

Apuntes abreviados de
MECANICA y ONDAS

Grupo B
Curso 2008-09

Gabriela Baremboin
Chantal Ferrer
Jose A. Peñarrocha

Facultat de Física
Universitat de Valencia

NOTA: Estos apuntes abreviados cubren, de forma resumida, los contenidos esenciales de la asignatura Mecánica y Ondas de segundo curso de la Licenciatura en Física. Es decir, no contienen explicaciones detalladas y deben ser complementados con las clases de la asignatura y la bibliografía indicada en la guía docente.

1 Coordenadas curvilineas. Cinemática del punto

- 1.1 Definiciones
- 1.2 Elementos diferenciales
- 1.3 Operadores diferenciales
- 1.4 Coordenadas cartesianas
- 1.5 Coordenadas cilíndricas
- 1.6 Coordenadas esféricas
- 1.7 Cinemática del punto
- 1.8 Formulas de Frenet

1.1 Definiciones

- Punto: $P(x, y, z) \equiv P(\alpha, \beta, \gamma)$
- Correspondencia biunívoca:
$$\left. \begin{aligned} x &= x(\alpha, \beta, \gamma) \\ y &= y(\alpha, \beta, \gamma) \\ z &= z(\alpha, \beta, \gamma) \end{aligned} \right\}$$
- Líneas coordenadas $l_\alpha, l_\beta, l_\gamma$: curvas con α, β, γ variables respectivamente
- Superficies coordenadas $s_{\beta\gamma}, s_{\gamma\alpha}, s_{\alpha\beta}$: superficies con α, β, γ constantes respectivamente
- Referencia local: Vectores unitarios tangentes a líneas coordenadas: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow$

$$\vec{u}_\alpha = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{\partial \alpha},$$

$$h_\alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2}$$

Análogamente \vec{u}_β y \vec{u}_γ

- Referencia dual: Vectores unitarios ortogonales a planos coordenados

$$\vec{u}_{\alpha\beta} = \frac{1}{|\vec{u}_\alpha \times \vec{u}_\beta|} \vec{u}_\alpha \times \vec{u}_\beta$$

- Coordenadas ortogonales \Rightarrow Referencia dual = Referencia local

1.2 Elementos diferenciales

- Diferencial de la posición

$$d\vec{r} = (h_\alpha d\alpha)\vec{u}_\alpha + (h_\beta d\beta)\vec{u}_\beta + (h_\gamma d\gamma)\vec{u}_\gamma$$

- Elementos de línea

$$d\vec{l}_\alpha = (h_\alpha d\alpha)\vec{u}_\alpha, \quad |d\vec{l}_\alpha| = h_\alpha d\alpha$$

Analogamente para $d\vec{l}_\beta, d\vec{l}_\gamma$

- Elementos de superficie

$$\begin{aligned} d\vec{s}_{\alpha\beta} &= d\vec{l}_\alpha \times d\vec{l}_\beta = (h_\alpha h_\beta d\alpha d\beta)\vec{u}_\alpha \times \vec{u}_\beta \\ |d\vec{s}_{\alpha\beta}| &= h_\alpha h_\beta d\alpha d\beta \sqrt{1 - (\vec{u}_\alpha \cdot \vec{u}_\beta)^2} \\ &= h_\alpha h_\beta d\alpha d\beta, \text{ (para c. ortogonales)} \end{aligned}$$

Analogamente para $d\vec{s}_{\beta\gamma}, d\vec{s}_{\gamma\alpha}$

- Elemento de volumen

$$\begin{aligned} dv &= d\vec{l}_\alpha \cdot (d\vec{l}_\beta \times d\vec{l}_\gamma) \\ &= \vec{u}_\alpha \cdot (\vec{u}_\beta \times \vec{u}_\gamma) h_\alpha h_\beta h_\gamma d\alpha d\beta d\gamma \\ &= h_\alpha h_\beta h_\gamma d\alpha d\beta d\gamma, \text{ (para c. ortogonales)} \end{aligned}$$

1.3 Operadores diferenciales

- Gradiente de un campo escalar, $\overrightarrow{\text{grad}} \Phi$: Sea $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$

$$d\Phi = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi \cdot d\vec{r}$$

- Expresión en coordenadas ortogonales

$$\overrightarrow{\text{grad}} \Phi = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \vec{u}_\alpha + \frac{1}{h_\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \vec{u}_\beta + \frac{1}{h_\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \vec{u}_\gamma$$

- Propiedad: $\overrightarrow{\text{grad}} \Phi$ es perpendicular a la superficie $\Phi = \text{const.}$

- Divergencia de un campo vectorial, $\text{div } \vec{A}$: Sea $\vec{A} = A_\alpha \vec{u}_\alpha + A_\beta \vec{u}_\beta + A_\gamma \vec{u}_\gamma$.

La divergencia en un punto es el flujo de \vec{A} por unidad de volumen a través de las caras del volumen elemental en ese punto

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{dv} \sum_c \vec{A} \cdot d\vec{s}_c$$

- Expresión en coordenadas ortogonales

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (A_\alpha h_\beta h_\gamma) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A_\beta h_\gamma h_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (A_\gamma h_\alpha h_\beta) \right]$$

- Propiedad: $\operatorname{div} \vec{A} = 0 \implies$ No hay fuentes ni sumideros en el punto considerado (campo solenoidal)
- Teorema de la divergencia: Sea S una superficie cerrada que encierra V . Entonces

$$\int_V \operatorname{div} \vec{A} \, dv = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{ds}$$

- Rotacional de un campo vectorial, $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}$: Circulación en un punto por unidad de superficie a lo largo de los lados de una superficie elemental

$$\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} \right)_\alpha = \frac{1}{ds_{\beta\gamma}} \sum_L \vec{A} \cdot d\vec{l}_L$$

Análogamente para las demás componentes

- Expresión en coordenadas ortogonales

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} \begin{vmatrix} h_\alpha \vec{u}_\alpha & h_\beta \vec{u}_\beta & h_\gamma \vec{u}_\gamma \\ \partial/\partial \alpha & \partial/\partial \beta & \partial/\partial \gamma \\ A_\alpha h_\alpha & A_\beta h_\beta & A_\gamma h_\gamma \end{vmatrix}$$

- Propiedad: $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} = 0 \implies$ Circulación nula alrededor del punto considerado (campo irrotacional)
- Teorema de Stokes. Sea Γ un circuito frontera de la superficie S

$$\int_S \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} \cdot \vec{ds} = \oint_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

1.4 Coordenadas cartesianas

- Definición: $x = x, \quad y = y, \quad z = z$
- Referencia local:

$$\vec{u}_x = (1, 0, 0) = \vec{i}, \quad \vec{u}_y = (0, 1, 0) = \vec{j}, \quad \vec{u}_z = (0, 0, 1) = \vec{k}$$

- Elementos de línea: $dx, dy, dz \implies d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$

- Elementos de superficie: $dydz, dx dz, dx dy \implies d\vec{s} = dydz \vec{i} + dx dz \vec{j} + dx dy \vec{k}$

- Elemento de volumen: $dx dy dz$

- Gradiente:

$$\overrightarrow{\text{grad}} \Phi = \vec{\nabla} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{k}$$

- Divergencia:

$$\text{div } \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

- Rotacional:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

1.5 Coordenadas cilindricas

- Definición:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \\ z &= z \end{aligned} \right\}$$

- Referencia local

$$\begin{aligned} \vec{u}_\rho &= (\cos \phi, \sin \phi, 0), & h_\rho &= 1 \\ \vec{u}_\phi &= (-\sin \phi, \cos \phi, 0), & h_\phi &= \rho \\ \vec{u}_z &= (0, 0, 1), & h_z &= 1 \end{aligned}$$

- Elementos de linea: $d\rho, \rho d\phi, dz \rightarrow d\vec{r} = d\rho \vec{u}_\rho + \rho d\phi \vec{u}_\phi + dz \vec{u}_z$

- Elementos de superficie: $\rho d\phi dz, d\rho dz, \rho d\rho d\phi \rightarrow d\vec{s} = \rho dz d\phi \vec{u}_\rho + d\rho dz \vec{u}_\phi + \rho d\rho d\phi \vec{u}_z$

- Elemento de volumen: $dv = \rho d\rho d\phi dz$

1.6 Coordenadas esfericas

- Definición

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned} \right\} \theta \in [0, \pi[$$

- Referencia local

$$\begin{aligned}\vec{u}_r &= (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), & h_r &= 1 \\ \vec{u}_\theta &= (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta), & h_\theta &= r \\ \vec{u}_\phi &= (-\sin \phi, \cos \phi, 0), & h_\phi &= r \sin \theta\end{aligned}$$

- Elementos de línea: $d\vec{r} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{u}_\phi$
- Elementos de superficie: $d\vec{s} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{u}_r + r \sin \theta dr d\phi \vec{u}_\theta + r dr d\theta \vec{u}_\phi$
- Elemento de volumen: $dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

1.7 Cinemática del punto: definiciones

- Espacio (metro): $1m \equiv$ distancia que viaja la luz en $1/299792458$ segundos.
- Tiempo (segundo): $1s \equiv 9192631770$ periodos de transición hiperfina del estado fundamental del Cesio 133.
- Trayectoria: Posición en el transcurso del tiempo $\implies \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

- Elemento de trayectoria: $de = |d\vec{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$

- Espacio:

$$e = \int_{\Gamma} de = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

donde $\dot{x} \equiv dx/dt$, etc.

- Velocidad: $\vec{v}(t) = d\vec{r}(t)/dt$
- Celeridad: $v(t) = |\vec{v}(t)| = de/dt$
- Vector tangente a la trayectoria: $\vec{\tau} = \vec{v}(t)/v(t) = d\vec{r}(t)/de$
- Radio de curvatura: $R = de/|d\vec{\tau}| \equiv (\text{arco/angulo})$
- Vector normal a la trayectoria: $\vec{n} = d\vec{\tau}/|d\vec{\tau}| = d\vec{\tau}/(de/R) = Rd\vec{\tau}/vdt$
- Aceleración: $\vec{a}(t) = d\vec{v}(t)/dt$
- Componentes tangencial y normal de la aceleración: Derivando $\vec{v}(t) = v(t)\vec{\tau} \implies$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n} \implies$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}, \quad \text{componentes intrínsecas de } \vec{a}$$

1.8 Formulas de Frenet

- Triedro de Frenet: $\{\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}\} \implies (\vec{b} \cdot \vec{n} = \vec{b} \cdot \vec{\tau} = \vec{n} \cdot \vec{\tau} = 0)$

- Formulas de Frenet:

$$\text{1ra F. de Frenet} : \frac{d\vec{\tau}}{de} = \frac{1}{R}\vec{n}$$

$$\text{2da F. de Frenet} : \frac{d\vec{b}}{de} = -\frac{1}{\sigma}\vec{n}$$

$$\text{3ra F. de Frenet} : \frac{d\vec{n}}{de} = \frac{1}{\sigma}\vec{b} - \frac{1}{R}\vec{\tau}$$

σ se llama radio de torsión.

2 Dinámica del punto

- 2.1 Leyes de Newton
- 2.2 Interacciones fundamentales
- 2.3 Fuerzas Macroscópicas
- 2.4 Fuerzas de fricción
- 2.5 Ejemplo: Paracaidismo
- 2.6 Trabajo y Energía
- 2.7 Momento lineal y Momento angular
- 2.8 Potenciales unidimensionales

2.1 Leyes de Newton

- Primera ley: Todo cuerpo permanece en reposo o en movimiento uniforme a menos que actúe una fuerza \vec{F} sobre el mismo
- Segunda ley: La variación de la cantidad de movimiento de un objeto es igual a la resultante de la fuerza que actúa sobre dicho objeto

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

$m \equiv$ masa inercial, $m\vec{v} \equiv$ cantidad de movimiento

- Tercera ley: Cuando dos cuerpos ejercen fuerzas entre sí, éstas son de intensidades iguales y sentidos opuestos
- Sistema de referencia inercial: Es aquél en el que se verifican las leyes de Newton.
- Transformaciones de Galileo: Cambio de coordenadas entre dos sistemas inerciales S y S' con ejes paralelos y orígenes iguales en $t = 0$. (S' se mueve con velocidad \vec{v} respecto de S):

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$$

2.2 Interacciones fundamentales

- Definición. Tienen su origen en la materia elemental y son las últimas responsables de todas las fuerzas de la Naturaleza
- Interacción gravitatoria: Largo alcance, efectos macroscópicos. No se ha detectado a nivel elemental. (muy débil)

- Interacción débil: Corto alcance, sólo efectos microscópicos.
- Interacción electromagnética: Largo alcance. Efectos macroscópicos y microscópicos. Se mezcla con la interacción débil a nivel microscópico.
- Interacción fuerte: Corto alcance. Sólo se detecta a nivel elemental (formación nuclear y hadrónica).

2.3 Fuerzas Macroscopicas

- Fuerza de Coulomb: Fuerza de la carga q_2 sobre q_1

$$\vec{F}_{1(2)} = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

donde $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ y $\hat{r}_{12} = \vec{r}_{12}/r_{12}$. Además:

$$k = 2.307 \times 10^{-28} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{e}^2$$

La carga del electron es $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$.

C es la unidad de carga macroscópica (Coulomb)

- Fuerza Gravitatoria: Fuerza de la carga gravitatoria n_2 sobre n_1

$$\vec{F}_{1(2)} = -G \frac{n_1 n_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

(Fuerza atractiva: $n_1 n_2 > 0$ siempre).

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$$

Comparar las fuerzas eléctrica y gravitatoria para un proton ($m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ Kg}$)

- Equivalencia de la carga gravitatoria y la masa inercial: En caída libre desde una altura $h \implies$

$$v = \sqrt{2ghn/m}$$

¡Independiente del cuerpo! $\implies n/m \equiv$ constante universal.

2.4 Fuerzas de fricción

- Movimiento sobre una superficie:

$$|\vec{F}| \leq \mu_e |\vec{N}|$$

$$\vec{N} \equiv \text{normal a la superficie, } \mu_e \equiv \text{coeficiente estático}$$

- Movimiento en un fluido:

$$\vec{F} = -b\vec{v} \quad \text{donde } b = 6\pi a\eta \quad (\text{para esfera de radio } a)$$

$$\eta \equiv \text{coeficiente de viscosidad}$$

- Movimiento en un gas:

$$\vec{F} = -cv^2\vec{r} \quad \text{donde } c = C_a S \rho / 2$$

$$C_a \equiv \text{coeficiente aerodinámico, } S \equiv \text{sección, } \rho \equiv \text{densidad}$$

2.5 Ejemplo: Paracaidismo

- Fuerza (1 dimension): $F = -mg + cv^2$
- Velocidad limite: $F = 0 \implies v_l = \sqrt{mg/c}$
- Ecuación de movimiento: $dv / (v_l^2 - v^2) = -gdt/v_l^2$
- Solución:

$$v(t) = -v_l \frac{1 - e^{-2gt/v_l}}{1 + e^{-2gt/v_l}},$$

$$h - x(t) = v_l \left(t - \frac{v_l}{g} \ln \frac{2}{1 + e^{-2gt/v_l}} \right)$$

2.6 Trabajo y Energía

- Trabajo virtual *en* un campo de fuerzas $\vec{F}(\vec{r}, t)$, con el tiempo congelado en t_0 , a lo largo de un camino Γ :

$$W_{virt}(\Gamma, t_0) = \int_{\Gamma} \vec{F}(\vec{r}(\alpha), t_0) \cdot d\vec{r}(\alpha)$$

siendo α un parámetro que describe el camino Γ .

- Energía potencial (virtual): Si $\vec{F}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}, t)$, (campo de fuerzas conservativo $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$) entonces

$$U(\vec{r}, t_0) = U(\vec{r}_0, t_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}(\alpha), t_0) \cdot d\vec{r}(\alpha)$$

con camino arbitrario

$$W_{virt}(1 \rightarrow 2) = U_1 - U_2$$

independiente del camino elegido en el instante t_0

- Trabajo dinámico *de* un campo de fuerzas $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ a lo largo de la trayectoria $\vec{r}(t)$:

$$W_{din}(1 \rightarrow 2) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t) \cdot d\vec{r}(t)$$

- Energía cinética (dinámica): $\vec{F} \cdot d\vec{r} = m \vec{a} \cdot d\vec{r} = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = mdv^2/2 \equiv dT \implies$

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \equiv \text{Energía cinética}$$

$$W_{din}(1 \rightarrow 2) = T_2 - T_1$$

- Energía total: En una trayectoria dinámica

$$E(\vec{r}, t) = T(v) + U(\vec{r}, t) \equiv \text{energía del sistema}$$

$$dT = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$dU = \vec{\nabla}U \cdot d\vec{r} + \frac{\partial U}{\partial t} dt = -\vec{F} \cdot d\vec{r} + \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

$$dE = \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

- Conservación de la energía total: Si el campo de fuerzas conservativo no depende del tiempo, entonces U no depende explícitamente del tiempo y

$$W_{din}(1 \rightarrow 2) = W_{virt}(1 \rightarrow 2)$$

$$E = T_1 + U_1 = T_2 + U_2 = \text{const}$$

2.7 Momento lineal y Momento angular

- Momento lineal o momento: $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\text{Conservación: } F_i = 0 \implies p_i = \text{const}$$

- Momento de una fuerza: $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$ (respecto del origen O)

- Momento angular: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ (respecto del origen O)

- Ecuación del momento angular: $\vec{N} = d\vec{L}/dt$

- Conservación: $N_i = 0 \implies L_i = \text{const}$

- Fuerza central: $\vec{F} = f(r)\hat{r}$, con $\hat{r} = \vec{r}/r$

- Propiedad: Toda fuerza central es conservativa

$$\vec{F} \text{ central} \implies \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \implies \vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} U$$

$$dU = -f(r) \frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r} = -f(r) dr$$

- Propiedad: Para una fuerza central $\implies \vec{N} = 0 \implies \vec{L} = \text{const} \implies$ El movimiento tiene lugar en un plano que pasa por el origen de fuerzas.
- Propiedad: Para una fuerza central la velocidad areolar es constante

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \frac{|\vec{r} \times d\vec{r}|}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \text{const}$$

2.8 Potenciales en una dimensión

- Sea $V(x)$. Ecuación de movimiento: $m\dot{x}/dt = -dV/dx$
- Conservación de la energía: $E = m\dot{x}^2/2 + V(x)$
- Rango de velocidades: $\dot{x} = \pm\sqrt{[E - V(x)]2/m}$
- Rango de movimiento: para todo x tal que $V(x) \leq E$
- Puntos de retorno: x_R tal que $V(x_R) = E$
- Puntos de equilibrio:

$$F = -\frac{dV(x)}{dx} = 0 \implies \text{equilibrio}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} \geq 0 \implies \text{equilibrio estable /inestable}$$

- Pequeñas oscilaciones alrededor de un punto x_0 de equilibrio estable:

Desarrollo del potencial

$$V(x) \simeq V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + ..$$

Ecuación de movimiento

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_0) \text{ con } k = V''(x_0) > 0$$

Solución armónica alrededor de x_0

$$x(t) = x_0 + A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right)$$

3 Oscilaciones simples

3.1 Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

3.2 Oscilador armonico simple

3.3 Oscilador armonico plano

3.4 Oscilador armónico amortiguado

3.5 Oscilaciones forzadas por fuerza sinusoidal

3.6 Oscilaciones forzadas por fuerza periodica

3.1 Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

- Forma general: Hay que obtener $y(x)$ tal que

$$y' + a_1 y' + a_2 y = b(x)$$

- Operador diferencial lineal:

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_2$$

$$L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2]$$

- Solución general de la ecuación homogenea $y_h'' + a_1 y_h' + a_2 y_h = 0 \iff L[y_h] = 0$.

