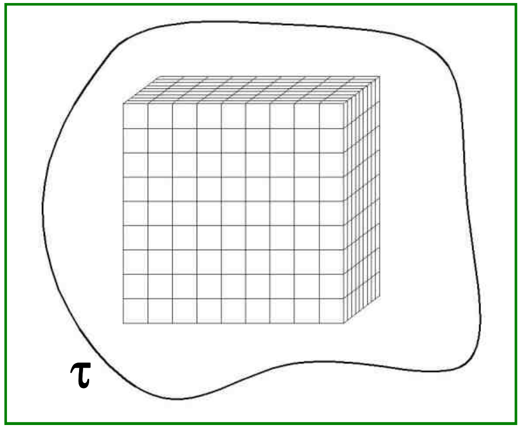
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 1 - 1 = 0$$





- Visión intuitiva del T. de Gauss:

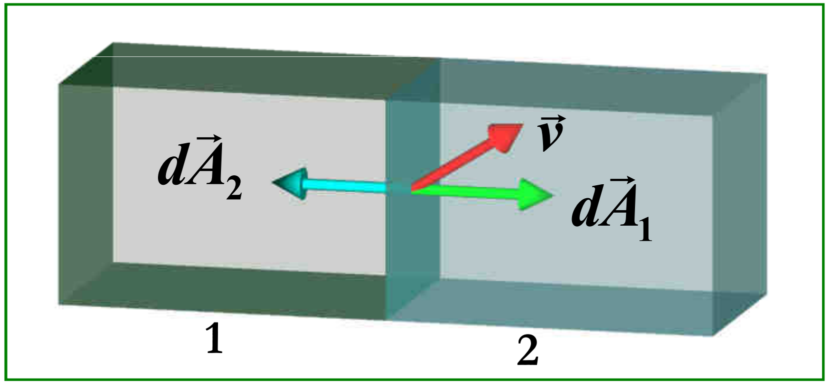
$$\int_\tau \vec{\nabla}\cdot\vec{v}\,d\tau = \oint_A \vec{v}\cdot d\vec{A}$$



- Descomponemos el volumen τ en volúmenes muy pequeños.

- La divergencia da el flujo que sale de cada elemento de volumen.

- Consideramos el flujo a través de la superficie común de dos cubos contiguos:



$$\Phi_{12}(\text{cara común}) = \int \vec{v}\cdot d\vec{A}_1 = -\int \vec{v}\cdot d\vec{A}_2 = -\Phi_{21}(\text{cara común})$$

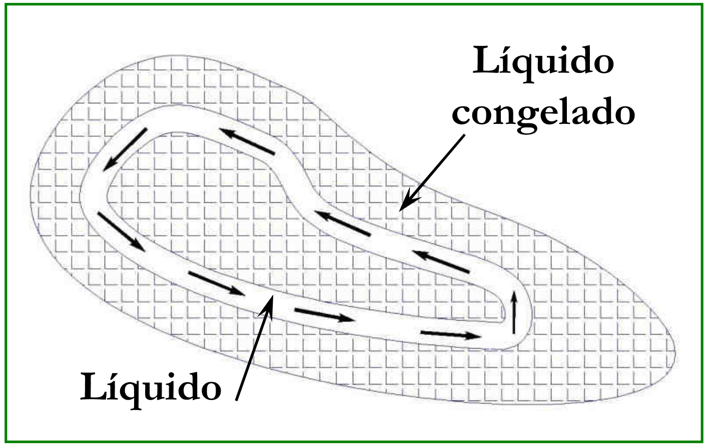
$$\Phi_{12} + \Phi_{21} = 0$$

- Cuando sumamos el flujo de todos los cubos, la contribución al flujo de las caras comunes se anula, y sólo queda el flujo a través de la superficie exterior.