Sean λ_1, λ_2 raíces del polinomio caracteristico $P(\lambda)$ tales que $P(\lambda_{1,2}) = \lambda_{1,2}^2 + a_1 \lambda_{1,2} + a_2 = 0 \implies$

$$y_h(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \quad (c_1, c_2 \text{ constantes arbitrarias})$$

$$y_h(x) = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda_1 x} \quad (\lambda_1 = \lambda_2 \text{ raíz doble})$$

$$y_h(x) = e^{\alpha x} (p \cos \beta x + q \sin \beta x) \equiv A e^{\alpha x} \cos(\beta x + \phi)$$

$$(\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \text{ raíces complejas})$$

- Solución general de la ecuación completa

$$\text{solución particular } y_p(x) : L[y_p] = b(x)$$

$$\text{solución general } y(x) : y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

- Soluciones particulares: Hay que obtenerlas por inspección, dependiendo de de la funcion $b(x)$ en la ecuación general.

función $b(x)$
$P_n(x)$ y $\lambda = 0$
raíz pol. carac. de orden $s = 0, 1, 2$
$e^{\alpha x} P_n(x)$ y $\lambda = \alpha$
raíz pol. carac. de orden $s = 0, 1, 2$
$e^{\alpha x} P_n(x) (\sin \beta x, \cos \beta x)$
y $\lambda = \alpha \pm i\beta$
raíces pol. carac. de orden $s = 0, 1$

función prueba
$y_p(x) = x^s Q_n(x)$
$y_p(x) = x^s e^{\alpha x} Q_n(x)$
$y_p(x) = x^s e^{\alpha x} \times$ $(Q_n(x) \sin \beta x + R_n(x) \cos \beta x)$

3.2 Oscilador armonico simple

- Fuerza y energía potencial:

$$F(x) = -kx \iff U(x) = \frac{1}{2}kx^2,$$

$$k = \text{constante recuperadora (ley de Hooke)}$$

- Ecuación de movimiento: $m\ddot{x} + kx = 0$
- Solucion general: $x(t) = A \cos(w_0t + \phi)$ donde $w_0 = \sqrt{k/m}$
- Periodo: $T_0 = 2\pi/w_0$. Frecuencia: $\nu_0 = 1/T_0$
- Energía total:

$$E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\implies \text{proporcional al cuadrado de la amplitud } A$$

$$\implies \text{se conserva}$$

3.3 Oscilador armonico plano

- Fuerza central: $\vec{F} = -(kx, ky) = -k\vec{r} \equiv -kr\hat{r}$ (conservativa)

- Energía potencial: $U(r) = kr^2/2 = k(x^2 + y^2)/2$

- Ecuaciones de movimiento: $\left. \begin{array}{l} m\ddot{x} + w_0^2x = 0 \\ m\ddot{y} + w_0^2y = 0 \end{array} \right\}$ donde $w_0^2 = k/m$

- Soluciones del movimiento: $\left. \begin{array}{l} x(t) = A \cos(w_0t + \alpha) \\ x(t) = B \cos(w_0t + \beta) \end{array} \right\}$

- Orbitas cerradas (eliminando t): $\beta = \alpha + \delta \implies$

$$A^2y^2 + B^2x^2 - 2ABxy \cos \delta = A^2B^2 \sin^2 \delta, \text{ (elipse inclinada y centrada)}$$

$$\delta = 0 \implies y = \frac{B}{A}x, \text{ (recta)}$$

$$\delta = \pm \frac{\pi}{2} \implies \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \text{ (elipse horizontal)}$$

- Fuerza no central: $\vec{F} = -(k_1x, k_2y) \implies U(x, y) = (k_1x^2 + k_2y^2)/2$
- Trayectorias de Lissajous: Son órbitas cerradas multiples cuando $w_1/w_2 = \text{racional}$

3.4 Oscilador armónico amortiguado

- Fuerza: $F = -kx - b\dot{x}$
- Ecuacion de movimiento:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + w_0^2x = 0, \quad \beta = b/2m$$

- Raices del polinomio característico:

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - w_0^2}$$

- Solución oscilatoria amortiguada:

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{-\beta t} \cos(w_1t + \phi), \\ w_1^2 &= w_0^2 - \beta^2 > 0 \end{aligned}$$

- Solucion aperiodica crítica:

$$\begin{aligned} x(t) &= (A + Bt) e^{-\beta t}, \\ w_0^2 - \beta^2 &= 0 \end{aligned}$$

- Solución sobreamortiguada:

$$\begin{aligned} x(t) &= (Ae^{w_2t} + Be^{-w_2t}) e^{-\beta t} \\ w_2^2 &= \beta^2 - w_0^2 > 0 \end{aligned}$$

- Nomenclatura:

$$\begin{aligned} \beta &\equiv \text{factor disipativo} \\ 1/\beta &\equiv \text{tiempo de relajación (vida media)} \\ Q &= w_0/2\beta \equiv \text{factor de calidad} \end{aligned}$$

3.5 Oscilaciones forzadas por fuerza sinusoidal

- Fuerza externa: $F(t) = mf \cos wt$

- Ecuación de movimiento:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + w_0^2x &= f \cos wt, \\ \beta &= b/2m\end{aligned}$$

- Solución particular:

$$\begin{aligned}x_p(t) &= (f/r) \cos(wt - \delta) \implies \text{solucion estacionaria} \\ r^2 &= (w_0^2 - w^2)^2 + 4\beta^2 w^2, \quad \tan \delta = \frac{2\beta w}{w_0^2 - w^2}\end{aligned}$$

- Solución general (oscilatoria):

$$x(t) = \overbrace{Ae^{-\beta t} \cos(w_1 t + \phi)}^{\text{solución transitoria}} + \overbrace{\frac{f}{r} \cos(wt - \delta)}^{\text{solución estacionaria}} \xrightarrow{t \gg \frac{1}{\beta}} \frac{f}{r} \cos(wt - \delta)$$

- Frecuencia resonante externa: Origina un máximo en la amplitud estacionaria

$$\begin{aligned}\frac{d(f/r)}{dw} &= 0 \implies w_R = \sqrt{w_0^2 - 2\beta^2} \\ &\equiv \text{frecuencia resonante } \underset{\beta \ll w_0}{\simeq} w_0\end{aligned}$$

- Anchura de una resonancia: Es el intervalo entre los valores de w , donde se reduce a la mitad el valor de $(f/r)^2$ con respecto al máximo en w_R .

$$\Delta w \underset{\beta \ll w_0}{\simeq} 2\beta \iff \text{extremos } w_0 \pm \beta$$

- Defasaje o desfase resonante: Analizamos δ en función de w , alrededor de w_0 con $\beta \ll w_0$

$$w \in [w_0 - \beta, w_0 + \beta] \underset{\beta \ll w_0}{\implies} \delta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$$

Es decir, δ cambia rápidamente con w alrededor del valor $\pi/2$.

- Energía cinética media a lo largo de un periodo en régimen estacionario.

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} m \dot{x}_p^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{wf}{r} \right)^2 \sin^2(wt - \delta) \\ \langle T \rangle &= \frac{1}{4} m \left(\frac{wf}{r} \right)^2 \quad (\text{máximo en } w_0 \text{ con anchura } 2\beta)\end{aligned}$$

- Potencia media disipada en un periodo:

$$P = \dot{x}_p F(t) = -mw \left(\frac{f^2}{r} \right) \cos wt \sin (wt - \delta)$$

$$\langle P \rangle = \beta m \left(\frac{wf}{r} \right)^2 = 4\beta \langle T \rangle \quad (\text{aumenta con } \beta!)$$

3.6 Oscilaciones forzadas por fuerza periodica

- Fuerza externa: $F(t) = mf(t)$ con $f(t)$ periodica de frecuencia w :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nwt + b_n \sin nwt), \quad (\text{serie de Fourier})$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) \cos nwt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) \sin nwt, \quad w = \frac{2\pi}{T}$$

- Ecuación de movimiento: $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + w_0^2 x = f(t)$, $\beta = b/2m$
- Solución general (transitoria oscilante, $w_1^2 = w_0^2 - \beta^2 > 0$):

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(w_1 t + \phi)$$

$$+ \frac{a_0}{2w_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_n}{r_n} \cos(nwt - \delta_n) + \frac{b_n}{r_n} \sin(nwt - \delta_n) \right\}$$

$$r_n^2 = (w_0^2 - n^2 w^2)^2 + 4\beta^2 n^2 w^2, \quad \tan \delta_n = \frac{2\beta n w}{w_0^2 - n^2 w^2}$$

4 Sistema de partículas

- 4.1 Sistema de N Partículas
- 4.2 Simetrías y leyes de conservación
- 4.3 Teorema del Virial
- 4.4 Sistema de dos cuerpos

4.1 Sistema de N Partículas

- Fuerzas del sistema:

$$\text{Fuerza externa sobre la partícula } \alpha : \vec{F}_\alpha^{ext}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N)$$

$$\text{Fuerza interna de } \beta \text{ sobre } \alpha : \vec{f}_{\alpha\beta}, \quad (\vec{f}_{\alpha\beta} = -\vec{f}_{\beta\alpha})$$

$$\text{Fuerza interna central} : \vec{f}_{\alpha\beta} = f(r_{\alpha\beta}) \hat{r}_{\alpha\beta}$$

$$\text{Fuerza total sobre } \alpha : \vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^{ext} + \sum_{\alpha \neq \beta} \vec{f}_{\alpha\beta}$$

$$\text{Fuerza total interna del sistema} : \sum_{\alpha, \beta (\alpha \neq \beta)} \vec{f}_{\alpha\beta} = \vec{0}$$

$$\text{Fuerza total del sistema} : \vec{F} = \sum \vec{F}_\alpha = \sum \vec{F}_\alpha^{ext} \equiv \vec{F}^{ext}$$

- Coordenadas del centro de masas:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum m_\alpha \vec{r}_\alpha, \quad \text{donde } M = \sum m_\alpha \equiv \text{masa total}$$

- Coordenadas relativas al centro de masas:

$$\vec{r}_\alpha^{cm} = \vec{r}_\alpha - \vec{R} \implies \sum m_\alpha \vec{r}_\alpha^{cm} = \sum m_\alpha \vec{r}_\alpha - \sum m_\alpha \vec{R} = \dots = \vec{0}$$

- Movimiento del centro de masas. Conservación del momento total:

$$\vec{P} = \sum m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = M \dot{\vec{R}} \implies M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{ext}$$

$$F_i^{ext} = 0 \implies P_i = \text{const} \quad (\text{conservación de } \vec{P})$$

- Movimiento del momento angular total:

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha = \vec{L}_{cm} + \vec{R} \times \vec{P} \equiv \text{m. angular total}$$

$$\dot{\vec{L}} = \sum \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{ext} = \vec{N}_{ext} \quad (\text{para fuerzas internas centrales})$$

$$N_i^{ext} = 0 \implies L_i = \text{const} \quad (\text{conservación de } \vec{L})$$

- Energía cinética total:

$$T = \sum \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = \sum \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^{cm2} + \frac{1}{2} MV^2$$

- Energía potencial total para fuerzas externas conservativas y fuerzas internas centrales:

$$\begin{aligned} \vec{F}_\alpha^{ext} &= \vec{\nabla}_\alpha U_\alpha(\vec{r}_\alpha) & \vec{f}_{\alpha\beta} &= -\frac{dU_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta})}{dr_{\alpha\beta}} \hat{r}_{\alpha\beta} \\ \implies U &= \sum_\alpha U_\alpha + \sum_{\alpha < \beta} U_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Con las fuerzas anteriores $E = T + U = cte$

4.2 Simetrías y leyes de conservación

- Homogeneidad del tiempo (sistema aislado) \implies Conservación de la energía

$$\begin{aligned} 0 &= U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t + \epsilon) - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t) = \frac{\partial U}{\partial t} \epsilon \\ \implies \frac{dU}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial U}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial U}{\partial z_1} \dot{z}_1 + \dots = -\vec{F}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1 - \dots = -\frac{dT}{dt} \\ \implies \frac{dE}{dt} &= \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0, \quad (\text{conservación de } E) \end{aligned}$$

- Homogeneidad del espacio (sistema aislado) \implies Conservación del momento total

$$\begin{aligned} 0 &= U(\vec{r}_1 + \epsilon \vec{k}, \vec{r}_2 + \epsilon \vec{k}, \dots, t) - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t) = \frac{\partial U}{\partial z_1} \epsilon + \frac{\partial U}{\partial z_2} \epsilon + \dots \\ \implies F_{1z} + F_{2z} + \dots &= 0 \implies P_z = const, \quad (\text{conservación de } \vec{P}) \end{aligned}$$

Lo mismo para las demás componentes de \vec{P} . Para dos partículas, la homogeneidad del espacio nos lleva a la tercera ley de Newton

- Rotación (activa) \mathcal{R} de ángulo ϵ alrededor del eje z :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \mathcal{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \epsilon & -\sin \epsilon & 0 \\ \sin \epsilon & \cos \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} x - \epsilon y \\ y + \epsilon x \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Isotropía del espacio (sistema aislado) \implies Conservación del momento angular:

$$\begin{aligned} 0 &= U(\mathcal{R}\vec{r}_1, \mathcal{R}\vec{r}_2, \dots, t) - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, t) \\ &= \frac{\partial U}{\partial x_1}(-\epsilon y_1) + \frac{\partial U}{\partial y_1}(\epsilon x_1) + \dots \\ \implies N_{1z} + N_{2z} + \dots &= 0 \implies L_z = cte \quad (\text{conservación de } \vec{L}) \end{aligned}$$

4.3 Teorema del Virial

- Función G :

$$G = \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha} \implies \frac{dG}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha} + 2T$$

donde T = Energía cinética.

- Enunciado: "Para movimientos periódicos de un sistema de partículas con periodo τ o movimientos acotados con τ suficientemente grande, se tiene que

$$\left\langle \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha} \right\rangle + 2\langle T \rangle = 0 \quad (\text{Teorema del Virial})$$

donde $\langle \dots \rangle$ es el valor medio en un determinado tiempo.

- Demostración: Con las condiciones del enunciado:

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} [G(\tau) - G(0)] = 0$$

- Caso particular: Potencial central

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\frac{dU}{dr} \hat{r} \implies \vec{F} \cdot \vec{r} = -r \frac{dU}{dr} \implies \\ \left\langle r \frac{dU}{dr} \right\rangle &= 2\langle T \rangle \quad (\text{Teorema del Virial}) \end{aligned}$$

Para Kepler $U = -k/r \implies \langle U \rangle + 2\langle T \rangle = 0$ (Teorema del Virial)

- Gas perfecto en un volumen v con presión p en la superficie $\implies d\vec{F} = -p\vec{n}ds$

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha} \implies -\frac{p}{2} \oint_S \vec{n} \cdot \vec{r} ds \stackrel{\text{T. divergencia}}{=} -\frac{3}{2}pv \implies$$

$$\langle T \rangle = \frac{3}{2}pv \quad (\text{Teorema del Virial})$$

- Ley de Boyle: Definimos la temperatura ζ tal que

$$\begin{aligned}\langle T \rangle &= \frac{3}{2} N k \zeta, \quad N = \text{n}^\circ \text{ de átomos/moleculas,} \\ k &= \text{constante de Boltzman} \\ \implies &\boxed{pv = Nk\zeta} \quad (\text{ley de Boyle})\end{aligned}$$

4.4 Sistema de dos cuerpos

- Centro de masas y coordenadas relativas. Sean dos cuerpos de masas m_1 y m_2 , con coordenadas \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , respectivamente.

$$\begin{aligned}\text{Coordenadas del centro de masas} &: \quad \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \text{Coordenadas relativas (1 desde 2)} &: \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2\end{aligned}$$

Análogamente, podemos definir la velocidad del centro de masas \vec{V} y la velocidad relativa \vec{v} .

- Relaciones inversas:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2} \quad \text{y} \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1 \vec{r}}{m_1 + m_2}$$

Análogamente, obtenemos relaciones para \vec{v}_1 y \vec{v}_2 a partir de la velocidad del centro de masas \vec{V} y de la velocidad relativa \vec{v} .

- Masa total: $M = m_1 + m_2$
- Masa reducida: $\mu = m_1 m_2 / M$
- Descomposición de la energía cinética

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\ &= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \mu v^2 \equiv T_{CM} + T_{rel}\end{aligned}$$

- Descomposición del momento angular

$$\begin{aligned}\vec{L} &= m_1 (\vec{r}_1 \times \vec{v}_1) + m_2 (\vec{r}_2 \times \vec{v}_2) \\ &= M (\vec{R} \times \vec{V}) + \mu (\vec{r} \times \vec{v}) \equiv \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{rel}\end{aligned}$$

- Fuerzas internas conservativas y Energía potencial. Suponemos que no hay fuerzas externas y que hay homogeneidad espacial $\implies V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

$$\vec{f}_1^{int} = -\vec{\nabla}_1 V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{\nabla}_2 V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\vec{f}_2^{int}$$

- Ecuaciones de movimiento:

$$\left. \begin{array}{l} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{f}_1^{int} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{f}_2^{int} \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} M \ddot{\vec{R}} = \vec{0} \\ \mu \ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla} V(r) \end{array} \right\}$$

En la última ecuación, el potencial sólo depende del módulo de la coordenada relativa, dada la isotropía espacial de un sistema aislado.

- Conclusiones:

- \implies El centro de masas se mueve con movimiento uniforme (no hay fuerzas externas)
- \implies El movimiento relativo equivale al de una partícula con la masa reducida μ en un potencial central $V(r)$

- Leyes de conservación. Las ecuaciones de movimiento son, de nuevo, las de una partícula con masa reducida μ en un potencial central $V(r)$, con integrales primeras

$$l = \mu r^2 \dot{\theta} = const \implies \text{conservación de momento angular relativo}$$

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = const$$

$$\implies \text{conservación de la energía relativa}$$

5 Formalismo Lagrangiano y Hamiltoniano

- 5.1 Introducción y definiciones
- 5.2 Ecuaciones de Euler Lagrange
- 5.3 Principio de Hamilton
- 5.4 Ecuaciones de Hamilton
- 5.5 Ligaduras
- 5.6 Multiplicadores de Lagrange
- 5.7 Plano inclinado

5.1 Introducción y definiciones

- Coordenadas cartesianas para N partículas: $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \equiv (x_1, x_2, \dots, x_{3N})$
- Coordenadas generalizadas: $(q_1, q_2, \dots, q_{3N}) \implies$

$$x_k = x_k(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t), \text{ con } k = 1, 2, \dots, 3N$$

Si no hay dependencia temporal $\implies \{q_j\} \equiv$ Sistema natural.

- Objetivo: Obtener las ecuaciones de movimiento en función de las coordenadas generalizadas.
- Relaciones fundamentales:

$$\dot{x}_k = \sum_j \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_k}{\partial t} \implies$$

$$\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_k}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial x_k}{\partial q_j},$$

q_j, \dot{q}_j : variables en el espacio de las fases

- Trabajos virtuales para fuerzas de componentes F_k : Fuerzas generalizadas

$$\begin{aligned} [\delta W]_{\delta t=0} &= \sum_k F_k \delta x_k = \sum_k F_k \sum_j \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j \\ \implies Q_j &= \sum_k F_k \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \equiv \text{fuerzas generalizadas} \end{aligned}$$

- Energía cinética $T(\dot{x}_k) \equiv T(q_j, \dot{q}_j, t)$ y momentos generalizados.

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k (\dot{x}_k)^2 = \frac{1}{2} \sum_k m_k \left(\sum_j \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_k}{\partial t} \right)^2$$

$$\text{Momento cartesiano} \quad : \quad p_k = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k}$$

$$\text{Momento generalizado} \quad : \quad \pi_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_j} = \sum_k p_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_j}$$

5.2 Ecuaciones de Euler Lagrange

- Ecuaciones de Newton

$$F_k = \dot{p}_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \quad (\text{en coordenadas cartesianas})$$

$$Q_j = \sum_k F_k \frac{\partial x_k}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

(en coordenadas generalizadas)

- Fuerzas conservativas. Energía potencial $V(x_k) \equiv V(q_j, t)$:

$$F_k = - \frac{\partial V(x_k)}{\partial x_k}$$

$$Q_j = - \sum_k \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

- Función Lagrangiana (con fuerzas conservativas)

$$L(q_j, \dot{q}_j, t) = T(q_j, \dot{q}_j, t) - V(q_j, t)$$

Notar: $\partial L / \partial \dot{q}_j = \partial T / \partial \dot{q}_j$

- Ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, 3N$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{nc}, \quad \text{si hay fuerzas no conservativas}$$

- Coordenadas cíclicas. Para $\{q_j\}$, diremos que q_c es cíclica si y solo si $\partial L / \partial q_c = 0$.
- Teorema de conservación: Si q_c es cíclica su momento conjugado π_c se conserva, ya que $d\pi_c/dt = 0$.

5.3 Principio de Hamilton

- Acción A de un sistema con movimiento $\{q_j(t)\}$:

$$A = \int_{t_2}^{t_1} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt$$

Notar que las dimensiones de A son energía \times tiempo \equiv m. angular

- Teorema (principio variacional). Sea $\{\delta q_j(t)\}$ una variación infinitesimal del movimiento $\{q_j(t)\}$ con extremos fijos en t_1 y t_2 . Sea δL la variación del Lagrangiano

$$\delta L = L\left(q_j + \delta q_j, \dot{q}_j + \frac{d}{dt}\delta q_j, t\right) - L(q_j, \dot{q}_j, t)$$

Entonces

$$\delta A = 0 \iff \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

- Principio de Hamilton: El movimiento $\{q_j(t)\}$ de un sistema físico es tal que minimiza la acción del sistema.
- Ejemplo de un problema variacional: Encontrar la curva $y(x)$ entre dos extremos x_1 y x_2 tal que la longitud $d = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx$ sea mínima.
- Ejemplo de problema variacional: Encontrar la curva $y(x)$ entre dos extremos x_1 y x_2 por la que debe deslizarse una masa m bajo la acción de la gravedad para que el tiempo de recorrido $t = \int_{y_1}^{y_2} \left(\sqrt{1 + (dx/dy)^2} / \sqrt{2gy} \right) dy$ sea mínimo. (Solución: la Braquistocrona).

5.4 Ecuaciones de Hamilton

- Relación para la Energía cinética: Para un sistema natural de coordenadas generalizadas ($\partial x_k / \partial t = 0$) tenemos

$$\begin{aligned} 2T &= \sum_k p_k \dot{x}_k \\ &= \sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \sum_j \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \dot{q}_j = \sum_j \left(\sum_k \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j \\ &= \sum_j \pi_j \dot{q}_j \end{aligned}$$

- La función Hamiltoniana:

$$H(q_j, \pi_j, t) = \sum_j \pi_j \dot{q}_j - L(q_j, \dot{q}_j, t)$$

Corresponde a una transformada de Legendre para cambiar la variable \dot{q}_j por π_j .

- Para un sistema natural ($\partial x_k / \partial t = 0$) \implies

$$H = 2T - L = T + V$$

- Ecuaciones de Hamilton. Diferenciando el Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} dH &= \sum_j \left(\dot{q}_j d\pi_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ \implies \frac{\partial H}{\partial \pi_j} &= \dot{q}_j \quad 1^a \text{ ecuación de Hamilton} \\ \implies \frac{\partial H}{\partial q_j} &= -\dot{\pi}_j \quad 2^a \text{ ecuación de Hamilton} \\ \implies \frac{dH}{dt} &= -\frac{\partial L}{\partial t} \equiv \frac{\partial H}{\partial t} \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Hamilton tratan simétricamente las variables q_j y π_j .

- Conservación de momentos: Si H no depende explícitamente de q_c entonces π_c se conserva.
- Conservación de la Energía: Si H no depende explícitamente del tiempo (y tampoco L) entonces $H = \text{const}$. Además, para un sistema natural ($\partial x_k / \partial t = 0$)

$$H = T + V = \text{const} \equiv E \implies \text{conservación de la energía}$$

5.5 Ligaduras

- Ligaduras *holónomas*: Son restricciones entre las coordenadas generalizadas, expresadas mediante relaciones funcionales.
- Forma explícita (c ligaduras):

$$\begin{aligned} q_\alpha &= q_\alpha(q_{c+1}, q_{c+2}, \dots, q_{3N}, t) \\ \alpha &= 1, 2, \dots, c \end{aligned}$$

En este caso las $3N - c$ coordenadas q_β con $\beta = c + 1, c + 2, \dots, 3N$ son libres de ligaduras.

- Forma implícita

$$f_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t) = 0 \quad \text{con } \alpha = 1, 2, \dots, c$$

Si no hay dependencia temporal la ligadura se llama *esclerónoma*. En caso contrario se llama *reónoma*.

- Fuerzas de ligadura \tilde{Q}_j : Son las que originan las ligaduras. Las ecuaciones de movimiento con fuerzas de ligadura son:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \tilde{Q}_j \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, 3N$$

Problema: Aun conociendo las ligaduras, no siempre es posible conocer las fuerzas de ligadura a priori.

- Ecuaciones de movimiento con ligaduras explícitas: El Lagrangiano que se obtiene al incluir las ligaduras es $\tilde{L}(q_\beta, \dot{q}_\beta, t)$ con $\beta = c + 1, c + 2, \dots, 3N$. Como q_β son libres se tiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\beta} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\beta} = 0, \quad \text{con } \beta = c + 1, c + 2, \dots, 3N$$

Nota: las fuerzas de ligadura \tilde{Q}_β no tienen por que ser nulas !!

Nota: obtenido el movimiento $q_j(t)$, las fuerzas de ligadura pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange para $L(q_j, \dot{q}_j, t)$. (sin las ligaduras)

- Principio de d'Alembert: Para desplazamientos virtuales que respeten las ligaduras, el trabajo virtual de las fuerzas de ligadura es nulo. En coordenadas cartesianas se expresa

$$0 = \sum_{k=1}^{3N} (\dot{p}_k - F_k - \tilde{F}_k) \delta x_k(q_j) = \sum_{k=1}^{3N} (\dot{p}_k - F_k) \delta \tilde{x}_k(q_\beta)$$

5.6 Multiplicadores de Lagrange

- Lagrangiano con ligaduras implícitas. Multiplicadores de Lagrange:

$$L_\lambda(q_j, \dot{q}_j, \lambda_\alpha, t) = L(q_j, \dot{q}_j, t) + \sum_{\alpha=1}^c \lambda_\alpha f_\alpha(q_j, t)$$

Las nuevas coordenadas en L_λ son los multiplicadores de Lagrange λ_α .

- Ecuaciones de movimiento con ligaduras implícitas: Aplicamos Euler-Lagrange para las coordenadas q_j, λ_α de L_λ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} &= \sum_{\alpha} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_j}, \text{ con } j = 1, 2, \dots, 3N \\ f_\alpha(q_j, t) &= 0, \text{ con } \alpha = 1, 2, \dots, c \end{aligned}$$

Con $3N + c$ ecuaciones obtenemos $q_j(t), \lambda_\alpha(t)$

- Obtención de las fuerzas de ligadura: De las ecuaciones con multiplicadores \Rightarrow

$$\tilde{Q}_j = \sum_{\alpha} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_j} \equiv \text{fuerzas de ligadura}$$

- Nota. Explícitamente, el trabajo virtual de las fuerzas de ligadura es nulo:

$$\sum_{j=1}^{3N} \tilde{Q}_j \delta q_j = \sum_j \left(\sum_{\alpha} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{\alpha} \lambda_\alpha \delta f_\alpha = 0$$

ya que $\delta f_\alpha = 0$.

- Nota. Coordenada cíclica para las ligaduras. Si alguna coordenada q_j no aparece en ninguna de las ligaduras f_α , entonces $\tilde{Q}_j = 0$.

5.7 Plano Inclinado

- Consideramos una masa m en un plano inclinado de altura h y ángulo α situado en el plano xy , que se mueve sin rozamiento bajo la acción de la gravedad.
- Lagrangiano sin ligaduras (solo con potencial gravitatorio):

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

- Ligadura: $y = h - x \tan \alpha$

- Lagrangiano con ligaduras

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}m \left(\dot{x}^2 + \dot{x}^2 \tan^2 \alpha \right) - mg(h - x \tan \alpha)$$

- Ecuacion de movimiento

$$\ddot{x} = g \sin \alpha \cos \alpha$$

- Lagrangiano con multiplicadores

$$L_\lambda = \frac{1}{2}m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) - mgy + \lambda(y + x \tan \alpha - h)$$

- Ecuaciones de movimiento con multiplicadores

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda \tan \alpha \\ m\ddot{y} + mg &= \lambda \\ y + x \tan \alpha - h &= 0 \end{aligned}$$

- Solucion del movimiento

$$\begin{aligned} x(t) &= g \frac{t^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha \\ y(t) &= h - g \frac{t^2}{2} \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

- Fuerzas de ligadura: $\tilde{Q}_x = mg \sin \alpha \cos \alpha$, $\tilde{Q}_y = mg \cos^2 \alpha$

6 Potencial central. El problema de Kepler

- 6.1 Potenciales centrales
- 6.2 Orbitas en un potencial central
- 6.3 El potencial de Kepler
- 6.4 Orbitas de Kepler
- 6.5 Leyes de Kepler
- 6.6 Potenciales con fuentes extensas
- 6.7 Teorema de Gauss
- 6.8 Desarrollos multipolares. Las Mareas

6.1 Potenciales centrales

- Ecuaciones de movimiento (plano r, θ): Sea $V(r)$ la energía potencial de una partícula de masa m en un campo central.

$$\text{Lagrangiano (con } \theta \text{ cíclica)} : L = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right) - V(r)$$

$$\text{Ecuaciones de movimiento} : \left. \begin{aligned} m\ddot{r} &= mr\dot{\theta}^2 - dV(r)/dr \\ d\left(mr^2\dot{\theta}\right) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

- Leyes de conservación (integrales primeras):

$$\text{Conservación de momento angular} : l = mr^2\dot{\theta} = \text{const}$$

$$\text{Conservación de la energía} : E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) = \text{const}$$

- Energía cinética radial. Descomposición de la energía cinética:

$$T_{rad} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

$$T = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2}_{\text{energía cinética radial}} + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2}}_{\text{barrera centrifuga}}$$

- Potencial efectivo. Descomposición de la energía:

$$V_{efec}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2}_{T_{rad}} + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2} + V(r)}_{V_{efec}} = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{efec}(r)}_{\text{como en una dimensión } r}$$

- Rango de velocidades radiales: $\dot{r} = \pm \sqrt{[E - V_{efec}(r)] 2/m} \implies$
- Rango del movimiento radial: Para todo r tal que $V_{efec}(r) \leq E$
- Puntos de retorno: r_R tal que $V_{efec}(r_R) = E \implies$ puntos apsidales (pericentro o más cercano / apocentro o más lejano)
- Movimiento circular: $dV(r)/dr = 0$ y $d^2V(r)/dr^2 > 0 \implies r = r_C$

6.2 Órbitas en un potencial central

- Ecuación integral de las órbitas: Queremos obtener $r(\theta)$.

En la conservación de la energía E , utilizamos $\dot{r} = \dot{\theta} dr/d\theta \implies$

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2mr^4}{l^2} (E - V_{efec}) \implies$$

$$\theta = \theta_{peri} \pm \int_{r_{peri}}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{(E - V_{efec}) 2m/l^2}} \quad (\text{ecuación integral})$$

El doble signo se debe a la raíz cuadrada, describiendo la órbita hacia ángulos θ crecientes o decrecientes, partiendo desde el pericentro r_{peri} .

- Simetría de las órbitas: Las órbitas son simétricas respecto de los ejes que pasan por puntos apsidales. (razonar a partir del doble signo de la ecuación integral). Para una órbita acotada la condición de órbita cerrada es pues

$$\begin{aligned} 2[\theta(r_{apo}) - \theta(r_{peri})] &= 2\pi \frac{a}{b}, \quad r_{apo} = \text{apocentro}, \quad r_{peri} = \text{pericentro} \\ \implies b &= \text{número de "pseudoperiodos"} \\ \implies a &= \text{número de vueltas} \end{aligned}$$

- Teorema de Bertrand: Las únicas fuerzas centrales que dan órbitas cerradas simples son la del oscilador ($V = kr^2/2$) y la de Kepler ($V = -k/r$).
- Ecuación diferencial de las órbitas $r(\theta)$. Partiendo de la ecuación radial del movimiento y teniendo en cuenta que

$$\ddot{r} = \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{l^2}{m^2 r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} w = 1/r \\ dw = -dr/r^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = -\frac{m}{l^2} \frac{dV(1/w)}{dw} \quad (\text{ecuación diferencial})$$

También se puede obtener diferenciando respecto de θ en la ecuación de la energía que lleva a la ecuación integral.

6.3 El potencial de Kepler

- Para dos masas con interacción gravitatoria tenemos

$$V(r) = -\frac{k}{r} \quad \text{donde } k = Gm_1m_2 > 0$$

- Potencial efectivo:

$$V_{efec}(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}$$

- Radio de la órbita circular (dado l): $dV_{efec}/dr = 0 \Rightarrow r_{cir} = l^2/k\mu$

- Energía de la órbita circular:

$$T_{cir} = \frac{l^2}{2\mu r_{cir}^2} = \frac{k^2\mu}{2l^2}, \quad V_{cir} = -\frac{k}{r_{cir}} = -\frac{k^2\mu}{l^2}$$

$$\Rightarrow E_{cir} = T_{cir} + V_{cir} = -\frac{k^2\mu}{2l^2}$$

Notar que no hay energía cinética radial. Además, $2T_{cir} + V_{cir} = 0$ (teorema del virial)

- Radios apsidales (pericentro y apocentro): (Dados l y E) $E = V_{efec} \Rightarrow$

$$\frac{1}{r_{peri/apo}} = \frac{\mu k}{l^2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2 k^2}{l^4} + \frac{2\mu E}{l^2}}$$

Para $E > 0$ no existe apocentro (movimiento radial no acotado).

6.4 Órbitas de Kepler

- Ecuación diferencial de las órbitas con $V = -k/r = -kw$:

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = \frac{\mu k}{l^2} \quad \text{donde } w(\theta) = \frac{1}{r(\theta)}$$

(Esta ecuación es como la del oscilador con término constante)

- Solución general:

$$w(\theta) = B \cos(\theta + \phi) + \frac{\mu k}{l^2}$$

donde $B > 0$ y ϕ son constantes de integración. También podíamos llegar al resultado a partir de la ecuación integral de las órbitas.

- Constantes de integración: En el pericentro, $\theta + \phi = 0$ y $1/r_{peri} = B + \mu k/l^2$. Si elegimos el pericentro como punto inicial con $\theta = 0$, obtenemos:

$$\phi = 0 \text{ y } B = \sqrt{\frac{\mu^2 k^2}{l^4} + \frac{2\mu E}{l^2}}$$

$$\frac{1}{r} = C + B \cos \theta \quad \text{con } C = \frac{\mu k}{l^2} \text{ y } B = \sqrt{C^2 + \frac{2\mu E}{l^2}}$$

- $B = 0 \implies$ órbita circular: $1/r = C \implies r_{cir} = l^2/\mu k$, $E_{cir} = -\mu k^2/2l^2$
- $C > B > 0 \implies$ órbita elíptica ($E < 0$) con origen de coordenadas llamado foco de la elipse:

pericentro

$$\implies r_{per} = 1/(C + B) \text{ corresponde a } \theta = 0$$

apocentro

$$\implies r_{apo} = 1/(C - B) \text{ corresponde a } \theta = \pi$$

semieje mayor

$$\implies a = (r_{apo} + r_{per})/2 = C/(C^2 - B^2)$$

distancia focal (del foco al centro)

$$\implies f = (r_{apo} - r_{per})/2 = B/(C^2 - B^2)$$

excentricidad

$$\implies e = f/a = B/C < 1$$

- $C = B > 0 \implies$ órbita parabólica ($E = 0$) con origen en el foco:

$$r_{per} = 1/2B, r_{apo}(\theta = \pi), a, f \rightarrow \infty, e = 1$$

- $B > C > 0 \implies$ rama izquierda de órbita hiperbólica ($E > 0$) con origen

en el foco:

$$\begin{aligned}
 & \text{pericentro} \\
 \implies & r_{per} = 1/(C + B) \text{ (corresponde a } \theta = 0) \\
 & \text{apocentro} \\
 \implies & r_{apo} \rightarrow \infty \text{ (corresponde a } \cos \theta = -C/B) \\
 & \text{semieje} \\
 \implies & a = C/(C^2 - B^2) < 0 \text{ (centro a la derecha)} \\
 & \text{distancia focal (del foco al centro)} \\
 \implies & f = B/(C^2 - B^2) < 0 \text{ (centro a la derecha)} \\
 & \text{excentricidad} \\
 \implies & e = f/a = B/C > 1
 \end{aligned}$$

La rama derecha de la hipérbola correspondería a un potencial de Kepler repulsivo con $k < 0$

- Ecuación de las órbitas en coordenadas cartesianas: Hacemos $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\cos \theta = x/r$ en la ecuación en coordenadas polares \implies

$$\frac{(x + f)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (cónica con centro desplazado)}$$

donde

$$\begin{aligned}
 a &= C/(C^2 - B^2) = -k/2E \\
 f &= B/(C^2 - B^2) = -(l^2/2\mu E) \sqrt{\mu^2 k^2/l^4 + 2\mu E/l^2} \\
 b^2 &= a^2 - f^2 = 1/(C^2 - B^2) = -l^2/2\mu E
 \end{aligned}$$

Notar que $a, f, b^2 \geq 0$ según la cónica sea elipse o hipérbola.

6.5 Leyes de Kepler

- Primera ley: Los planetas se mueven en órbitas elípticas en las que el Sol ocupa uno de los focos.
- Segunda ley: Las áreas barridas por el radio vector (relativo) en tiempos iguales son iguales \iff velocidad areolar constante (fuerza central).

$$\boxed{dA/dt = l/2\mu}$$

- Tercera ley: El cuadrado del periodo de la órbita es proporcional al cubo del semieje mayor.

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{En un periodo } \tau \implies A = l\tau/2\mu \\
 & \text{Area de la elipse } \implies A = \pi ab = \pi a \sqrt{al^2/k\mu}
 \end{aligned} \right\} \implies$$

$$\begin{aligned}\tau^2 &= \frac{4\pi^2 \mu}{k} a^3 \xrightarrow{\text{Sistema Solar}} \left\{ \begin{array}{l} k = GmM_S \\ \mu = mM_S/(m + M_S) \end{array} \right\} \\ \Rightarrow \tau_S^2 &= \frac{4\pi^2}{G(m + M_S)} a^3\end{aligned}$$

Para $m \ll M_S$ la relación τ^2/a^3 es aproximadamente independiente del planeta.

- Satélites terrestres en órbitas circulares de poca altura:

$$\tau_T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM_T}} (R_T + h)^{3/2} \underset{h \ll R_T}{\approx} 2\pi \sqrt{R_T/g} \sim 1.4 \text{ horas}$$

$$\text{con } g = GM_T/R_T^2.$$

- Velocidad de escape de un satélite artificial. Es la velocidad desde la Tierra, correspondiente a una órbita parabólica ($E = 0$):

$$\begin{aligned}0 &= \frac{m}{2} v_{esc}^2 + V(R_T) = \frac{m}{2} v_{esc}^2 + mgR_T \Rightarrow \\ v_{esc} &= \sqrt{2gR_T} \sim 11.2 \text{ Km/h}\end{aligned}$$

6.6 Potenciales con fuentes extensas

- Fuerza gravitatoria de m_i sobre m :

$$\begin{aligned}\vec{F}_G(\vec{r}) &= -G \frac{m_i m}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i), \\ G &= \text{Constante de gravitación}\end{aligned}$$

(Recordar que en la fuerza de Coulomb para cargas eléctricas es análoga, sustituyendo la constante $-G$ por la constante eléctrica en el vacío)

- Energía potencial de m debida a la fuerza gravitatoria de m_i : $\vec{F}_G(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V_G(\vec{r}) \Rightarrow$

$$V_G(\vec{r}) = -G \frac{m_i m}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

- Campo gravitatorio generado por una masa m_i : Es la fuerza por (sobre la) unidad de masa.

$$\vec{G}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{m} = -G \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

- Potencial gravitatorio generado por una masa m_i : Es la energía potencial V_G por unidad de masa

$$\begin{aligned}\Phi_G(\vec{r}) &= \frac{V_G(\vec{r})}{m} = -G \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \\ \Rightarrow \vec{G}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla} \Phi_G(\vec{r})\end{aligned}$$

- Potencial gravitatorio de un sistema de masas $\{m_i\}$: Como las fuerzas se suman y el operador gradiente es lineal, tenemos

$$\Phi_G(\vec{r}) = -G \sum_i \frac{m_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

- Potencial de una distribución de masa $\rho(\vec{r}')$

$$\Phi_G(\vec{r}) = -G \iiint_{Vol} \frac{\rho(\vec{r}') d^3 \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- Potencial de una distribución esférica de masa $\rho(r')$ con radio R . Integrando la distribución de masa en coordenadas esféricas sobre la masa unidad en el eje z

$$\begin{aligned}\Phi_G(r) &= -2\pi G \int_0^R \rho(r') dr' \begin{cases} 2r'^2/r, & r' < r \\ 2r', & r' > r \end{cases} \\ &= -G \begin{cases} \int_0^R dm'/r & r' < r \\ \int_0^R dm'/r' & r' > r \end{cases}\end{aligned}$$

donde $dm' = 4\pi r'^2 \rho(r') dr'$ (masa de una capa esférica).

- Potencial de una distribución esférica uniforme de radio R y de masa $M = 4\pi\rho R^3/3$

$$\Phi_G(r) = -GM \begin{cases} 1/r, & R \leq r \\ 3/2R - r^2/2R^3, & R \geq r \end{cases}$$

Hay continuidad del potencial para $r = R$

- Campo gravitatorio de una distribución esférica uniforme de radio R y de masa $M = 4\pi\rho R^3/3$

$$\vec{G}(\vec{r}) = -GM \begin{cases} \hat{r}/r^2, & R \leq r \\ (r^3/R^3) \hat{r}/r^2, & R \geq r \end{cases}$$

Hay continuidad del campo en $r = R$.

- Potencial de una capa esférica de masa $dm' = 4\pi r'^2 \rho(r') dr'$

$$d\Phi_G(r) = -Gdm' \begin{cases} 1/r, & \begin{matrix} r' \leq r \\ \text{(como con masa puntual en } r' = 0) \end{matrix} \\ 1/r', & \begin{matrix} r' \geq r \\ \text{(potencial constante en el interior)} \end{matrix} \end{cases}$$

El potencial es continuo para $r = r'$. El campo en el interior es nulo. Es discontinuo en $r = r'$.

6.7 Teorema de Gauss

- Enunciado: Sea $\vec{G}(\vec{r})$ generado por una distribución de masa de densidad $\rho(\vec{r}')$. Sea S una superficie cerrada que encierra un volumen V , entonces

$$\iint_S \vec{G} \cdot d\vec{s} = -4\pi G \iiint_V \rho(\vec{r}') d^3\vec{r}'$$

- Demostración: Para una masa puntual m_i se tiene que

$$\vec{G} \cdot d\vec{s} = -G \frac{m_i}{r^2} (\hat{r} \cdot d\vec{s}) = -G \frac{m_i}{r^2} (r^2 \sin\theta d\theta d\phi) = -G m_i d\Omega$$

donde $d\Omega$ es el ángulo sólido del elemento de superficie visto desde la masa puntual. Pero, $\iint_S d\Omega = 0, 4\pi$ según que la masa esté fuera o dentro de la superficie cerrada S . De aquí que haya que integrar en el teorema, sólo las masas encerradas por S .

- Campo de una distribución esférica de masa $\rho(r')$. Sea $\vec{G}(\vec{r}) = g(r)\hat{r}$ y S_r una superficie esférica de radio r

$$\iint_{S_r} \vec{G} \cdot d\vec{s} = 4\pi r^2 g(r) \implies \{\text{teorema de Gauss}\} \implies$$

$$g(r) = -\frac{G}{r^2} \iiint_{V_r} \rho(r') d^3\vec{r}' \quad (\text{campo de una distribución esférica})$$

donde V_r es la esfera de radio r encerrada por S_r . El campo es equivalente al de una masa puntual de valor igual a la masa total encerrada por S_r .