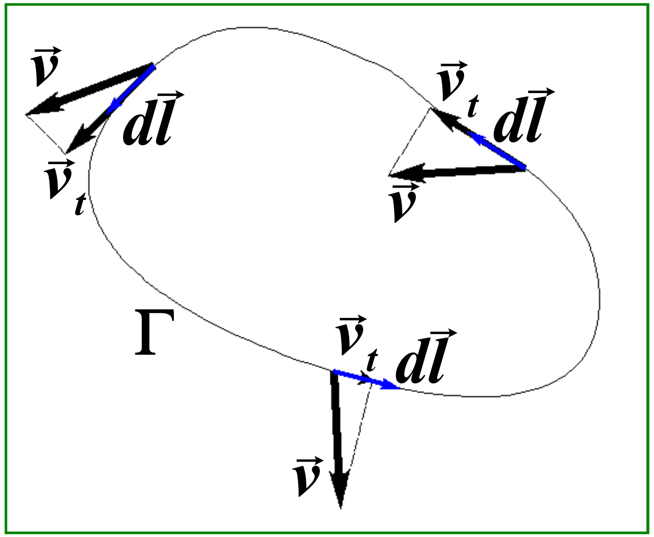
Tema 6. Apéndice. Operadores vectoriales.

- Circulación:

- Imaginemos que tenemos un líquido que se está moviendo arbitrariamente.



- Congelamos instantáneamente todo el líquido salvo un tubo. Si la velocidad del líquido está organizada de modo coherente en el tubo, existe una circulación de líquido por el tubo.



- Matemáticamente se define la circulación a lo largo de una trayectoria G como:

$$\boxed{C = \oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{l}}$$

(se suma la componente tangencial del campo a lo largo de la trayectoria)

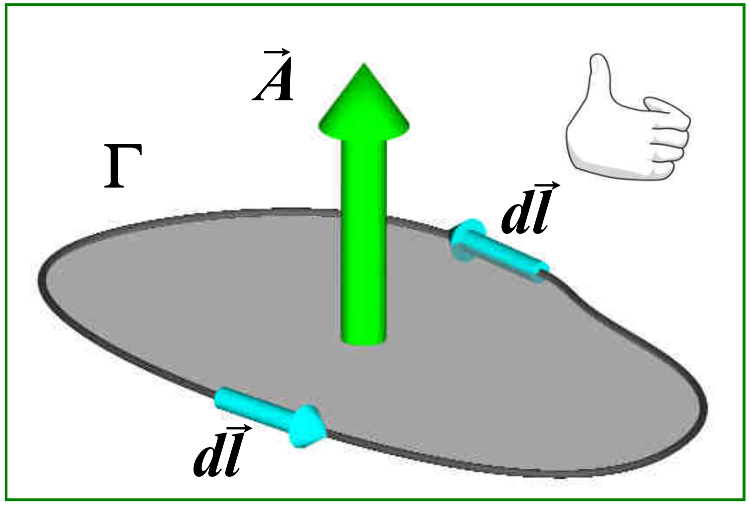
- Rotacional:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$\underbrace{\vec{\nabla} \wedge \overbrace{\vec{v}}^{vector}}_{vector}$$

- T. de Stokes.



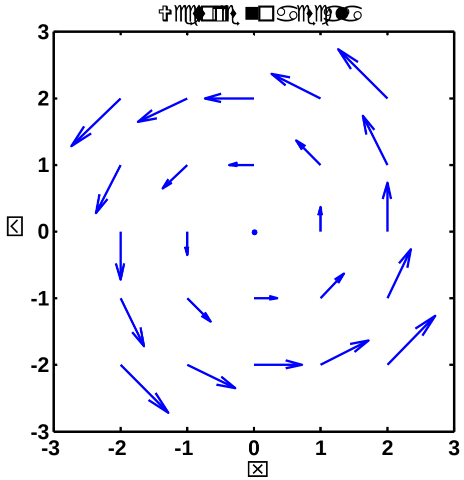
$$\int_A (\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) \cdot d\vec{A} = \oint_\Gamma \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

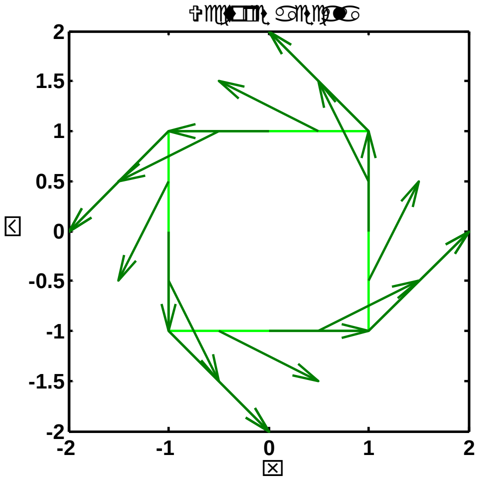
- El rotacional da la circulación por unidad de superficie.
- Si **v** es un campo de velocidades, como en un fluido, el rotacional de **v** es distinto de cero en los ptos. en los que, si dejáramos una hoja, ésta giraría.