- Forma diferencial del teorema de Gauss: Del teorema de Gauss y del teorema de la divergencia tenemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{G}(\vec{r}) = -4\pi G \rho(\vec{r})$$

6.8 Desarrollos multipolares. Las Mareas

- Desarrollo de la fuente extensa de potencial: Consideramos el origen de coordenadas en la zona de la distribución de masas y suponemos que esta zona es pequeña comparada con la distancia al punto de influencia ($r' \ll r$),

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' + r'^2}} \\ &= \frac{1}{r \sqrt{1 + (-2\vec{r} \cdot \vec{r}'/r^2 + r'^2/r^2)}} \\ &\approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{-2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{-2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)^2 \right) \\ &\approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r'^2 r^2}{r^5}, \\ &\text{con } (r' \ll r) \end{aligned}$$

- Mareas. Desarrollo de la zona de influencia (Tierra): Consideramos el origen de coordenadas en la zona de influencia (p.e. centro de la Tierra) y suponemos que esta zona es pequeña comparada con la distancia a la fuente puntual (Luna), situada en el eje OX

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{d}_{TL} - \vec{r}|} &\approx \frac{1}{d_{TL}} + \frac{\vec{d}_{TL} \cdot \vec{r}}{d_{TL}^3} + \frac{1}{2} \frac{3(\vec{d}_{TL} \cdot \vec{r})^2 - d_{TL}^2 r^2}{d_{TL}^5}, \\ &\text{con } (r \ll d_{TL}) \end{aligned}$$

- Términos multipolares del potencial $\Phi(\vec{r}) \approx \Phi_0 + \Phi_1(\vec{r}) + \Phi_2(\vec{r}) \implies$

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= -G \frac{M_L}{d_{TL}} \\ \Phi_1(\vec{r}) &= -G \frac{M_L}{d_{TL}^2} x = -G \frac{M_L}{d_{TL}^2} r \sin \theta \cos \phi \\ \Phi_2(\vec{r}) &= -G \frac{M_L}{2d_{TL}^3} (3x^2 - r^2) = -G \frac{M_L}{2d_{TL}^3} r^2 (3 \sin^2 \theta \cos^2 \phi - 1) \end{aligned}$$

- Términos multipolares del campo gravitatorio ($\vec{G} = -\vec{\nabla} \Phi$)

$$\begin{aligned} \vec{G}_0 &= \vec{0} \\ \vec{G}_1(\vec{r}) &= G \frac{M_L}{d_{TL}^2} \vec{i} \quad (\text{origina el movimiento planetario}) \\ \vec{G}_2(\vec{r}) &= G \frac{M_L}{2d_{TL}^3} (6x \vec{i} - 2\vec{r}) \quad (\text{origina las mareas}) \end{aligned}$$

- Movimiento de las mareas: La Tierra gira sobre un eje aproximadamente perpendicular al eje Tierra-Luna, por ejemplo el eje OZ , estando el Ecuador en el plano XY . En las zonas del Ecuador con $\vec{r} = \pm R_T \vec{i}$, el campo \vec{G}_2 se dirige hacia fuera de la Tierra, mientras que para $\vec{r} = \pm R_T \vec{j}$ el campo se dirige hacia dentro. Por tanto, se producen dos pleamares y dos bajamares diarios en cada zona del Ecuador. En los demás meridianos el campo va cambiando progresivamente hasta llegar a los polos en donde siempre actúa hacia dentro.
- Intensidad de las mareas. Para llegar al equilibrio, el potencial lunar se debe compensar con el cambio del potencial terrestre debido a la altura h del agua:

$$\Phi_2(\vec{r}) + gh = 0 \quad \text{con } r = R_T \text{ y } g = G \frac{M_T}{R_T^2} \implies$$

$$h = \frac{M_L R_T^4}{2M_T d_{TL}^3} (3 \sin^2 \theta \cos^2 \phi - 1)$$

En el Ecuador ($\theta = \pi/2$), $h_{\max} - h_{\min} = 3M_L R_T^4 / 2M_T d_{TL}^3 \sim 0,5$ metros!!. También habría que añadir el efecto del Sol.

7 Colisiones y Dispersión

- 7.1 Colisiones elásticas
- 7.2 Colisiones inelásticas
- 7.3 Dispersión por una esfera dura.
- 7.4 Sección eficaz
- 7.5 Dispersión por un potencial central
- 7.6 Formula de Rutherford

7.1 Colisiones elásticas

- Planteamiento del problema. Consideremos el proceso $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$. Si no hay fuerzas externas (conservación del momento total):

$$\vec{P} = \vec{p}_1^{in} + \vec{p}_2^{in} = \vec{p}_1^{fin} + \vec{p}_2^{fin}$$

- Condición elástica (conservación de la energía cinética):

$$T = T_1^{in} + T_2^{in} = T_1^{fin} + T_2^{fin}$$

Resolución de la colisión: Conociendo \vec{P} y T del estado inicial y una medida del estado final hay que determinar los momentos en el plano final de colisión (3 ecuaciones con 3 incógnitas).

- Sistema Laboratorio (LAB). Definición: $\vec{p}_2^{in} = \vec{0}$. Escribimos $\vec{p}_1^{in} = \vec{p}_1$, $\vec{p}_{1,2}^{fin} = \vec{p}'_{1,2}$, entonces

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \\ \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} &= \frac{\vec{p}'_1{}^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}'_2{}^2}{2m_2} \end{aligned}$$

Se definen los ángulos de colisión $\theta_{1,2}$ de las partículas finales con respecto a la dirección incidente de la colisión.

- Sistema Centro de Masas (CM). Definición: $\vec{p}_1^{in} + \vec{p}_2^{in} = \vec{0}$. Entonces

$$\begin{aligned} \vec{p}_1^{in} &= -\vec{p}_2^{in} = \vec{p} \\ \vec{p}_1^{fin} &= -\vec{p}_2^{fin} = \vec{p}' \end{aligned}$$

De la conservación de la energía cinética tenemos, pues, que

$$|\vec{p}| = |\vec{p}'| \quad \text{o lo que es lo mismo} \quad p = p'$$

Sólo hay que determinar (medir) el ángulo de colisión θ , así que problema resuelto.

- Paso de LAB a CM: Hay que hacer un "boost" en la dirección de \vec{p}_1 (o \vec{v}_1) con velocidad \vec{v}_0 tal que

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \vec{p}_1^{in} = m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_0) \\ \vec{p} &= -\vec{p}_2^{in} = -m_2\vec{v}_0\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\vec{v}_0 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 \\ p &= p' = m_2v_0 = \mu v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}p_1\end{aligned}$$

- Relación entre θ y θ_1 (estados finales):

$$\tan \theta_1 = \frac{p'_{1y}}{p'_{1x}} = \frac{p'_y}{p'_x + m_1v_0} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + m_1/m_2}$$

En la última igualdad se ha dividido numerador y denominador por p' .

- Angulo máximo en LAB θ_1^{\max} . Se obtiene que

$$\frac{d \tan \theta_1}{d\theta} = 0 \implies \cos \theta = -\frac{m_2}{m_1}$$

Solo hay θ_1^{\max} para $m_2 < m_1$, con lo que

$$\tan \theta_1^{\max} = \frac{m_2}{\sqrt{m_1^2 - m_2^2}}, \quad \sin \theta_1^{\max} = \frac{m_2}{m_1}$$

- Lugar geométrico de \vec{p}_1 (LAB). En CM se tiene que

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2$$

Sustituyendo por valores en LAB, obtenemos la circunferencia de radio R y centro C desplazado en el plano (p'_{1x}, p'_{1y})

$$R^2 = (p'_{1x} - C)^2 + p_{1y}^2$$

donde

$$\begin{aligned}R &= p' = p = m_2v_0 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}p_1 \\ C &= m_1v_0 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}p_1\end{aligned}$$

- Resolución de colisiones en LAB. Dependiendo del dato del estado final, utilizaremos dos de las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}T &= \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} \\ p_1^2 &= (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 \cos \theta_2 \\ p_2^2 &= (\vec{p}_1 - \vec{p}'_1)^2 = p_1^2 + p_1^2 - 2p_1p_1 \cos \theta_1 \\ p_1^2 &= (\vec{p}'_1 + \vec{p}_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)\end{aligned}$$

7.2 Colisiones inelásticas

- Ecuaciones de conservación sin cambio de masa ($\vec{F}^{ext} = \vec{0}$)

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \vec{p}_1^{in} + \vec{p}_2^{in} = \vec{p}_1^{fin} + \vec{p}_2^{fin} \\ T &= T_1^{in} + T_2^{in} = T_1^{fin} + T_2^{fin} + Q\end{aligned}$$

donde Q es la energía disipada. ¡Se sigue conservando el momento, pero no la energía cinética!

- Interpretación de Q : Es la energía disipada en la colisión (deformación, calor). No disipa momento lineal.
- Propiedad de la energía disipada Q : Es independiente del sistema de referencia donde se describe la colisión.
- Clasificación de procesos inelásticos: Exotérmicos o endotérmicos según $Q > 0$ o $Q < 0$
- Relación en el centro de masas. Con la misma notación que en los procesos elásticos llegamos a

$$p^2 = p'^2 + 2\mu Q$$

$\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ es la masa reducida.

- Relaciones entre el LAB y el CM.

$$p = m_2 v_0 = \mu v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1$$

$$\vec{v}_0 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1$$

v_1 es la velocidad de la partícula 1 en LAB. Pero ahora $p \neq p'$

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + m_1 v_0 / p'}$$

$$\sin \theta_1^{\max} = \frac{p'}{m_1 v_0}$$

- Lugar geométrico de \vec{p}'_1 . Como en el caso elástico llegamos a

$$R^2 = (p'_{1x} - C)^2 + p'_{1y}{}^2$$

donde

$$R = p', \quad C = m_1 v_0$$

- Coeficiente de restitución: Es el cociente entre la celeridad relativa del estado final con respecto al inicial

$$e = \frac{u_{fin}(\text{celeridad relativa final})}{u_{ini}(\text{celeridad relativa inicial})} = \frac{|\vec{v}_2^{fin} - \vec{v}_1^{fin}|}{|\vec{v}_2^{ini} - \vec{v}_1^{ini}|}$$

En CM se tiene que

$$e = \frac{p'}{p}$$

- Propiedad: El valor del coeficiente de restitución es independiente del sistema de referencia (evidente)
- Relación de e con la energía de disipación

$$Q = T^{ini} - T^{fin} = \frac{1}{2}\mu u_{ini}^2 (1 - e^2)$$

(Dem: Comprobar previamente que $P^2 + m_1 m_2 u_{ini, fin}^2 = 2(m_1 + m_2)T^{ini, fin}$)

- Clasificación de colisiones segun e

$$e = 1 \implies \text{colisión elástica}$$

$$e = 0 \implies \text{colisión completamente inelástica}$$

$$0 \leq e < 1 \implies \text{colisión exotérmica}$$

$$e > 1 \implies \text{colisión endotérmica}$$

7.3 Dispersión por una esfera dura

- Potencial de una esfera dura

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{para } 0 \leq r \leq a \\ 0 & \text{para } r > a \end{cases}$$

corresponde a una esfera impenetrable de masa infinita y radio a .

- Parametro de impacto s : Es la distancia desde el proyectil inicial hasta el eje paralelo a su recorrido que pasa por el centro de la esfera.
- Angulo de dispersión θ : Es el ángulo que se desvia el proyectil después de colisionar con la esfera. Se tiene la siguiente relación entre s y el ángulo de dispersión θ :

$$s = a \cos \frac{\theta}{2}$$

- Relación entre el parámetro de impacto y la energía del proyectil (con momento angular l dado)

$$l^2 = m^2 v_{mi}^2 s^2 = (2mE) s^2$$

Con l fijado, se tiene que el impacto con la esfera se produce para $E > l^2/2ma^2$ ($s < a$).

7.4 Sección eficaz

- Experimento de dispersión. Preparamos un haz incidente homogéneo tal que I partículas, por unidad de superficie y tiempo, atraviesan una superficie (imaginaria) perpendicular al haz, y se dirigen a una zona de dispersión. Medimos en cada dirección de dispersión (θ, ϕ) el número de partículas dispersadas, $N(\Omega)$, por unidad de tiempo y ángulo sólido.
- Definimos sección eficaz diferencial $d\sigma$, correspondiente al ángulo sólido $d\Omega$, a la que exponiéndola al haz incidente, es atravesada por el mismo número de partículas que atraviesan $d\Omega$, después de la dispersión. Por tanto:

$$I d\sigma = N(\Omega) d\Omega$$

- Relación teórica para $d\sigma$. Supongamos que conocemos la relación $s(\theta)$ entre el parámetro de impacto s y el ángulo de dispersión θ . Las partículas del haz que atraviesan la corona diferencial $d\sigma = s ds d\phi$, son dispersadas en hacia el ángulo sólido $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ (suponemos que no cambia el plano ϕ de dispersión). Es decir

$$I s ds d\phi = N(\Omega) \sin\theta d\theta d\phi$$

Por tanto

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N(\Omega)}{I} = \frac{s}{\sin\theta} \left| \frac{ds}{d\theta} \right|$$

- La cantidad $d\sigma/d\Omega$ se llama sección eficaz diferencial (por unidad de ángulo sólido). La primera igualdad refleja la medida experimental. La segunda la expresión teórica
- Sección eficaz diferencial de una esfera dura. Considerando que

$$s = a \cos \frac{\theta}{2} \implies \left| \frac{ds}{d\theta} \right| = \frac{a}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

obtenemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{4}$$

Es, pues, constante para cualquier dirección de dispersión.

- Sección eficaz total σ . Hay que integrar para todo ángulo sólido. En el caso de una esfera dura tenemos

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{a^2}{4} \int d\Omega = \pi a^2$$

- Sección eficaz en LAB. Si la esfera dura retrocede en la dispersión (masa finita), la relación $s(\theta)$ obtenida sigue siendo válida para el sistema CM pero no para LAB (razonad). Para pasar a LAB tenemos que

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= d\sigma \\ N(\Omega_1) |d\Omega_1| &= N(\Omega) |d\Omega| \end{aligned}$$

De la relación

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta + m_1/m_2}$$

llegamos a

$$\begin{aligned} \cos \theta_1 &= \frac{\cos \theta + \rho}{\sqrt{1 + \rho^2 + 2\rho \cos \theta}} \\ \left| \frac{d\Omega_1}{d\Omega} \right| &= \left| \frac{d \cos \theta_1}{d \cos \theta} \right| = \frac{1 + \rho \cos \theta}{(1 + \rho^2 + 2\rho \cos \theta)^{3/2}} \end{aligned}$$

donde $\rho = m_1/m_2$.

7.5 Dispersión por un potencial central

- Parametro de impacto: queremos obtener una relación entre s , E y θ

$$s = s(E, \theta)$$

para una órbita abierta en un potencial central

- Procedimiento: Suponemos que asintóticamente $U(r = \infty) = 0$. Entonces, como en el caso de la esfera dura

$$l = mv_\infty s = s\sqrt{2mE}$$

En la ecuación de la órbita abierta $r(\phi)$ obtenemos (haciendo $r = \infty$) el ángulo asintótico $\phi_\infty(s, E)$. Si el pericentro de la órbita es $\phi = 0$, entonces el ángulo de dispersión es

$$\theta = \pi - 2\phi_\infty(s, E)$$

- Caso Coulombiano: Consideramos la dispersión de una carga eléctrica Ze (y masa m) por un núcleo pesado de carga $Z'e$ (con $M = \infty$). El potencial es pues $U(r) = ZZ'e^2/r$. De la ecuación de la órbita, para $r = \infty$ se obtiene

$$\cos \phi_{\infty} = \frac{1}{\varepsilon}$$

donde ε es la excentricidad de la órbita hiperbólica

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m(ZZ'e^2)^2}}, \quad l^2 = 2mEs^2$$

Para el ángulo de dispersión tenemos

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \phi_{\infty} \right) = \cos \phi_{\infty}$$

Despejando el parámetro de impacto s (de $\cos \phi_{\infty}$) se obtiene

$$s = \frac{ZZ'e^2}{2E} \cot \frac{\theta}{2}$$

7.6 Formula de Rutherford

- Sección eficaz diferencial para el potencial Coulombiano: Por un lado

$$\left| \frac{ds}{d\theta} \right| = \frac{1}{2} \left(\frac{ZZ'e^2}{2E} \right) \operatorname{cosec}^2 \frac{\theta}{2}$$

Por otro lado, tenemos en cuenta que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{s}{\sin s} \left| \frac{ds}{d\theta} \right|$$

Sustituyendo la expresión del parámetro de impacto

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Ruth} = \frac{1}{4} \left(\frac{ZZ'e^2}{2E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2}$$

Esta es la Fórmula de Rutherford.

- Esta fórmula sirve para núcleos sin retroceso o con retroceso en CM (en este caso la energía se refiere a la energía relativa en CM)
- La fórmula fue obtenida por Rutherford para la dispersión de partículas α por núcleos atómicos. Geiger y Marsden realizaron experiencias con partículas α sobre láminas de oro. Las desviaciones de la fórmula a grandes valores de θ (pequeños s) permiten acotar el radio nuclear ($< 3 \times 10^{-12}$ cm)
- Para $\theta = 0$ la fórmula de Rutherford presenta una singularidad. Esto indica que estamos ante una interacción de largo alcance. "Para observar partículas dispersadas en la dirección hacia delante debemos exponer una sección eficaz infinita"

8 Relatividad especial

- 8.1 Transformaciones de Galileo.
- 8.2 Transformaciones de Lorentz.
- 8.3 Consecuencias de las TL.
- 8.4 Intervalos espacio temporales.
- 8.5 Transformacion de velocidades. Cuadrivelocidad
- 8.6 Cuadrivectores
- 8.7 Cuadrivector Energia-Momento.
- 8.8 Fuerza de Minkowski. Lagrangiano Relativista
- 8.9 Colisiones Relativistas.
- 8.10 Invariantes de la colisión $a + b \rightarrow 1 + 2$.
- 8.11 Ejemplos.

8.1 Transformaciones de Galileo

- Transformaciones de Galileo: Sean dos sistemas de referencia inerciales S y S' , tales que el segundo se mueve paralelamente con velocidad V respecto del primero en la dirección del eje OZ . Si en un instante inicial ambos coinciden se tiene la siguiente transformación de coordenadas (transformación de Galileo) para un determinado punto P del espacio, que respetan la mecánica Newtoniana

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' \\ z &= z' + Vt' \\ t &= t' \end{aligned} \right\}$$

Notar que el tiempo es el mismo para los dos sistemas de referencia inerciales

- La transformación de Galileo mas general implica orígenes distintos en $t = t' = 0$ y ejes girados

$$\left. \begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}'_0 + \vec{V}t' + \mathcal{R}\vec{r}' \\ t &= t' \end{aligned} \right\}$$

- Transformación de velocidades. En S $\vec{u} = d\vec{r}/dt$ y en S' $\vec{u}' = d\vec{r}'/dt'$, por tanto

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u'_x \\ u_y &= u'_y \\ u_z &= u'_z + V \end{aligned} \right\}$$

No hay, por tanto, límite para la velocidad de un móvil.

- Diagramas espacio temporales. Para representar las transformaciones de Galileo hay que desdoblarse el eje temporal. (Las transformaciones son lineales pero no son ortogonales)

8.2 Transformaciones de Lorentz

- Los principios de la relatividad especial son:
 1. Las leyes de la física son las mismas en cualquier sistema de referencia inercial
 2. Existe una velocidad límite, la de la luz en el vacío c , que es independiente del sistema de referencia inercial en que se mida. (En contra de Galileo)
- Consideramos las siguientes transformaciones lineales en el espacio tiempo

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' \\ z &= \gamma_a(z' + at') \\ t &= \gamma_b(bt' + t) \end{aligned} \right\}$$

con las siguientes condiciones:

- a) El origen O de S ($z = 0$) corresponde a $z' = -Vt'$ visto desde S' , por tanto

$$a = V$$

- b) El origen O' de S' ($z' = 0$) corresponde a $z = Vt$, visto desde S , por tanto

$$\gamma_a = \gamma_b = \gamma$$

- c) Un rayo de luz a lo largo de Z, Z' corresponde a $z = ct$, $z' = ct'$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío. Se tiene, pues

$$b = V/c^2$$

- d) Las transformaciones inversas corresponden al cambio $V \Rightarrow -V$, con lo que

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

- Espacio de Minkowski: Es el espacio de sucesos espacio-temporales (ct, \vec{r}) . Las transformaciones de Lorentz en este espacio-tiempo son

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' \\ z &= \gamma(z' + \beta ct') \\ ct &= \gamma(\beta z' + ct') \end{aligned} \right\}$$

donde $\beta = V/c$. Las relaciones inversas son análogas, cambiando β por $-\beta$.

- Invariante en espacio de Minkowski. Se tiene que

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

- Las transformaciones de Lorentz se pueden representar por medio de un desdoblamiento de ejes "ortogonales cruzados" (ct, z) , (ct', z') con la misma bisectriz $z = ct$, $z' = ct'$, ya que

$$c^2t^2 + z^2 = c^2t'^2 + z'^2$$

El desdoblamiento subtende un ángulo α , tal que, $\sin \alpha = \beta$

8.3 Consecuencias de las TL

- Contracción de longitudes: Definimos longitud como la medida simultanea de dos posiciones. Sea $L'_{rep} = z'_{2rep} - z'_{1rep}$ la medida de dos posiciones en reposo en el sistema S' . Si medimos, en movimiento, estas posiciones en el instante t desde S , tenemos (de las TL)

$$L'_{rep} = z'_{2rep} - z'_{1rep} = \gamma(z_{2mov} - z_{1mov}) = \gamma L_{mov}$$

Analogamente

$$L_{rep} = z_{2rep} - z_{1rep} = \gamma(z'_{2mov} - z'_{1mov}) = \gamma L'_{mov}$$

Como $\gamma > 1$, tenemos la contracción de longitudes medidas en movimiento.

- Dilatación temporal: Llamaremos tiempo propio τ al tiempo medido desde una posición fija. Así pues, para dos medidas de tiempo desde una posición fija en S' tenemos (de las TL)

$$c(t_2 - t_1) = \gamma c(\tau'_2 - \tau'_1)$$

Es decir,

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau'$$

Analogamente,

$$\Delta t' = \gamma \Delta \tau$$

Esto es la dilatación temporal de un reloj fijo respecto de un reloj en movimiento.

- La paradoja de los gemelos: Sea un gemelo B viajando en el espacio que parte y vuelve a la posición A de otro gemelo fijo en un sistema inercial. El tiempo transcurrido para el gemelo B es

$$T_B = \int d\tau_B = \int \sqrt{1 - V^2(t)/c^2} dt < T_A$$

siendo T_A el tiempo transcurrido en el reloj del gemelo A. ¡El gemelo B vuelve mas joven!

8.4 Intervalos espacio temporales

- Transformación de intervalos: Sean dos sucesos (ct_1, \vec{r}_1) y (ct_2, \vec{r}_2) en el sistema S. Tenemos

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \Delta x' \\ \Delta y &= \Delta y' \\ \Delta z &= \gamma(\Delta z' + \beta c\Delta t) \\ c\Delta t &= \gamma(\beta\Delta z' + c\Delta t) \end{aligned} \right\}$$

- Conservación de la norma: El cuadrivector $(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ conserva la norma en el espacio de Minkowski

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\ &= c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 = \Delta s'^2 \end{aligned}$$

El intervalo Δs^2 es pues invariante relativista.

- Clasificación de intervalos:
 - 1) Intervalo tipo luz $\Delta s^2 = 0$. Se conecta por señales luminosas
 - 2) Intervalo temporal $\Delta s^2 > 0$. Se conecta por señales que viajan a velocidad menor que c (intervalos causales)
 - 3) Intervalos espaciales $\Delta s^2 < 0$ no se pueden conectar mediante señales (intervalos no causales)
- Cono de luz: Con dos dimensiones espaciales, dado un suceso, los sucesos que verifican la condición

$$c^2 (\Delta t)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

forman el cono de luz de dicho suceso.

- Pasado y futuro causal. Para un suceso se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Pasado:} & \quad \Delta s^2 > 0, \quad \Delta t < 0 \\ \text{Futuro:} & \quad \Delta s^2 > 0, \quad \Delta t > 0 \end{aligned}$$

Los sucesos causales en un sistema S son también causales en S' y conservan el signo del intervalo temporal (principio de causalidad). Un suceso no causal no tiene porque conservar el signo del intervalo temporal (razonar con diagramas de espacio-tiempo)

8.5 Transformación de velocidades. Cuadrivelocidad

- Transformaciones de Lorentz en forma diferencial

$$\left. \begin{aligned} dx &= dx' \\ dy &= dy' \\ dz &= \gamma (dz' + \beta c dt') \\ c dt &= \gamma (\beta dz' + c dt') \end{aligned} \right\}$$

- Transformación de velocidades. Definimos $u_x = dx/dt$, $u'_x = dx'/dt'$, etc. Dividimos las tres primeras transformaciones por la tercera, entonces

$$u_{x, y} = \frac{u'_{x, y}}{\gamma (1 + Vu'_z/c^2)}, \quad u_z = \frac{u'_z + V}{1 + Vu'_z/c^2}$$

Para $V/c, u'/c \rightarrow 0$, recuperamos las transformaciones de Galileo.

- Suma de velocidades. Sea el sistema S'' moviéndose con velocidad V_2 respecto de S' , que a su vez se mueve con velocidad V_1 con respecto de S (según ejes Z). La velocidad V_3 de S'' respecto de S es, por tanto

$$V_3 = \frac{V_2 + V_1}{1 + V_1 V_2/c^2}$$

(de la transformación de u_z identificar $u_z = V_3$, $u'_z = V_2$, $V = V_1$). Notar que $V_1 = V_2 = c \implies V_3 = c$.

- Intervalo diferencial. Tenemos que

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 (dt)^2 - (dr)^2 = c^2 (dt)^2 (1 - u^2/c^2) = c^2 (dt)^2 / \gamma^2(u) \\ &\equiv \textit{invariante} \end{aligned}$$

donde $\gamma(u) = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$, entonces

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma(u)} = \frac{dt'}{\gamma(u')} \equiv \frac{ds}{c} \equiv \textit{invariante tiempo propio}$$

El tiempo propio de un objeto en movimiento es independiente del sistema de referencia respecto del que se mueve.

- Cuadrivector velocidad. Dado el *cuadrivector* espacio-temporal $x^\mu = (ct, x, y, z)$, definimos la cuadrivelocidad u^μ como $dx^\mu/d\tau$, es decir

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma(u) (c, u_x, u_y, u_z)$$

- Transformación de la cuadrivelocidad. Como $d\tau$ es invariante, las componentes de u^μ se transforman como las de dx^μ , es decir

$$\left. \begin{aligned} \gamma(u) u_x &= \gamma(u') u'_x \\ \gamma(u) u_y &= \gamma(u') u'_y \\ \gamma(u) u_z &= \gamma \gamma(u') (u'_z + \beta c) \\ \gamma(u) c &= \gamma \gamma(u') (\beta u'_z + c) \end{aligned} \right\}$$

Notar que $\gamma = \gamma(V)$. Estas transformaciones son equivalentes a las transformaciones de las velocidades.

- Cuadriaceleración. Analogamente definimos

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \gamma(u) \frac{du^\mu}{dt}$$

En terminos de la aceleración ordinaria $\vec{a} = d\vec{u}/dt$ se puede comprobar que

$$a^\mu = \left(\gamma^4(u) \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{c}, \gamma^2(u) \vec{a} + \gamma^4(u) \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{c} \vec{u} \right)$$

8.6 Cuadrivectores

- Definición. Llamamos cuadrivector $v^\mu = (v^0, \vec{v})$ a un conjunto de cuatro componentes que al cambiar de sistema de referencia inercial se transforman segun las transformaciones de Lorentz. Es decir,

$$v^\mu = \Lambda^\mu_\nu v^\nu$$

con indice ν sumado de 1 a 4 y donde

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

La matriz Λ^μ_ν se llama transformación de Lorentz (en el espacio de cuadrivectores)

- Producto escalar de cuadrivectores. Dados dos cuadrivectores v^μ y w^μ definimos el producto escalar en el espacio de Minkowski como

$$v \cdot w = v^\mu w^\nu g_{\mu\nu}$$

donde

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz $g_{\mu\nu}$ se llama metrica de Minkowski.

- Cuadrivector covariante. Dado v^μ definimos el correspondiente cuadrivector covariante v_μ (con indices abajo) como

$$v_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu = (v^0, -\vec{v})$$

Es decir el que cambia el signo de las componentes espaciales. El producto escalar se puede expresar como

$$v \cdot w = v^\mu w_\mu = v_\mu w^\mu = v^0 w^0 - v_x w_x - v_y w_y - v_z w_z$$

- Propiedad/definición de una transformación de Lorentz: Es toda transformación en el espacio de Minkowski que mantiene invariante el producto escalar de dos cuadvectores.

8.7 Cuadrivector Energía-Momento

- Mantenemos el concepto de cantidad de movimiento (momento) asociado a un sistema dinámico como "la cantidad cinématica que cambia debido a las fuerzas externas". Si no hay fuerzas externas no habrá cambio de momento del sistema en ningún sistema inercial. Por ejemplo, sea un sistema de partículas en la referencia inercial S , con momento total $\vec{P} = \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha}$. En dos instantes diferentes, inicial y final, si no hay fuerzas externas, tendremos que $\vec{P}_{inicial} = \vec{P}_{final}$ en cualquier sistema de referencia inercial.
- Consideremos una colisión elástica de dos partículas. Con la definición Newtoniana de momento, $\vec{p} = m \vec{u}$, supongamos que en un sistema inercial S se cumple que

$$m_1 \vec{u}_1^{ini} + m_2 \vec{u}_2^{ini} = m_1 \vec{u}_1^{fin} + m_2 \vec{u}_2^{fin}$$

En otro sistema inercial S' , si las transformaciones de velocidades fuesen las de Galileo (generales) tendríamos

$$m_1 \mathcal{R} \vec{u}_1^{ini} + m_2 \mathcal{R} \vec{u}_2^{ini} = m_1 \mathcal{R} \vec{u}_1^{fin} + m_2 \mathcal{R} \vec{u}_2^{fin}$$

donde \mathcal{R} es una rotación. Como \mathcal{R} es una transformación lineal de la velocidad podemos escribir

$$\mathcal{R}(m_1 \vec{u}_1^{ini} + m_2 \vec{u}_2^{ini}) = \mathcal{R}(m_1 \vec{u}_1^{fin} + m_2 \vec{u}_2^{fin})$$

con lo que

$$\vec{P}_{inicial} = \vec{P}_{final} \rightarrow \mathcal{R} \vec{P}'_{inicial} = \mathcal{R} \vec{P}'_{final} \rightarrow \vec{P}'_{inicial} = \vec{P}'_{final}$$

- Según Lorentz, las transformaciones de las velocidades no son lineales. Pero si lo son las transformaciones de las cuadvelocidades. Por tanto, para que se respete la conservación del momento de un sistema de partículas al pasar de un sistema de un sistema inercial a otro, definimos el cuadrimento relativista

$$\begin{aligned} p^{\mu} &= m u^{\mu} \\ &= m \gamma(u)(c, \vec{u}) \end{aligned}$$

El trimomento relativista es pues

$$\vec{p} = m \gamma(u) \vec{u}$$

¡Pero hay que hablar de conservación del cuádrimomento, no solo del trimomento!. De esta manera

$$P_{inicial}^{\mu} = P_{final}^{\mu} \rightarrow *_{\nu}^{\mu} P_{inicial}^{\nu} = *_{\nu}^{\mu} P_{final}^{\nu} \rightarrow P_{inicial}^{\nu} = P_{final}^{\nu}$$

que es lo que pretendíamos.

- Para interpretar la componente temporal del cuádrimomento, definimos la energía relativista como

$$E = cp^0 = m\gamma(u)c^2$$

Haciendo el desarrollo no relativista $\gamma(u) \approx 1 + \frac{1}{2}u^2/c^2$ tenemos

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}m u^2 \equiv E_0 + T_{NR}$$

donde T_{NR} es la energía cinética no relativista. Definimos

$$\begin{aligned} E_0 &= mc^2: \text{Energía en reposo} \\ T_R &= E - E_0: \text{Energía cinética relativista} \end{aligned}$$

- Del invariante relativista $p^{\mu}p_{\mu} = m^2c^2$ se obtiene la relación fundamental entre el trimomento y la energía relativista

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$$

- Para partículas sin masa $m = 0$

$$E = |\vec{p}| c$$

Teniendo en cuenta las expresiones del trimomento y de la energía, tenemos que

$$E = |\vec{p}| c^2 / |\vec{u}|$$

con lo que

$$m = 0 \rightarrow |\vec{u}| = c$$

8.8 Fuerza de Minkowski. Lagrangiano Relativista

- La generalización de la segunda ley de Newton para partículas relativistas, manteniendo la definición de fuerza, es

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \text{donde} \quad \vec{p} = m\gamma(u)\vec{u}$$

- Definimos la fuerza covariante de Minkowski F^μ como sigue

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = F^\mu$$

donde τ es el tiempo propio de la partícula en movimiento.

- Las componentes de F^μ son

$$F^\mu = \frac{d}{d\tau} (m\gamma(u)c, \vec{p}) = \gamma(u) \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{F}}{c}, \vec{F} \right)$$

donde se ha utilizado la identidad

$$\gamma(u)c \frac{d\gamma(u)}{d\tau} = \gamma(u) \vec{u} \cdot \frac{d\gamma(u) \vec{u}}{d\tau}$$

obtenida derivando la relación invariante $u^\mu u_\mu = c^2$.

- La generalización de la ley de Newton para una partícula relativista con fuerzas que derivan de un potencial, se puede obtener aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange al siguiente Lagrangiano

$$L(x_k, u_k) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{u}^2}{c^2}} - V(x_k) = -mc^2/\gamma(u) - V(x_k)$$

donde $F_k = -\partial V/\partial x_k$

- Podemos definir un principio de mínima acción a partir de

$$A = \int L(x_k, u_k) dt = \int L_R(x_k, u_k) d\tau$$

donde $L_R(x_k, u_k)$ es el lagrangiano manifiestamente covariante, definido como sigue

$$L_R(x_k, u_k) = -mc^2 - \frac{1}{c} u^\mu V_\mu$$

siendo $V_\mu = (V(x_k), \vec{0})$ un cuadripotencial cuya componentes espaciales son nulas.

- Para una partícula de carga e en un campo electromagnético el cuadripotencial es $A^\mu = e(\Phi(x_k), \vec{A}(x_k))$, con lo que

$$L(x_k, u_k) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{u}^2}{c^2}} - e\Phi + e \frac{\vec{u} \cdot \vec{A}}{c}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones de Maxwell

$$\vec{\varepsilon} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

y aplicando Euler-Lagrange, se llega a la ecuación de movimiento

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e \left(\vec{\varepsilon} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right) \equiv \vec{F}_{Lorentz}$$

Aparece, así, la fuerza de Lorentz para una partícula cargada en un campo electromagnético.

8.9 Colisiones Relativistas

- Consideremos la colisión

$$a + b \rightarrow 1 + 2 + \dots$$

con masas m_i distintas, en general. De la conservación del cuadrimomento total tenemos

$$\left. \begin{aligned} E_a + E_b &= E_1 + E_2 + \dots \\ \vec{p}_a + \vec{p}_b &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots \end{aligned} \right\}$$

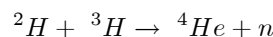
donde $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ (utilizamos la convención dimensional $c = 1$)

- Notar que el formalismo relativista no distingue entre colisiones elásticas e inelásticas. El balance de energía cinética se compensa con el balance de masas al cuadrado)

$$m_a^2 + m_b^2 - (m_1^2 + m_2^2 + \dots) = T_{1R} + T_{2R} + \dots - (T_{aR} + T_{bR})$$

(recordar $c = 1$) donde T_R es la energía cinética relativista.

- Ejemplo. Considerar el proceso de fusión nuclear del deuterio con el tritio para obtener helio y neutrones



con las siguientes masas: $m_{2\text{H}} = 2.00m_p$, $m_{3\text{H}} = 2.99m_p$, $m_{\text{He}} = 3.97m_p$ y $m_n = m_p$, siendo la masa del proton $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ Kg. Haciendo reaccionar 2.00 g de deuterio con 2.99 g de tritio, es decir $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ nucleos de cada se liberan $0.02 \times 10^{-3} \times c^2 = 0.18$ Julios (\simeq medio millón de Kw.h)

- Colisión a dos partículas $a + b \rightarrow 1 + 2$ en CM. Por definición de CM: $\vec{p}_a = -\vec{p}_b = \vec{p}$ y $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}'$. Entonces, conociendo $|\vec{p}|$, a partir de las ecuaciones de conservación del cuadrimomento total, podemos obtener las energías de las partículas del proceso (las masas se suponen conocidas). También podemos obtener $|\vec{p}'|$. Si conocemos el ángulo de colisión θ podremos obtener el trimomento \vec{p}' .

- Colisión a dos partículas $a + b \rightarrow 1 + 2$ en LAB. En este caso $\vec{p}_b = 0$. Conociendo $|\vec{p}_a|$ y un dato del estado final, $|\vec{p}_1|$ o θ_1 , podemos obtener a partir de las ecuaciones de conservación del cuadrimento total todas las energías, trimomentos y ángulos del proceso de colisión.
- Paso del CM al LAB. Recordando que

$$\begin{aligned} |\vec{p}| &= m\gamma(u)u \\ E &= m\gamma(u)c^2 \end{aligned}$$

la velocidad V que pasa del sistema CM al LAB es

$$V = \frac{|\vec{p}|}{E_b^{CM}}$$

donde $|\vec{p}|$ y E_b^{CM} son el módulo del trimomento y la energía de la partícula b en CM. (notar $c = 1$)

8.10 Invariantes de colisión

- Para el proceso de colisión $a+b \rightarrow 1+2$ de finimos las siguientes cantidades invariantes relativistas

$$\begin{aligned} s &= (p_a + p_b)^2 = (p_1 + p_2)^2 \\ t &= (p_a - p_1)^2 = (p_2 - p_b)^2 \end{aligned}$$

donde p_a, p_b, p_1, p_2 son los cuadrimentos de las partículas que intervienen en el proceso de colisión. Conocido el valor de los invariantes, podemos obtener las energías y trimomentos tanto en CM como en LAB. Para ello hay que recordar que el producto escalar de dos cuadrivectores es

$$a \cdot b = a^\mu b_\mu = (a^0, \vec{a}) \cdot (b^0, \vec{b}) = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Notar que para un cuadrimento se tiene

$$p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$$

- Invariante s en CM. Tenemos

$$s = (E_a^{CM} + E_b^{CM}, \vec{0})^2 = (E_a^{CM} + E_b^{CM})^2$$

Por tanto, el valor de s coincide con la energía total al cuadrado en el CM. De las relaciones

$$\begin{aligned} \sqrt{s} &= E_a^{CM} + E_b^{CM} \\ m_a^2 - m_b^2 &= (E_a^{CM})^2 - (E_b^{CM})^2 = \sqrt{s} (E_a^{CM} - E_b^{CM}) \end{aligned}$$

obtenemos

$$E_a^{CM} = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_a^2 - m_b^2), \quad E_b^{CM} = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s - m_a^2 + m_b^2)$$

De estas energías se obtiene $|\vec{p}|$. Análogamente se obtienen E_1^{CM} , E_2^{CM} y $|\vec{p}'|$.

- Invariante t en CM. Tenemos

$$\begin{aligned} t &= p_a^2 + p_b^2 - 2p_a \cdot p_b \\ &= m_a^2 + m_b^2 - 2E_a^{CM} E_b^{CM} + 2|\vec{p}'| |\vec{p}| \cos \theta \end{aligned}$$

De esta relación se obtiene el ángulo de colisión θ

- Invariante s en LAB. Tenemos

$$\begin{aligned} s &= p_a^2 + p_b^2 + 2p_a \cdot p_b \\ &= m_a^2 + m_b^2 + 2E_a^{LAB} m_b \end{aligned}$$

Por tanto,

$$E_a^{LAB} = \frac{1}{2m_b} (s - m_a^2 - m_b^2)$$

y de aquí se obtiene $|\vec{p}_a^{LAB}|$.

- Invariante t en LAB. Tenemos

$$\begin{aligned} t &= p_2^2 + p_b^2 - 2p_a \cdot p_b \\ &= m_2^2 + m_b^2 - 2E_2^{LAB} m_b \end{aligned}$$

Por tanto,

$$E_2^{LAB} = \frac{1}{2m_b} (-t + m_2^2 + m_b^2)$$

y de aquí se obtiene $|\vec{p}_2^{LAB}|$. Con los valores de $|\vec{p}_a^{LAB}|$ y $|\vec{p}_2^{LAB}|$ podemos obtener $|\vec{p}_1^{LAB}|$ θ_1 y θ_2 .

8.11 Ejemplos

- Energía mínima de los positrones en el LAB (energía umbral) sobre electrones para que se produzcan dos piones: $e^+ + e^- \rightarrow \pi^+ + \pi^-$. El valor $E_{e^+ \text{min}}^{LAB}$ se corresponde con s_{min}

$$s_{\text{min}} = (p_{\pi^+} + p_{\pi^-})_{\text{min}}^2 = (E_{\pi^+}^{CM} + E_{\pi^-}^{CM})_{\text{min}}^2 = 4m_{\pi}^2$$

Por tanto,

$$E_{e^+ \text{min}}^{LAB} = \frac{1}{2m_{e^-}} (s_{\text{min}} - m_{e^+}^2 - m_{e^-}^2) = \frac{4m_{\pi}^2 - 2m_e^2}{2m_e}$$

- Energía máxima del fotón en la desintegración en reposo (CM=LAB) de la partícula η : $\eta \rightarrow \gamma + \pi^+ + \pi^-$. Consideremos el sistema de referencia CM_{12} que corresponde al centro de masas de los dos piones. Definimos el invariante $s_{12} = (p_{\pi^+} + p_{\pi^-})^2 = (p_\gamma + p_\eta)^2$. Por un lado

$$s_{12} = (p_\gamma + p_\eta)^2 = m_\eta^2 + m_\gamma^2 - 2m_\eta E_\gamma^{LAB}$$

Por otro lado

$$s_{12 \min} = (p_{\pi^+} + p_{\pi^-})_{\min}^2 = \left(E_{\pi^+}^{CM_{12}} + E_{\pi^-}^{CM_{12}} \right)_{\min}^2 = 4m_\pi^2$$

así que

$$E_{\gamma \max}^{LAB} = \frac{m_\eta^2 - 4m_\pi^2}{2m_\eta^2}$$

donde hemos considerado que $m_\gamma = 0$.

- Angulo mínimo de los dos fotones procedentes de la desintegración en vuelo de un pión neutro, $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$. De la conservación del cuadrivector $p_\pi^2 = (p_1 + p_2)^2$ obtenemos

$$m_\pi^2 = 2E_1 E_2 (1 - \cos \theta) = 4E_1 E_2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Por tanto,

$$\sin^2 \frac{\theta_{\min}}{2} = \frac{m_\pi^2}{4(E_1 E_2)_{\max}}$$

Pero $(E_1 E_2)_{\max} = E_1 (E - E_1)_{\max} \rightarrow E_1 = E_2 = E_\pi/2 \rightarrow (E_1 E_2)_{\max} = E_\pi^2/4$.

9 Sistemas no Inerciales

9.1 Velocidad angular instantánea.

9.2 Teorema de Coriolis.

9.3 Movimiento en la Superficie Terrestre.

9.4 Caída Libre. Desviación hacia el Este.

9.5 Péndulo de Foucault.

9.1 Velocidad angular instantánea

- Sea $S_I = \{O_I, x_I, y_I, z_I\}$ un sistema de referencia inercial y $S = \{O, x, y, z\}$ un sistema de referencia móvil, desde el cual queremos describir la dinámica de un cuerpo no relativista. Tanto el origen O como la orientación del sistema móvil cambian con el tiempo.

- Tendremos, por un lado

$$\overrightarrow{O_I O} = \vec{R}(t)$$

Por otro lado, expresamos la variación del sistema móvil (con respecto al sistema inercial) en términos de la propia referencia móvil

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{i}}{dt} &= a_{11}\vec{i} + a_{12}\vec{j} + a_{13}\vec{k} \\ \frac{d\vec{j}}{dt} &= a_{21}\vec{i} + a_{22}\vec{j} + a_{23}\vec{k} \\ \frac{d\vec{k}}{dt} &= a_{31}\vec{i} + a_{32}\vec{j} + a_{33}\vec{k}\end{aligned}$$

donde $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ son los vectores unitarios de la referencia móvil.