- Ejemplo:

$$\vec{v} = -y\vec{u}_x + x\vec{u}_y$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \text{-y} & \text{x} & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{u}_z$$

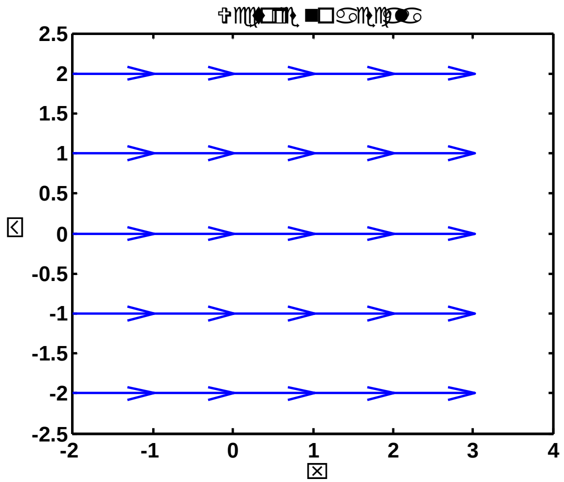


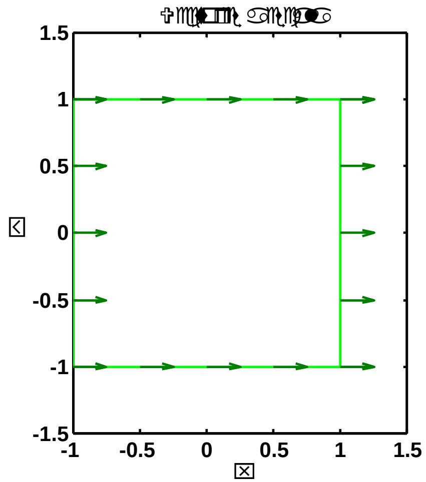


- Ejemplo:

$$\vec{v} = c\vec{u}_x$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = 0$$

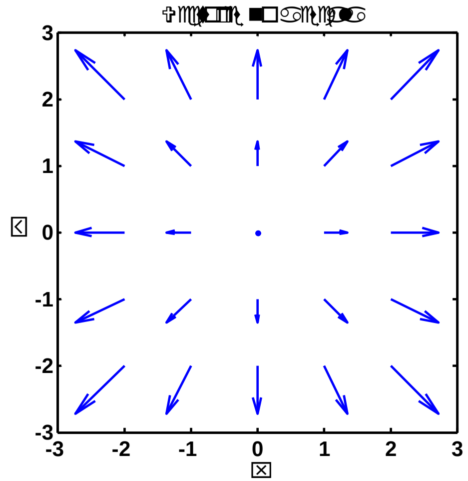


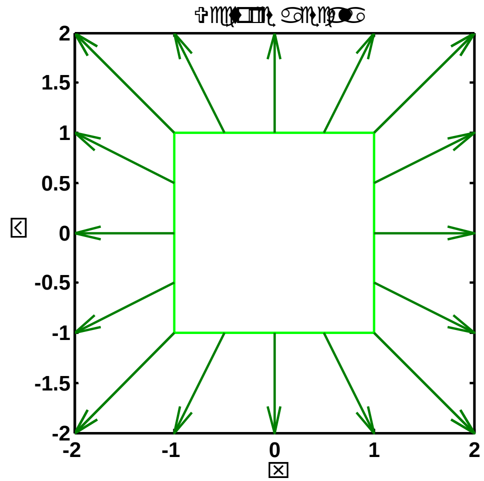


- Ejemplo:

$$\vec{v} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = 0$$

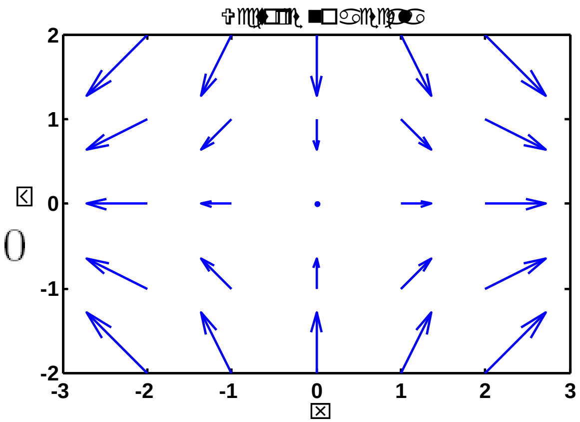


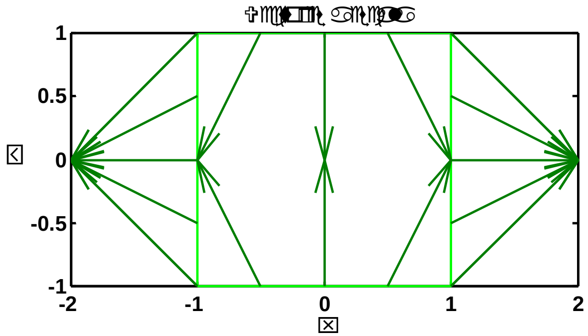


- Ejemplo:

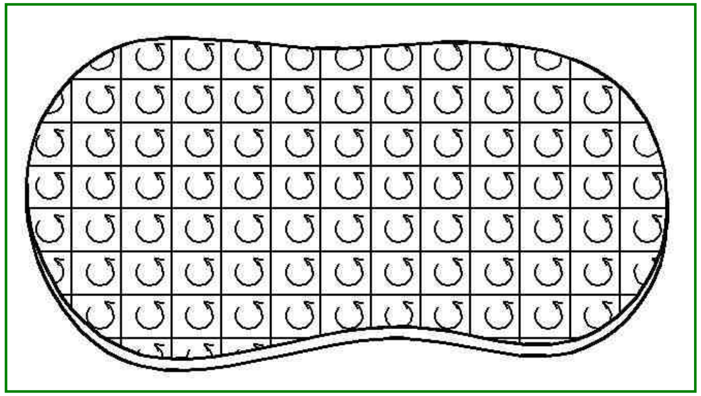
$$\vec{v} = x\vec{u}_x - y\vec{u}_y$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \text{x} & \text{-y} & 0 \end{vmatrix} = 0$$





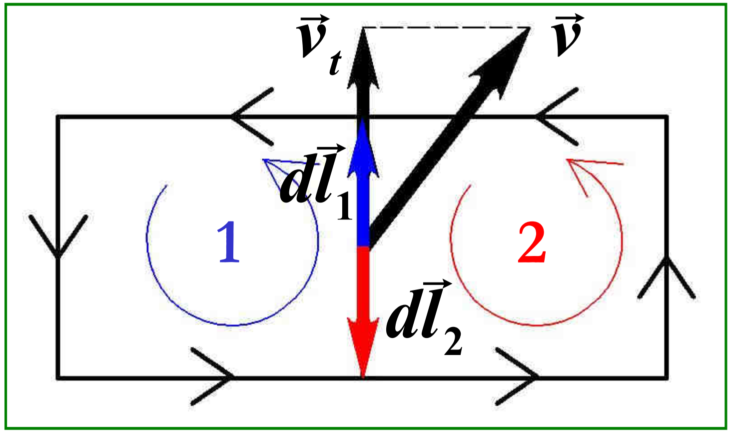
- Interpretación intuitiva del T. de Stokes:



- Descomponemos la superficie en elementos muy pequeños.

- El rotacional da la circulación en cada lazo .

- Consideramos la circulación en el segmento común de dos lazos contiguos:



$$C_1(\text{lado común}) = \int \vec{v}\cdot d\vec{l}_1 = -\int \vec{v}\cdot d\vec{l}_2 = -C_2(\text{lado común})$$

$$C_1 + C_2 = 0$$

- Cuando sumamos la circulación de todos los lazos, la contribución a la circulación de los lados comunes se anula, y sólo queda la circulación a través del lazo exterior.