- Diferenciando las condiciones $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, etc., se obtiene que

$$\begin{aligned}a_{11} &= a_{22} = a_{33} = 0 \\ a_{ij} &= -a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3\end{aligned}$$

- Se define el vector velocidad angular instantánea $\vec{w}(t)$ como

$$\begin{aligned}\vec{w} &= w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k} \\ &= a_{23}\vec{i} + a_{31}\vec{j} + a_{12}\vec{k}\end{aligned}$$

de esta forma

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{w} \times \vec{i}, \text{ etc.}$$

- Cambio de un vector fijo \vec{A}_o en S

$$\frac{d\vec{A}_o}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}_o$$

es decir \vec{A}_o "gira" un ángulo θ alrededor de la dirección de $\vec{\omega}$ a razón de $\frac{d\theta}{dt} = \omega$, de ahí el nombre de velocidad angular instantánea.

- Cambio de un vector $\vec{A} = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k}$ que varía a su vez con respecto a S

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\delta \vec{A}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

donde

$$\frac{\delta \vec{A}}{\delta t} = \frac{dA_1}{dt} \vec{i} + \frac{dA_2}{dt} \vec{j} + \frac{dA_3}{dt} \vec{k}$$

es decir, $\frac{\delta \vec{A}}{\delta t}$ representa el cambio de \vec{A} "visto" desde el sistema móvil

9.2 Teorema de Coriolis

- Sea un punto P que se mueve en el espacio con vector de posición \vec{r}_I respecto del sistema inercial y \vec{r} respecto del sistema móvil. Se tiene, pues, que

$$\vec{r}_I(t) = \vec{r}(t) + \vec{R}(t)$$

- Derivando con respecto al tiempo tenemos

$$\vec{v}_I(t) = \vec{v}(t) + \vec{\omega} \times \vec{r} + \frac{d\vec{R}}{dt}$$

donde \vec{v}_I es la velocidad respecto del sistema inercial y $\vec{v} = \frac{\delta \vec{r}}{\delta t}$ es la velocidad "vista" desde el sistema móvil.

- Volviendo a derivar tenemos

$$\vec{a}_I = \vec{a} + 2\vec{\omega} \times \vec{v} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2}$$

Este resultado se conoce como teorema de Coriolis.

- Notar que

$$\vec{a}_I = \text{aceleración inercial}$$

$$\vec{a} = \frac{\delta \vec{v}}{\delta t} = \text{aceleración desde el sistema móvil}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{\delta \vec{\omega}}{\delta t} = \text{aceleración angular instantánea}$$

$$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \text{aceleración de arrastre}$$

$$2\vec{\omega} \times \vec{v} = \text{aceleración de Coriolis}$$

La aceleración de Coriolis sólo se pone de manifiesto si el punto P se mueve respecto del sistema móvil.

- Segunda ley de Newton desde un sistema no inercial (móvil). Consideremos un campo de fuerzas externo \vec{F} , entonces, para un punto material de masa m tendremos

$$m \frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} = \vec{F}_{efec}$$

donde

$$\vec{F}_{efec} = \vec{F} - m \left[2\vec{\omega} \times \vec{v} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} \right]$$

- Aparecen las siguientes fuerzas "ficticias" en el sistema de referencia móvil

$$\begin{aligned} \vec{F}_{centr} &= -m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \text{fuerza centrífuga} \\ \vec{F}_{azimu} &= -m \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} = \text{fuerza azimutal} \\ \vec{F}_{arrast} &= -m \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \text{fuerza de arrastre} \\ \vec{F}_{Coriol} &= -2m \vec{\omega} \times \vec{v} = \text{fuerza de Coriolis} \end{aligned}$$

- Nota: Si \vec{R} gira con velocidad angular $\vec{\Omega}$ entonces

$$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{R} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R})$$

9.3 Movimiento en la Superficie Terrestre.

- Elegimos el sistema inercial fijo S_I con origen O_I en el centro de la Tierra y el sistema móvil S con origen O en un punto de la superficie terrestre, girando con ella. Elegimos los ejes móviles tal que Ox apunta hacia el Este, Oy hacia el Norte y Oz hacia arriba (y hacia abajo pasando por el centro de la Tierra, supuesta esférica). Tanto $\vec{R}_T(t) = \vec{O_I O}$ como el sistema de referencia móvil giran con la velocidad angular de rotación terrestre $\vec{\omega}_T$, alrededor del eje Norte-Sur, con magnitud (constante)

$$\omega_T \simeq \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 0.73 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$$

- Considerando la gravedad g en la superficie y otras fuerzas \vec{F}' , la segunda ley de Newton para una masa m es

$$m \frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} = \vec{F}' - mg \vec{k} - m \left[2\vec{w}_T \times \vec{v} + \vec{w}_T \times (\vec{w}_T \times \vec{r}) + \vec{w}_T \times (\vec{w}_T \times \vec{R}_T) \right]$$

para $r \ll R$, podemos despreciar la fuerza centrífuga del teorema de Coriolis frente a la fuerza centrífuga de arrastre.

- Definimos la fuerza de gravedad efectiva como

$$\vec{g}_{efec} = -g \vec{k} - \vec{w}_T \times (\vec{w}_T \times \vec{R}_T)$$

con lo que

$$m \frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} = \vec{F}' + m \vec{g}_{efec} - 2m \vec{w}_T \times \vec{v}$$

Aparte de fuerzas externas y gravedad efectiva nos queda, pues, la fuerza de Coriolis. La magnitud de la gravedad efectiva depende de la latitud terrestre.

- Nota. Con la definición de gravedad efectiva podemos cambiar ligeramente la orientación del sistema de referencia móvil de manera que el eje Oz coincida con la dirección de la gravedad efectiva. Esta dirección coincide con la de una plomada, que no se dirige hacia el centro de la Tierra, es decir, no coincide exactamente con la perpendicular a la superficie.

$$\vec{g}_{efec} = -g_{efec} \vec{k}$$

- Nota. En un punto de colatitud $\theta = \frac{\pi}{2} - \text{lat.N} = \frac{\pi}{2} + \text{lat.S}$ la desviación de la plomada respecto de la perpendicular subtende un ángulo de $(w_T^2 R_T \sin \theta) / g \sim (0.03 \sin \theta) / g$
- En función de la colatitud, la velocidad angular terrestre se puede escribir como

$$\vec{w}_T = (w_T \sin \theta) \vec{j} + (w_T \cos \theta) \vec{k}$$

La fuerza de Coriolis es entonces

$$\begin{aligned} \vec{F}_{Coriol} &= -2m \vec{w}_T \times \vec{v} \\ &= 2m w_T \left[(v_y \cos \theta - v_z \sin \theta) \vec{i} - v_x \cos \theta \vec{j} + v_x \sin \theta \vec{k} \right] \end{aligned}$$

Para un movimiento en la superficie terrestre, las desviaciones debidas a Coriolis son en sentido de las agujas del reloj en el hemisferio norte y en sentido contrario en el hemisferio sur.

9.4 Caída Libre. Desviación hacia el Este

- Para la caída libre de un cuerpo de masa m tenemos

$$m \frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} = -mg_{efec} \vec{k} - 2m \vec{\omega}_T \times \vec{v}$$

En términos de las componentes vectoriales

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega_T (\dot{y} \cos \theta - \dot{z} \sin \theta) \\ \ddot{y} &= -2\omega_T \dot{x} \cos \theta \\ \ddot{z} &= -g_{efec} + 2\omega_T \dot{x} \sin \theta \end{aligned} \right\}$$

Hemos utilizado la notación de derivación $\frac{\delta x}{\delta t} \equiv \dot{x}$, etc.

- En aproximación de orden cero, hacemos $\omega_T = 0$ con lo que

$$\begin{aligned} \dot{x}_{(0)} &= 0 \\ \dot{y}_{(0)} &= 0 \\ \dot{z}_{(0)} &= -g_{efec} t \end{aligned}$$

- Sustituyendo esta solución en los segundos miembros de las ecuaciones de movimiento e integrándolas tenemos la solución de orden uno

$$\begin{aligned} x_{(1)} &= \frac{\omega_T}{3} g_{efec} t^3 \sin \theta \\ y_{(1)} &= 0 \\ z_{(1)} &= -\frac{1}{2} g_{efec} t^2 + h \end{aligned}$$

donde h es la altura de caída

- El tiempo de caída corresponde a $z_{(1)} = 0$, es decir, $t_{caida} = \sqrt{2h/g_{efec}}$, con lo que

$$x_{(1)caida} = \frac{2h\omega_T}{3} \sqrt{\frac{2h}{g_{efec}}} \sin \theta$$

Esta es la desviación hacia el Este (tanto en el hemisferio norte como en el hemisferio sur)

9.5 Péndulo de Foucault

- La fuerza de Coriolis en la superficie de la Tierra hace que el plano de oscilación de un péndulo gire sobre su eje de oscilación debido al movimiento de rotación de aquella (Jean Foucault, 1851). En el hemisferio Norte, el péndulo gira en el sentido de las agujas del reloj, mientras que en el hemisferio Sur lo hace en el sentido contrario.

- Considerando el movimiento de la "lenteja" del péndulo en el plano xy , la fuerza que mueve el péndulo es

$$\vec{F} = -m \frac{g_{efec}}{L} \vec{r}, \quad \text{con } \vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j}$$

Nos olvidamos del movimiento en el eje Oz .

- Considerando, además, la fuerza de Coriolis en el plano xy , tenemos las siguientes ecuaciones de movimiento acopladas

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2w_T \dot{y} \cos \theta + \frac{g_{efec}}{L} x &= 0 \\ \ddot{y} + 2w_T \dot{x} \cos \theta + \frac{g_{efec}}{L} y &= 0 \end{aligned}$$

Definiendo la variable compleja $\zeta = x + iy$, obtenemos la siguiente ecuación diferencial de lineal de segundo orden de una variable compleja

$$\ddot{\zeta} - i(2w_T \cos \theta) \dot{\zeta} + \frac{g_{efec}}{L} \zeta = 0$$

- La solución del movimiento se obtiene por los métodos usuales de resolución de ecuaciones diferenciales, resultando

$$\zeta(t) = A e^{-i(w_T \cos \theta)t} \cos \left(\sqrt{\frac{g_{efec}}{L}} t + \phi \right)$$

donde A y ϕ son constantes de integración. en la raíz cuadrada del argumento del coseno se ha considerado la aproximación $w_T^2 \ll g_{efec}/L$. Los movimientos $x(t)$ e $y(t)$ son las partes real e imaginaria de la solución $\zeta(t)$.

- El periodo usual de oscilación del péndulo es, pues, $T = 2\pi \sqrt{L/g_{efec}}$, mientras que la amplitud en los ejes x e y varia periodicamente con periodo

$$\tau = \frac{2\pi}{w_T |\cos \theta|}$$

Este es el periodo del giro del péndulo. En el Ecuador no hay giro, mientras que en los Polos el periodo de giro es el de rotación de la Tierra

10 Cinemática y Dinámica del Sólido

- 10.1 Definición y Grados de Libertad.
- 10.2 Rotación y Velocidad angular del sólido.
- 10.3 Rotación y ángulos de Euler.
- 10.4 Velocidad angular y ángulos de Euler.
- 10.5 Energía cinética del sólido: Tensor de inercia.
- 10.6 Estudio del Tensor de inercia
- 10.7 Movimiento del sólido.
- 10.8 Ecuaciones de Euler.
- 10.9 Soluciones estables del sólido libre.
- 10.10 Movimiento general del sólido libre.
- 10.11 Peonza simétrica libre.
- 10.12 Peonza simétrica pesada.

10.1 Definición y Grados de Libertad

- Definimos un sólido rígido como un sistema de puntos materiales (discreto o continuo) tal que la posición relativa entre ellos permanece invariable.
- Sistema de referencia ligado al sólido: Sea $S = OXYZ$ un sistema de referencia inercial. Definimos el sistema de referencia $S' = O'X'Y'Z'$, tal que, los puntos del sólido, en su movimiento, mantienen sus coordenadas fijas de él. Es decir este sistema de referencia se mueve con el sólido. En un determinado instante t , sean $\vec{r}(t)$ y $\vec{r}'(t)$ los vectores de posición de un punto del sólido respecto del sistema inercial y del ligado al sólido, respectivamente. Entonces

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t)$$

donde $\vec{R}(t) = \vec{OO'}$. Notar que las componentes del vector $\vec{r}'(t)$ cambian respecto del sistema inercial.

- Descomposición del movimiento del sólido (Euler-Chasles): Consideremos una rotación $\mathbb{R}(t)$ una rotación que nos "gira" la orientación del sistema S' en $t = 0$ a la orientación de S' en t . De esta manera, para cada punto del sólido podemos escribir

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \mathbb{R}(t) \{ \vec{r}'(t = 0) \}$$

Es decir, el movimiento del sólido se puede descomponer como una translación (que no cambia la orientación) mas una rotación. Según esta descomposición, el movimiento de un sólido rígido tiene seis grados de libertad. Tres traslacionales y tres rotacionales

- Recordemos las siguientes propiedades de una matriz de rotación

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^T \mathbb{R} &= \mathbb{R} \mathbb{R}^T = \mathbb{I} \\ \mathbb{R}^T &= \mathbb{R}^{-1} \\ \det \mathbb{R} &= +1\end{aligned}$$

10.2 Rotación y Velocidad angular del sólido

- El cambio de los vectores unitarios del sistema de referencia ligado al sólido \vec{e}'_i lo podemos expresar como

$$\frac{d\vec{e}'_i}{dt} = W_{ij} \vec{e}'_j, \quad i, j = 1, 2, 3$$

con índice i sumado (repetido en el mismo miembro de la igualdad), $\vec{e}'_i = \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$, y

$$\begin{aligned}W_{ij} &= \begin{pmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{pmatrix} \\ \vec{w} &= (w_1, w_2, w_3)\end{aligned}$$

siendo \vec{w} la velocidad angular instantánea del sistema de referencia ligado al sólido.

- Tenemos en cuenta que

$$\vec{e}'_i(t) = \mathbb{R}(t) \vec{e}_i = R_{ij}(t) \vec{e}_j$$

donde R_{ij} son los elementos de matriz de \mathbb{R} y \vec{e}_i son los vectores unitarios del sistema de referencia inercial. Entonces, derivando

$$\frac{d\vec{e}'_i}{dt} = \dot{R}_{ij} R_{jk}^T \vec{e}'_k = (\dot{\mathbb{R}} \mathbb{R}^T)_{ik} \vec{e}'_k$$

con índices j, k sumados

- Obtenemos, pues, la siguiente relación entre la rotación del sólido y su velocidad angular instantánea

$$W_{ij} = (\dot{\mathbb{R}} \mathbb{R}^T)_{ij}$$

Notar que $\mathbb{R} \mathbb{R}^T = \mathbb{I}$ asegura que $\dot{\mathbb{R}} \mathbb{R}^T$ es antisimétrica, como debe ser.

10.3 Rotación y ángulos de Euler

- Queremos describir una rotación que nos lleve de la orientación del sistema de referencia inercial S a la del sistema ligado al sólido S' . Para ello definimos la línea de nodos x_1 como la intersección de los planos xy y $x'y'$. Ahora, definimos las siguientes rotaciones con ejes definidos

$$\mathbb{R}_\phi(\text{eje } z) : xyz \rightarrow x_1y_1z \quad \text{con } \phi \in [0, 2\pi] \quad (\text{precesión})$$

$$\mathbb{R}_\theta(\text{eje } x_1) : x_1y_1z \rightarrow x_1y_2z' \quad \text{con } \theta \in [0, \pi] \quad (\text{nutación})$$

$$\mathbb{R}_\psi(\text{eje } z') : x_1y_2z' \rightarrow x'y'z' \quad \text{con } \psi \in [0, 2\pi] \quad (\text{espín})$$

ϕ, θ, ψ son los ángulos de Euler

- Explícitamente tenemos

$$\begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \mathbb{R}_\phi \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_2 \\ \vec{k}' \end{pmatrix} = \mathbb{R}_\theta \begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{pmatrix} = \mathbb{R}_\psi \begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_2 \\ \vec{k}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_2 \\ \vec{k}' \end{pmatrix}$$

- La rotación $\mathbb{R}(\phi, \theta, \psi) : S \rightarrow S'$ es pues

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(\phi, \theta, \psi) &= \mathbb{R}_\psi \mathbb{R}_\theta \mathbb{R}_\phi \\ &= \begin{pmatrix} c\phi c\psi - s\phi c\theta s\psi & s\phi c\psi + c\phi c\theta s\psi & s\theta s\psi \\ -c\phi s\psi - s\phi c\theta c\psi & -s\phi s\psi + c\phi c\theta c\psi & s\theta c\psi \\ s\phi s\theta & -c\phi s\theta & c\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

10.4 Velocidad angular y ángulos de Euler

- Recordemos la relación

$$\mathbb{W}(t) = \dot{\mathbb{R}}(t)\mathbb{R}^T(t)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= \mathbb{R}_\psi \mathbb{R}_\theta \mathbb{R}_\phi \\ \dot{\mathbb{R}} &= \dot{\mathbb{R}}_\psi \mathbb{R}_\theta \mathbb{R}_\phi + \mathbb{R}_\psi \dot{\mathbb{R}}_\theta \mathbb{R}_\phi + \mathbb{R}_\psi \mathbb{R}_\theta \dot{\mathbb{R}}_\phi \\ \mathbb{R}^T &= \mathbb{R}_\phi^T \mathbb{R}_\theta^T \mathbb{R}_\psi^T \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la propiedad $\mathbb{R}\mathbb{R}^T = \mathbb{I}$ obtenemos

$$\dot{\mathbb{R}}\mathbb{R}^T = \dot{\mathbb{R}}_\psi \mathbb{R}_\psi^T + \mathbb{R}_\psi \left(\dot{\mathbb{R}}_\theta \mathbb{R}_\theta^T \right) \mathbb{R}_\psi^T + \mathbb{R}_\psi \mathbb{R}_\theta \left(\dot{\mathbb{R}}_\phi \mathbb{R}_\phi^T \right) \mathbb{R}_\theta^T \mathbb{R}_\psi^T$$

- Haciendo operaciones con la expresión anterior, obtenemos las componentes de la velocidad angular instantánea del sólido

$$\begin{aligned} w_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ w_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ w_3 &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{aligned}$$

Estas son las componentes de \vec{w} en la base de referencia ligada al sólido.

- La velocidad angular instantánea del sólido se puede descomponer como suma de tres velocidades angulares instantáneas: la de precesión, la de nutación y la de espín

$$\vec{w} = \dot{\phi} + \dot{\theta} + \dot{\psi}$$

En efecto, usando las matrices de rotación asociadas a los ángulos de Euler tenemos

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \dot{\theta} \vec{i}_1 = \dot{\theta} (\cos \psi \vec{i}' - \sin \psi \vec{j}') \\ \dot{\phi} &= \dot{\phi} \vec{k} = \dot{\phi} (\sin \theta \sin \psi \vec{i}' + \sin \theta \cos \psi \vec{j}' - \cos \theta \vec{k}') \\ \dot{\psi} &= \dot{\psi} \vec{k}' \end{aligned}$$

También podemos expresar estas velocidades angulares en la base inercial.

10.5 Energía cinética del sólido: Tensor de inercia

- Consideremos un sólido discreto con masas m_α y posiciones $\vec{r}_\alpha = \vec{R} + \vec{r}'_\alpha$. La energía cinética es entonces

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^2 \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + M \dot{\vec{R}} \cdot (\vec{w} \times \vec{R}_{CM}) + \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^2 \end{aligned}$$

Si no hay movimiento de translación, $\vec{R} = 0$, sólo sobrevive el último término, que corresponde, pues, a la energía cinética de rotación

- Teniendo en cuenta la propiedad del algebra vectorial $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$, la energía cinética de rotación del sólido se puede escribir como sigue

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}')^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha}'^2 \delta_{ij} - r'_{\alpha i} r'_{\alpha j}) \omega_i \omega_j \end{aligned}$$

con índices i, j sumados.

- Definimos el tensor de Inercia \mathbb{I} aquel cuyas elementos de matriz en la base ligada al sólido son

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha}'^2 \delta_{ij} - r'_{\alpha i} r'_{\alpha j})$$

En notación matricial, la energía cinética de rotación es

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \mathbb{I} \vec{\omega}$$

- Tenemos los siguientes casos particulares de interés: a) Si $O = CM$, entonces

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_{CM}^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \mathbb{I}_{CM} \vec{\omega}$$

- b) Si O es fijo (no hay translación) entonces

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \mathbb{I}_O \vec{\omega}$$

- Para el momento angular total del sólido podemos hacer un desarrollo similar a la energía cinética. Encontramos

$$\vec{L} = M \left(\vec{R} \times \dot{\vec{R}}_{CM} + \vec{R}'_{CM} \times \dot{\vec{R}} \right) + \mathbb{I}_O \vec{\omega}$$

- a) Si $O = CM$ ($\vec{R}'_{CM} = 0$)

$$\vec{L} = M \vec{R}_{CM} \times \dot{\vec{R}}_{CM} + \mathbb{I}_{CM} \vec{\omega}$$

- b) Si O está fijo ($\dot{\vec{R}} = 0$)

$$\vec{L} = M \vec{R} \times \dot{\vec{R}}_{CM} + \mathbb{I}_O \vec{\omega}$$

Notar que, el momento lineal del sólido es siempre $\vec{P} = M \dot{\vec{R}}_{CM}$. Cuando O está fijo se puede elegir $O = O$ con lo que $\vec{L} = \mathbb{I}_O \vec{\omega}$

10.6 Estudio del Tensor de inercia

- Escribamos explícitamente los elementos de matriz del tensor de inercia en la base del sólido

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha} m_{\alpha}(y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha}x'_{\alpha}y'_{\alpha} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha}x'_{\alpha}z'_{\alpha} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha}x'_{\alpha}y'_{\alpha} & \sum_{\alpha} m_{\alpha}(x_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) & -\sum_{\alpha} m_{\alpha}y'_{\alpha}z'_{\alpha} \\ -\sum_{\alpha} m_{\alpha}x'_{\alpha}z'_{\alpha} & -\sum_{\alpha} m_{\alpha}y'_{\alpha}z'_{\alpha} & \sum_{\alpha} m_{\alpha}(x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) \end{pmatrix}$$

Vemos que es un tensor simétrico y por tanto diagonalizable

- Para un sólido continuo

$$I_{ij} = \iiint \rho(r^2 \delta_{ij} - x'_i x'_j) dv$$

donde ρ es la densidad en cada punto del sólido y dv es el elemento de volumen. Hemos cambiado la notación r'_i por x'_i

- Si la dirección de la velocidad angular es fija, entonces elegimos $\vec{w} = w \vec{k}'$. La energía cinética de rotación es entonces

$$T_{rot} = \frac{1}{2} I_{33} w^2$$

$$I_{33} = \sum_{\alpha} m_{\alpha}(x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2$$

donde d_{α} es la distancia de la masa m_{α} al eje de rotación

- Si diagonalizamos el tensor de inercia, con autovalores I_1, I_2, I_3 , la energía cinética de rotación se escribe como sigue

$$T_{rot} = \frac{1}{2} (I_1 w_1^2 + I_2 w_2^2 + I_3 w_3^2)$$

Los autovalores I_1, I_2, I_3 , se denominan momentos principales de inercia. Los autovectores constituyen los ejes principales de inercia

- Propiedad: El valor de un momento principal de inercia es siempre menor o igual que la suma de los otros dos. La igualdad se cumple sólo si el sólido es plano, en cuyo caso el momento principal en la dirección perpendicular al plano es igual a la suma de los otros dos.
- Clasificación:

Peonza asimétrica	: 3 momentos principales distintos
Peonza simétrica	: 2 momentos principales iguales
Peonza esférica	: 3 momentos principales iguales

Un cubo es una peonza esférica con respecto al sistema ligado al sólido en el centro de masas.

- Teorema de los ejes desplazados (con respecto al CM): Sea $\vec{R} = \vec{R}_{CM} + \vec{a}$, entonces los elementos de matriz del tensor de inercia se transforman como sigue

$$I_{ij} = (I_{CM})_{ij} + M(a^2 \delta_{ij} - a_i a_j)$$

En la demostración basta considerar en el tensor de inercia que $\vec{r}' = \vec{r}_{CM} - \vec{a}$

- Teorema de Steiner: En el caso particular de un sólido girando alrededor de un eje principal (\vec{k}), entonces solo hay un momento de inercia relevante en el movimiento I_3 . El teorema de los ejes desplazados se escribe ahora

$$I_3 = I_{CM} + M(a_1^2 + a_2^2) = I_{CM} + Md^2$$

donde d es la distancia entre el eje de rotación y el eje desplazado que pasa por el CM.

10.7 Movimiento del sólido

- Queremos resolver el movimiento del sólido en un sistema de fuerzas con determinadas condiciones iniciales. Debemos plantear las ecuaciones que nos lleven a conocer el movimiento translacional $\vec{R}(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$ y el movimiento de rotación $\mathbb{R}(\phi(t), \theta(t), \psi(t))$. Como paso intermedio en el movimiento de rotación (primera integración), nos plantearemos la obtención de velocidad angular $\vec{\omega}(t) = \dot{\phi}(t) + \dot{\theta}(t) + \dot{\psi}(t)$.
- Formulación Newtoniana. Consideremos el sistema de referencia ligado al sólido con origen $O = CM$. Tenemos, entonces que

$$\begin{aligned}\vec{P} &= M \dot{\vec{R}}_{CM} \\ \vec{L} &= \vec{R}_{CM} \times \vec{P} + \vec{L}_{CM}\end{aligned}$$

donde $\vec{L}_{CM} = \mathbb{I}_{CM} \vec{\omega}$. Dada la fuerza total externa y el momento de la fuerza con respecto al CM tenemos

$$\begin{aligned}M \ddot{\vec{R}}_{CM} &= \vec{F} \\ \frac{d \vec{L}_{CM}}{dt} &= \vec{N}_{CM}\end{aligned}$$

Para la última ecuación hay que tener en cuenta el principio de acción reacción entre dos partículas cualesquiera del sólido (como vimos en general para los sistemas de partículas). Estas seis ecuaciones escalares, nos resuelven los seis grados de libertad del sólido. Notar, sin embargo, que el momento de la fuerza externa depende en general de la posición del sólido, por lo que la resolución del movimiento es altamente no trivial.

- Formulación Lagrangiana. Con $O = CM$ tenemos que

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_{CM}^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \mathbb{I}_{CM} \vec{\omega} \\ &= \frac{1}{2} M \left(\dot{X}_{CM}^2 + \dot{Y}_{CM}^2 + \dot{Z}_{CM}^2 \right) + T_{rot}(\phi, \theta, \psi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}) \\ U &= U(X_{CM}, Y_{CM}, Z_{CM}, \phi, \theta, \psi) \end{aligned}$$

Con un punto fijo $O = O$, sólo hay energía cinética de rotación y la energía potencial sólo depende de los ángulos de Euler. Las ecuaciones de movimiento se obtienen a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

10.8 Ecuaciones de Euler

- Vamos a desarrollar la ecuación de movimiento

$$\frac{d \vec{L}}{dt} = \vec{N}, \quad \text{donde} \quad \vec{L} = \mathbb{I} \vec{\omega}$$

Expresaremos esta ecuación en el sistema de referencia ligado al sólido. Recordemos que

$$\frac{d \vec{L}}{dt} = \frac{\delta \vec{L}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

Utilizando el sistema de ejes principales $\vec{i}_P, \vec{j}_P, \vec{k}_P$, tenemos

$$\begin{aligned} \vec{L} &= I_1 w_1 \vec{i}_P + I_2 w_2 \vec{j}_P + I_3 w_3 \vec{k}_P \\ \frac{\delta \vec{L}}{\delta t} &= I_1 \dot{w}_1 \vec{i}_P + I_2 \dot{w}_2 \vec{j}_P + I_3 \dot{w}_3 \vec{k}_P \\ \vec{N} &= N_1 \vec{i}_P + N_2 \vec{j}_P + N_3 \vec{k}_P \end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento para las componentes de \vec{L} son, entonces

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{w}_1 + (I_3 - I_2) w_2 w_3 &= N_1 \\ I_2 \dot{w}_2 + (I_1 - I_3) w_1 w_3 &= N_2 \\ I_3 \dot{w}_3 + (I_2 - I_1) w_1 w_2 &= N_3 \end{aligned} \right\}$$

Estas son las ecuaciones de Euler para las componentes de la velocidad angular instantánea en el sistema de referencia ligado al sólido.

- Ya hemos comentado la dependencia del momento de fuerzas con la orientación del sólido, así que la resolución de las ecuaciones de Euler no es trivial. En el caso de momento de fuerzas nulo, $\vec{N} = 0$, la solución se obtiene en términos de integrales elípticas.

- Con $\vec{N} = 0$, para que $\vec{w} = cte$ sea solución de las ecuaciones de Euler es necesario que \vec{w} sea paralelo a un eje principal del sólido. En efecto, analicemos las igualdades

$$(I_2 - I_3) w_2 w_3 = (I_1 - I_3) w_1 w_3 = (I_2 - I_1) w_1 w_2 = 0$$

Si I_1, I_2, I_3 son distintos entonces necesariamente dos componentes de \vec{w} se anulan.

Si $I_1 = I_2 \neq I_3$ entonces $w_3 = 0$ ó $w_1 = w_2 = 0$. En el primer caso ($w_3 = 0$) cualquier eje en el plano 12 es principal.

Si $I_1 = I_2 = I_3$ cualquier eje es principal y cualquier valor de \vec{w} es solución.

10.9 Soluciones estables del sólido libre

- Consideremos un sólido asimétrico $I_1 < I_2 < I_3$. Hemos analizado que en ausencia de fuerzas (ó momentos de fuerzas) existen soluciones del movimiento con velocidad angular $\vec{w} = cte$ alrededor de los ejes principales. Vamos a demostrar que las soluciones alrededor de \vec{i}_P, \vec{k}_P son estables, mientras que la solución alrededor de \vec{j}_P es inestable (teorema de la raqueta de tenis).
- Consideremos una perturbación alrededor de \vec{i}_P : $\vec{w} = w_1 \vec{i}_P$ con $w_{2,3} = \varepsilon_{2,3}$. Las ecuaciones de Euler en ausencia de momentos son, entonces

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{w}_1 + (I_3 - I_2) \varepsilon_2 \varepsilon_3 &= 0 \\ I_2 \dot{\varepsilon}_2 + (I_1 - I_3) w_1 \varepsilon_3 &= 0 \\ I_3 \dot{\varepsilon}_3 + (I_2 - I_1) w_1 \varepsilon_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

De la primera ecuación obtenemos la solución aproximada $w_1 \simeq cte + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Derivando las otras dos ecuaciones y sustituyendo en ellas mismas obtenemos las ecuaciones de la perturbación

$$\ddot{\varepsilon}_k + a^2 \varepsilon_k = 0, \quad k = 2, 3$$

donde

$$a^2 = \frac{(I_3 - I_1)(I_2 - I_1)}{I_2 I_3} w_1^2 > 0$$

Debido al signo > 0 las soluciones de la perturbación son tipo oscilador (alrededor de la solución estable)

- Para una perturbación alrededor de \vec{k}_P : $\vec{w} = w_3 \vec{k}_P$ con $w_{1,2} = \varepsilon_{1,2}$, obtenemos la solución aproximada $w_3 \simeq cte + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Las ecuaciones de la perturbación son

$$\ddot{\varepsilon}_k + b^2 \varepsilon_k = 0, \quad k = 1, 2$$

donde

$$b^2 = \frac{(I_1 - I_3)(I_2 - I_3)}{I_1 I_2} w_3^2 > 0$$

Otra vez, debido al signo > 0 , las soluciones de la perturbación son tipo oscilador (alrededor de la solución estable)

- Para una perturbación alrededor de \vec{j}_P : $\vec{w} = w_2 \vec{j}_P$ con $w_{1,3} = \varepsilon_{1,3}$, obtenemos la solución aproximada $w_2 \simeq cte + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Las ecuaciones de la perturbación son

$$\ddot{\varepsilon}_k + c^2 \varepsilon_k = 0, \quad k = 1, 3$$

donde

$$c^2 = \frac{(I_1 - I_2)(I_3 - I_2)}{I_1 I_3} w_2^2 < 0$$

Ahora, debido al signo < 0 , las soluciones de la perturbación no son de tipo oscilador sino de tipo exponencial, con lo que transcurrido un tiempo $t \sim 1/c$, la perturbación se hace grande y la solución $w_2 \simeq cte$ es, por tanto, inestable.

10.10 Movimiento general del sólido libre

- Vamos a describir cualitativamente el movimiento general del sólido libre mediante la llamada *imagen de Poinsot*, en la que se utiliza un nuevo concepto ligado al movimiento del sólido que es el *elipsoide de inercia*.
- En el movimiento del sólido libre, T y \vec{L} son constantes de movimiento. Podemos elegir el sistema inercial tal que $O = CM$. En el sistema de ejes principales ligados al sólido tenemos que

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (I_1 w_1^2 + I_2 w_2^2 + I_3 w_3^2) \\ \vec{L} &= (I_1 w_1, I_2 w_2, I_3 w_3) \end{aligned}$$

La primera ecuación, con respecto a las componentes de la velocidad angular, es un elipsoide de semiejes $\sqrt{2T/I_k}$ (elipsoide de inercia). Los puntos de su superficie constituyen el lugar geométrico de los posibles valores de \vec{w}

- Curva *polodia*. La solución de las ecuaciones de Euler para \vec{w} , con determinadas condiciones iniciales, será una determinada curva sobre la superficie del elipsoide de inercia: La polodia
- Curva *herpolodia*. Observemos que el momento angular se puede escribir como el gradiente de la energía cinética con respecto a las componentes de la velocidad angular

$$\vec{L} = \vec{\nabla}_w T(w_k)$$

Por un lado, \vec{L} es perpendicular en cada instante a la superficie del elipsoide de inercia en el punto correspondiente de la polodia. Por otro lado $\vec{L} = cte$ define un plano tangente al elipsoide, que permanece fijo con el tiempo. Por tanto, el elipsoide de inercia se mueve con el tiempo de manera que la polodia va contactando el plano tangente. La curva que se va "grabando" en el plano tangente se llama herpolodia. El movimiento del elipsoide de inercia en ese "grabado" es precisamente el movimiento del sólido.

10.11 Peonza simétrica libre

- Tenemos un sólido simétrico con $I = I_1 = I_2 \neq I_3$, en ausencia de momentos externos, $\vec{N} = 0$. Las ecuaciones de Euler son

$$\left. \begin{aligned} I\dot{w}_1 &= (I - I_3)w_2w_3 \\ I\dot{w}_2 &= (I_3 - I)w_1w_3 \\ I_3\dot{w}_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

- Solución del movimiento. De la última ecuación obtenemos la solución

$$w_3(t) = cte$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos las soluciones oscilatorias

$$\begin{aligned} w_1(t) &= A \cos(\Omega t + \delta) \\ w_2(t) &= A \sin(\Omega t + \delta) \end{aligned}$$

donde A y δ son constantes de integración, tales que $w_1(0) = A \cos \delta$ y $w_2(0) = A \sin \delta$. Además,

$$\Omega = \frac{I_3 - I}{I} w_3$$

Notar que $\vec{w}^2 = w_3^2 + A^2 = cte$. Es decir, la velocidad angular \vec{w} realiza un movimiento de precesión alrededor del eje móvil \vec{k}_P con módulo constante (cono polodio).

- Para comprender el movimiento del sólido, o el de los ejes ligados a él, recordemos que para el movimiento libre $\vec{L} = cte$. Además, podemos escribir

$$\begin{aligned} \vec{L} &= I(w_1 \vec{i}_P + w_2 \vec{j}_P) + I_3 w_3 \vec{k}_P \\ &= I \vec{w} + (I_3 - I) w_3 \vec{k}_P \end{aligned}$$

Es decir, \vec{L} , \vec{w} y \vec{k}_P están en un mismo plano, que gira alrededor de \vec{L} , manteniendo fijas sus posiciones relativas en el plano. El cono fijo que describe \vec{w} alrededor de \vec{L} se llama cono espacial.

- El movimiento del sólido se obtiene "rodando" sin deslizar el cono polodio sobre el cono espacial. El ángulo del cono polodio está dado por

$$\tan \alpha_{pol} = |A| / w_3$$

El ángulo del eje de la peonza respecto del eje fijo $\vec{L} = cte$ está dado por

$$\tan \theta = I |A| / I_3 w_3$$

El ángulo del cono espacial es $\alpha_{esp} = |\theta - \alpha_{pol}|$

- Teniendo en cuenta la descomposición siguiente de \vec{w}

$$\vec{w} = \frac{L}{I} \vec{u}_L - \Omega \vec{k}_P$$

Por tanto, el movimiento de la peonza consta de una rotación alrededor de \vec{L} (precesión de todos los ejes móviles) con frecuencia L/I y una rotación alrededor del eje de la peonza con frecuencia $-\Omega = (I - I_3) w_3 / I$

- Considerando ángulos de Euler tenemos que el movimiento de la peonza libre es por tanto (con $\vec{u}_L = \vec{k}$)

$$\dot{\theta} = 0, \dot{\psi} = -\Omega, \dot{\phi} = \frac{L}{I}$$

10.12 Peonza simétrica pesada

- Consideremos una peonza en rotación bajo la acción del campo gravitatorio, manteniendo un punto fijo $O = O'$ (el vértice de la peonza). La energía potencial de la peonza es

$$U = g \sum m_\alpha z_\alpha = Mgl \cos \theta$$

donde M es la masa total, l la distancia desde O al CM y θ el ángulo entre los ejes \vec{k} y \vec{k}_P . En función de los ángulos de Euler el Lagrangiano del movimiento es

$$\mathcal{L} = \frac{I}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{I_3}{2} \left(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right)^2 - Mgl \cos \theta$$

Ahora hay un par de fuerzas originado por la gravedad y la fuerza de reacción en el vértice así que el momento angular \vec{L} no es constante y por tanto esperamos movimiento de nutación.

- Las coordenadas ψ, ϕ son cíclicas así que sus momentos conjugados son constantes de movimiento

$$\pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = I_3 w_3 = cte$$

$$\pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = I \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 w_3 \cos \theta = cte$$

- Definiendo las constantes de movimiento

$$a = \frac{I_3 w_3}{I}, \quad b = \frac{\pi_\phi}{I}$$

y teniendo en cuenta, de la relación de π_ϕ , que

$$\dot{\phi} = \frac{b - a \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

la conservación de la energía se puede escribir como sigue

$$E - \frac{I_3}{2} w_3^2 = \frac{I}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{I}{2} \frac{(b - a \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + Mgl \cos \theta$$

Esta ecuación diferencial nos resuelve el movimiento $\theta(t)$. Para $\dot{\theta} = 0$ obtenemos una ecuación cúbica en $\cos \theta$ de manera que las soluciones de $\cos \theta$ entre ± 1 constituyen los ángulos de retroceso del movimiento de nutación. Si prescindimos de la gravedad y consideramos $O = CM$, se puede comprobar que la solución del movimiento libre $\dot{\theta} = 0$, $\dot{\psi} = -\Omega$, $\dot{\phi} = L/I$, efectivamente satisface la ecuación diferencial de θ con $\cos \theta = I_3 w_3 / L$.

11 Introducción a los Medios Elásticos

11.1 Coeficientes elásticos.

11.2 Tensiones y deformaciones. Ecuaciones de Lamé.

11.3 Ecuación de ondas en medios elásticos.

11.4 Ondas longitudinales y transversales

11.1 Coeficientes elásticos

- Llamaremos sólido elástico aquel que se deforma cuando se le somete a un esfuerzo exterior y recupera su forma cuando cesa el esfuerzo. En general, el régimen elástico se tiene para pequeñas deformaciones. Cuando las deformaciones no se recuperan se dice que el sólido está en régimen plástico, hasta que se produce la rotura.
- Consideraremos sólidos homogéneos e isotópicos. Es decir, para los que las fuerzas aplicadas en un volumen elemental del sólido, producen las mismas deformaciones, independientemente de la posición y orientación de dicho volumen elemental.
- Llamaremos deformación lineal Δl , aquella que cambia la forma del sólido en una dirección. El esfuerzo F necesario para ocasionar dicha deformación viene dado por la ley de Hooke

$$F = k \Delta l \quad (\text{ley de Hooke})$$

$$k = \text{coeficiente de rigidez}$$

El coeficiente de rigidez k depende de las propiedades y geometría del sólido.

- Módulo de Young. Consideremos un sólido de longitud l y sección uniforme S . Al aplicar una fuerza de tracción sobre la superficie, se producirá una variación de la longitud Δl . Definimos el módulo de Young E tal que

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}$$

Es decir, E nos da la relación entre la fuerza aplicada por unidad de superficie y la deformación relativa de la longitud.

- Coeficiente de Poisson. Al deformar la longitud, la anchura también se deforma. Definimos el coeficiente de Poisson ν como la relación entre la variación relativa de la anchura a y la variación relativa de la longitud. Es decir

$$\nu = -\frac{\Delta a/a}{\Delta l/l} = -E \frac{S}{F} \frac{\Delta a}{a}$$

Notar que en ese caso la deformación es transversal a la fuerza aplicada. El signo menos indica que hay disminución de la anchura. El coeficiente ν es adimensional y menor que la unidad (frecuentemente $\nu \ll 1$)

- Módulo de compresibilidad. Un sólido elástico sumergido en un fluido esta sometido a una presión P en toda su superficie tal que su volumen V cambia pero no su forma. Tenemos la siguiente relación

$$P = -Q \frac{\Delta V}{V}$$

donde Q es el módulo de compresibilidad. El signo menos indica que hay disminución de volumen. Razonando sobre un volumen elemental podemos obtener la relación

$$Q = -\frac{E}{3(1-2\nu)}$$

donde se ha utilizado que $P = -F/S$

- Módulo de rigidez (cizalladura). Si aplicamos una fuerza tangencial a la superficie de un sólido (fuerza de cizalla) se produce una "inclinación" o deformación angular α (sin cambio de volumen). Entonces

$$\frac{F}{S} = \mu_c \alpha$$

Se puede deducir que $\mu_c = E/2(1 + \nu)$.

11.2 Tensiones y deformaciones. Ecuaciones de Lamé

- Tensor de tensiones. Consideremos el volumen elemental en un punto arbitrario del sólido. Supongamos que en cada superficie de dicho volumen elemental actúan las tensiones (fuerzas por unidad de superficie) σ_{ij}

$$\sigma_{ij} = \frac{F_i}{S_j}$$

donde F_i es una fuerza en la dirección i actuando en la cara de superficie S_j . Las tensiones con $i = j$ son tensiones de tracción, mientras que con $i \neq j$ son tensiones de cizalla. Las cantidades σ_{ij} constituyen un tensor simétrico, llamado tensor de tensiones. (la asimetría de tensiones causa rotaciones, no deformaciones)

- Tensor de deformaciones. Las tensiones sobre el volumen elemental en un punto del sólido producen una serie de deformaciones relativas u_{ij} , cuyos valores constituyen un tensor simétrico, llamado tensor de deformaciones.

Las deformaciones con $i = j$ son longitudinales, mientras que las deformaciones con $i \neq j$ son angulares. Por ejemplo, las fuerzas tangenciales F_2 sobre la superficie elemental S_1 y F_1 sobre la superficie S_2 , producen deformaciones angulares α_{21} y α_{12} , respectivamente. Pero salvo rotaciones (que no deforman), podemos identificar $u_{12} = u_{21} = \frac{1}{2}(\alpha_{21} + \alpha_{12})$.

- Ecuaciones de Lamé. Queremos relacionar el tensor de tensiones con el de deformaciones, teniendo en cuenta los coeficientes elásticos del sólido. Suponemos que trabajamos con un volumen elemental situado según los ejes principales del tensor de tensiones. Solo actuarán tensiones de tracción σ_{ii}^P . Correspondientemente, solo habrán deformaciones longitudinales u_{ii}^P . En concreto, tenemos

$$\begin{aligned}u_{11}^P &= \frac{1}{E}\sigma_{11}^P - \frac{\nu}{E}(\sigma_{22}^P + \sigma_{33}^P) \\u_{22}^P &= \frac{1}{E}\sigma_{22}^P - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11}^P + \sigma_{33}^P) \\u_{33}^P &= \frac{1}{E}\sigma_{33}^P - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11}^P + \sigma_{22}^P)\end{aligned}$$

- Matricialmente podemos escribir

$$u_{ij}^P = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}^P - \frac{\nu}{E}(\text{tr } \sigma^P)\delta_{ij}$$

Teniendo en cuenta que la traza de una matriz es invariante al cambiar de ejes de referencia, concluimos que la relación anterior sirve no solo para los ejes principales y, por tanto, podemos omitir el superíndice P . Tomando la traza en la expresión anterior llegamos a la relación

$$\text{tr } \sigma = \frac{E}{1-2\nu}\text{tr } u$$

- Podemos despejar, ahora, las tensiones como función matricial de las deformaciones

$$\sigma_{ij} = 2\mu u_{ij} + \lambda(\text{tr } u)\delta_{ij}$$

Estas son las ecuaciones de Lamé, donde

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \equiv \mu_c$$

Estos son los llamados coeficientes de Lamé. Las ecuaciones de Lamé se pueden considerar como la ley de Hooke generalizada para sólidos elásticos.

11.3 Ecuación de ondas en medios elásticos

- Queremos describir las deformaciones en cada punto de un sólido elástico mediante una función vectorial $\vec{u}(\vec{x})$ (llamada función desplazamiento) tal que si un elemento $d\vec{x}$ del sólido se deforma en $d\vec{x}'$ entonces

$$d\vec{x}' = d\vec{x} + d\vec{u}$$

En términos de las componentes vectoriales, podemos escribir

$$dx'_i = dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k, \quad (\text{suma para } k)$$

Así pues, $\partial u_i / \partial x_i$ nos da la deformación longitudinal relativa y $\partial u_i / \partial x_k$ con $i \neq k$ la deformación angular α_{ik}

- Tenemos la siguiente relación entre el tensor de deformaciones y la función desplazamiento

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

- Queremos ahora encontrar la ecuación que nos describa la evolución temporal de los desplazamientos en el sólido para un determinado conjunto de deformaciones iniciales. Para ello, sea \vec{F} la fuerza total sobre las caras dS_k de un volumen elemental dV del sólido

$$F_i = \sum_k \left(\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dx_k \right) dS_k = \sum_k \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV, \quad (\text{suma para } k)$$

Por tanto, $\sum_k (\partial \sigma_{ik} / \partial x_k) = f_i$ es la componente i de la fuerza total sobre el elemento de volumen por unidad de volumen.

- Utilizando las ecuaciones de Lamé para las tensiones se llega fácilmente a

$$f_i = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \sum_k \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}$$

Por otro lado, la segunda ley de Newton relaciona las fuerzas f_i con los desplazamientos u_i

$$f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

donde ρ es la densidad del sólido. En notación vectorial, obtenemos finalmente

$$(\lambda + \mu) \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right) + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

Esta es la ecuación de movimiento para los desplazamientos $\vec{u}(\vec{x}, t)$

11.4 Ondas longitudinales y transversales

- Diremos que $\vec{u}(\vec{x}, t)$ es un desplazamiento transversal si $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$. Por ejemplo,

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = (u_x(z, t), u_y(z, t), 0)$$

es un desplazamiento transversal en un plano ortogonal al eje z . (onda plana transversal)

- La ecuación de movimiento para los desplazamientos transversales es

$$\mu \vec{\nabla}^2 \vec{u}_{tran} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}_{tran}}{\partial t^2}$$

- La velocidad de los desplazamientos transversales es

$$v_{tran} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

(de acuerdo con la interpretación de la ecuación de ondas)

- Diremos que $\vec{u}(\vec{x}, t)$ es un desplazamiento longitudinal si $\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$. Por ejemplo,

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = (0, 0, u_z(z, t))$$

es un desplazamiento longitudinal en un plano ortogonal al eje z . (onda plana longitudinal)

- Teniendo en cuenta que $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = \vec{\nabla}^2 \vec{u} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$, obtenemos la ecuación de movimiento

$$(\lambda + 2\mu) \vec{\nabla}^2 \vec{u}_{long} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}_{long}}{\partial t^2}$$

- La velocidad de los desplazamientos longitudinales es

$$v_{long} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

- Las velocidades de propagación se pueden expresar en términos del módulo de Young E y del coeficiente de Poisson ν . En particular si $\nu \ll 1$ entonces

$$v_{tran} \simeq \sqrt{\frac{E}{2\rho}} \quad \text{y} \quad v_{long} \simeq \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Por ejemplo, para el acero dulce $E = 21 \times 10^{10} \text{N/m}^2$, $\nu = 0.3$, $\rho = 0.9 \times 10^4 \text{Kg/m}^3$ con lo que $v_{tran} \simeq 3000 \text{m/s}$ y $v_{long} \simeq 5500 \text{m/s}$

- Velocidad del sonido: Podemos considerar la atmosfera como un medio elástico donde las ondas sonoras se propagan longitudinalmente. Para calcular la velocidad del sonido debemos fijar cual es el módulo de Young correspondiente. Consideremos un tubo de aire de seccion S sobre la que ejercemos un incremento de presión ΔP . Diferenciando la ecuación de Clapeyron $P V^\gamma = cte$ obtenemos

$$\Delta P = -\gamma P \frac{\Delta V}{V} = -\gamma P \frac{\Delta l}{l}$$

con lo que $E_{aire} = \gamma P$. Teniendo en cuenta que $P_{atm} = 1.013 \times 10^5 \text{N/m}^2$, $\rho_{atm} = 1.293 \text{Kg/m}^3$ y $\gamma_{atm} = 7/5$, obtenemos

$$v_{sonido} \simeq \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \simeq 332 \text{ m/s}$$

12 Oscilaciones Acopladas

12.1 Acoplamiento de dos osciladores.

12.2 Teoría general de pequeñas oscilaciones.

12.3 Molecula lineal triatómica.

12.4 Sistema de infinitos osciladores.

12.1 Acoplamiento de dos osciladores

- Consideremos dos masas $m_{1,2}$ acopladas en línea mediante tres muelles de longitudes (en reposo) $l_{1,2,3}$ y constantes recuperadoras $k_{1,2,3}$, respectivamente. Los extremos inicial y final de los muelles 1 y 3 están fijados a una distancia L . Para las posiciones $x_{1,2}$ de las masas, la energía potencial debida a los muelles será

$$V = \frac{k_1}{2} (l_1 - x_1)^2 + \frac{k_2}{2} (x_2 - x_1 - l_2)^2 + \frac{k_3}{2} (L - x_2 - l_3)^2$$

- Desarrollemos el potencial alrededor del equilibrio. Sean $x_{1,2}^0$ las posiciones de equilibrio, que verifican $(\partial V / \partial x_{1,2})_0 = 0$. Entonces

$$V = V_0 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1,2} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 (x_i - x_i^0) (x_j - x_j^0)$$

Sean $y_{1,2} = x_{1,2} - x_{1,2}^0$, las posiciones a partir del equilibrio, entonces

$$V = V_0 + \frac{k_1}{2} y_1^2 + \frac{k_2}{2} (y_2 - y_1)^2 + \frac{k_3}{2} y_2^2$$

Podemos elegir $V_0 = 0$, con lo que la energía potencial es la debida al cambio de longitud de los muelles con respecto al equilibrio.

- Consideremos el caso particular de dos masas iguales, $m_1 = m_2 = m$, y constantes recuperadoras de los muelles $k_1 = k_3 = k$ y $k_2 = k_{12}$. El lagrangiano del sistema es

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{y}_1^2 + \frac{m}{2} \dot{y}_2^2 - \frac{k}{2} y_1^2 - \frac{k_{12}}{2} (y_2 - y_1)^2 - \frac{k}{2} y_2^2$$

- Las ecuaciones de movimiento (a partir de Euler-Lagrange) están acopladas y se pueden escribir en forma matricial como

$$m \ddot{\vec{y}} = -\mathbb{A} \vec{y}$$

donde

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} k + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k + k_{12} \end{pmatrix}$$

- Para desacoplar las ecuaciones de movimiento, hagamos un cambio de coordenadas $\vec{y} = \mathbb{S}\vec{X}$ tal que $\mathbb{S}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{S} = \mathbb{A}_D$, donde \mathbb{A}_D es diagonal, cuyos elementos de la diagonal son los valores propios $\lambda_{1,2}$ de la matriz \mathbb{A}

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= k + 2k_{12} \equiv m w_1^2 \\ \lambda_2 &= k \equiv m w_2^2\end{aligned}$$

Los valores propios los utilizamos para definir las frecuencias angulares $w_{1,2}$. En función de las nuevas coordenadas \vec{X} tenemos las ecuaciones desacopladas

$$\ddot{\vec{X}} = -\frac{1}{m}\mathbb{A}_D\vec{X} = -\begin{pmatrix} w_1^2 & 0 \\ 0 & w_2^2 \end{pmatrix}\vec{X}$$

con soluciones de oscilador

$$\begin{aligned}X_1(t) &= a_1 \cos(w_1 t + \phi_1) \\ X_2(t) &= a_2 \cos(w_2 t + \phi_2)\end{aligned}$$

- La matriz de cambio de coordenadas tiene por columnas los vectores propios que resultan de la diagonalización de \mathbb{A}

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

con lo que las nuevas coordenadas $X_{1,2}$ verifican que

$$\begin{aligned}y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2) \\ y_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X_2 - X_1)\end{aligned}$$

- Las coordenadas $X_{1,2}$ se llaman coordenadas normales y las frecuencias

$$w_1 = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}}, \quad w_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

son las frecuencias normales de oscilación (modos normales). El movimiento de cada masa es combinación de modos normales de oscilación.

- Modo antisimétrico de oscilación: $y_1(0) = -y_2(0)$, $\dot{y}_1(0) = -\dot{y}_2(0) \implies X_2(t) = 0$, $X_1(t) \neq 0$.
- Modo simétrico de oscilación: $y_1(0) = y_2(0)$, $\dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) \implies X_1(t) = 0$, $X_2(t) \neq 0$.

12.2 Teoría general de pequeñas oscilaciones

- Consideremos un sistema de N masas puntuales con n grados de libertad independientes, q_j , relacionados con las coordenadas cartesianas por $x_\alpha = x_\alpha(q_1, q_2, \dots, q_n)$ con $\alpha = 1, 2, \dots, 3N$. Sea $(q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0)$ la posición de equilibrio del sistema y $\eta_i = q_i - q_i^0$ las posiciones a partir del equilibrio.
- Tenemos el siguiente desarrollo de la energía potencial V

$$V(q_1, \dots, q_n) \simeq V_0 + \left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_0 \eta_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \eta_i \eta_j + \dots (\text{suma } i, j)$$

Pero $(\partial V / \partial q_i)_0 = 0$. Además, podemos fijar $V_0 = 0$ y definir $V_{ij} = (\partial^2 V / \partial q_i \partial q_j)_0$, con lo que

$$V = \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j \quad (\text{suma } i, j)$$

Las cantidades V_{ij} forman una matriz simétrica definida positiva, que se puede diagonalizar.

- Para la energía cinética tenemos

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial q_i} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j \simeq \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j \quad (\text{suma } i, j)$$

donde $T_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\frac{\partial x_{\alpha}}{\partial q_i} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial q_j}\right)_0$. Las cantidades T_{ij} forman, también, una matriz simétrica definida positiva.

- El lagrangiano del sistema es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j$$

que nos lleva a las siguientes ecuaciones de movimiento (en forma matricial)

$$\mathbb{T} \ddot{\vec{\eta}} + \mathbb{V} \vec{\eta} = 0$$

donde hemos definido el vector $\vec{\eta}$ y las matrices simétricas \mathbb{T} y \mathbb{V} . Las ecuaciones anteriores forman un sistema de ecuaciones diferenciales (acopladas) con coeficientes constantes.

- Para desacoplar las ecuaciones de movimiento, escribimos

$$\ddot{\vec{\eta}} + \mathbb{T}^{-1} \mathbb{V} \vec{\eta} = 0$$

y diagonalizamos $\mathbb{T}^{-1} \mathbb{V}$. Sea \mathbb{A} tal que $\mathbb{A}^{-1} (\mathbb{T}^{-1} \mathbb{V}) \mathbb{A} = \mathbb{W}_D$ siendo \mathbb{W}_D diagonal con valores propios w_k^2 . Notar que $\mathbb{T}^{-1} \mathbb{V}$ ya no es simétrica, por lo que \mathbb{A} no es una matriz ortogonal.

- Para obtener la matriz \mathbb{A} utilizaremos las ecuaciones de valores y vectores propios

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\mathbb{V} - w^2 \mathbb{T}) \\ \mathbb{V} \vec{v}_k &= w_k^2 \mathbb{T} \vec{v}_k \end{aligned}$$

Las columnas de la matriz \mathbb{A} son precisamente los vectores propios \vec{v}_k , que están fijados salvo la condición de normalización. Notar que como \mathbb{A} no es ortogonal, los vectores propios no son ortogonales entre sí.

- Para fijar la normalización. Tengamos en cuenta que $\mathbb{T}^{1/2} (\mathbb{T}^{-1} \mathbb{V}) \mathbb{T}^{-1/2} = \mathbb{T}^{-1/2} \mathbb{V} \mathbb{T}^{-1/2}$ es una matriz simétrica. Por tanto la podemos diagonalizar mediante una matriz ortogonal \mathbb{U} , tal que $\mathbb{U}^{-1} \mathbb{T}^{1/2} (\mathbb{T}^{-1} \mathbb{V}) \mathbb{T}^{-1/2} \mathbb{U} = \mathbb{W}_D$. Vemos pues que $\mathbb{A} = \mathbb{T}^{-1/2} \mathbb{U}$. Encontramos así la siguiente condición de normalización

$$\mathbb{A}^T \mathbb{T} \mathbb{A} = \mathbb{I}$$

- Definimos ahora las coordenadas normales \vec{Q}

$$\vec{\eta} = \mathbb{A} \vec{Q}$$

que verifican las ecuaciones de movimiento desacopladas

$$\ddot{\vec{Q}} + \mathbb{W}_D \vec{Q} = 0$$

con soluciones de oscilador

$$Q_k(t) = c_k \cos(w_k t + \phi_k)$$

- Energía de oscilación. La energía del sistema la podemos escribir en forma matricial como sigue

$$E = \frac{1}{2} \left(\dot{\vec{\eta}}^T \mathbb{T} \dot{\vec{\eta}} + \vec{\eta}^T \mathbb{V} \vec{\eta} \right)$$

Pasando a coordenadas normales y utilizando la condición de normalización $\mathbb{A}^T \mathbb{T} \mathbb{A} = \mathbb{I}$ y, consecuentemente, $\mathbb{A}^T \mathbb{V} \mathbb{A} = \mathbb{W}_D$ obtenemos

$$E = \frac{1}{2} \sum_k w_k^2 c_k^2$$

Es decir, la energía del sistema es la suma de las energías de oscilación de los modos normales

12.3 Molécula lineal triatómica

- Consideremos el movimiento en una dimensión de un sistema de tres masas mMm conectadas entre sí por dos muelles con constante recuperadora k . La energía potencial del sistema es

$$V = \frac{k}{2} (\eta_2 - \eta_1)^2 + \frac{k}{2} (\eta_3 - \eta_2)^2$$

donde $\eta_{1,2,3}$ son los desplazamientos respecto de la posición de equilibrio de las masas m, M, m respectivamente. La matriz energía potencial $(V_{ij} = \partial^2 V / \partial \eta_i \partial \eta_j)_0$ es

$$\mathbb{V} = k \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- La energía cinética del sistema es

$$T = \frac{m}{2} (\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2) + \frac{M}{2} \dot{\eta}_3^2$$

La matriz asociada es pues

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

- De la ecuación de valores propios $\det(\mathbb{V} - w^2 \mathbb{T}) = 0$ se obtiene

$$w_1 = 0, \quad w_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad w_3 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$$

- De la ecuación de valores propios $\mathbb{V} \vec{v}_k = w_k^2 \mathbb{T} \vec{v}_k$ y de la condición de normalización $\mathbb{A}^T \mathbb{T} \mathbb{A} = \mathbb{I}$, se obtiene la matriz de diagonalización \mathbb{A}

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{2m(1+\frac{2m}{M})}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & 0 & -\frac{2m/M}{\sqrt{2m(1+\frac{2m}{M})}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & -\frac{1}{\sqrt{2m}} & \frac{1}{\sqrt{2m(1+\frac{2m}{M})}} \end{pmatrix}$$

Las columnas de la matriz \mathbb{A} son los vectores propios: $(\vec{v}_k)_i = A_{ik}$

- Los modos normales de vibración están asociados a las coordenadas normales $Q_{1,2,3}$: $\vec{\eta} = \mathbb{A} \vec{Q}$. Tenemos las siguientes interpretaciones:
 - 1) $Q_1(t) \neq 0$ (con $Q_{2,3} = 0$) $\implies \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 \implies$ Modo translacional ($w_1 = 0$)
 - 2) $Q_2(t) \neq 0$ (con $Q_{1,3} = 0$) $\implies \eta_1 = -\eta_3, \eta_2 = 0 \implies$ Modo vibracional ($w_2 = \sqrt{k/m}$)

3) $Q_3(t) \neq 0$ (con $Q_{1,2} = 0$) $\implies \eta_1 = \eta_3, \eta_2 = -\frac{2m}{M}\eta_{1,3} \implies$ Modo vibracional ($w_2 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right)}$)

12.4 Sistema de infinitos osciladores

- Consideremos un sistema de longitud fija formado por n masas iguales acopladas en una dimensión por $n + 1$ muelles de constante recuperadora k . Si $y_{1,\dots,n}$ son los desplazamientos respecto de la posición de equilibrio entonces, la energía potencial es

$$V = \frac{k}{2} [y_1^2 + (y_2 - y_1)^2 + \dots + (y_n - y_{n-1})^2]$$

mientras que la energía cinética es

$$T = \frac{m}{2} \left(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dots + \dot{y}_n^2 \right)$$

- Las ecuaciones de movimiento son

$$m \ddot{y}_i + k(2y_i - y_{i-1} - y_{i+1}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

donde incluimos las condiciones de contorno $y_0 = y_{n+1} = 0$. Tenemos un conjunto de n ecuaciones acopladas que podemos resolver diagonalizando la matriz potencial y obteniendo los modos normales.

- Consideremos ahora un medio elástico en una dimensión. Lo podemos asemejar a un conjunto de infinitas masas diferenciales dm situadas en las posiciones de equilibrio dadas por sus coordenadas x . La oscilación de una de estas masas alrededor del equilibrio estará descrita por una función $y(x, t)$ de manera que podemos hacer las siguientes sustituciones, respecto del sistema de n masas oscilando:

$$m_i \rightarrow dm(x)$$

$$y_i \rightarrow y(x)$$

$$(y_i - y_{i-1}) - (y_{i+1} - y_i) = dy(x) - dy(x + dx) = -\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} (dx)^2$$

- La ecuación de las deformaciones en el medio elástico (como sistema de osciladores) es entonces

$$\frac{dm}{dx} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = 0$$

Supongamos que cada sistema lineal de osciladores tiene una sección transversal S . Tenemos entonces que la densidad del medio es

$$\rho = \frac{dm}{dv} = \frac{1}{S} \frac{dm}{dx}$$

Por otro lado, en un elemento dx del medio tenemos la siguiente relación entre las fuerzas y las deformaciones

$$\frac{F}{S} = E \frac{dy}{dx}, \text{ donde } F = k dy$$

siendo E el módulo de Young. Tenemos, pues, que $k dx / S = E$. Dividiendo por S la ecuación de movimiento de las deformaciones y utilizando las definiciones de ρ y E , obtenemos finalmente que

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

que es la ecuación de propagación de ondas longitudinales en un medio elástico (con coeficiente de Poisson nulo).

13 Ondas

13.1 Ondas en una dimensión. Ecuación de ondas.

13.2 Soluciones estacionarias y armónicas.

13.3 Paquetes de ondas. Velocidad de grupo

13.4 Reflexión y transmisión de ondas.

13.5 Ondas en el espacio.

13.1 Ondas en una dimensión. Ecuación de ondas

- Ecuación de ondas. Consideremos una perturbación $\Psi(x, t)$ que varía con el tiempo t en cada punto x del espacio. En general, las variaciones de Ψ en un punto no son independientes de las que suceden en los puntos vecinos. La función $\Psi(x, t)$ satisface una ecuación en derivadas parciales que se llama ecuación de ondas. Para las ondas "clásicas" tenemos la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

Veremos, que las ondas clásicas son ondas progresivas que se propagan con velocidades $\pm v$, en medios no dispersivos.

- Llamamos onda progresiva a izquierdas/derechas, $\Psi_{\mp}(x \pm vt)$, a las que dependen de x, t a través del argumento $x \pm vt$. En efecto, la perturbación Ψ_{\mp} se propaga, obviamente, hacia los puntos que cumplen la condición $x \pm vt = cte$. Diferenciando esta condición tenemos que $dx/dt = \mp v$. Es decir, $\mp v$ es la velocidad de propagación de la onda.
- Veamos que si $\Psi(x, t)$ es una onda progresiva, necesariamente verifica la ecuación de ondas. En efecto, consideremos

$$\Psi(x, t) = \Psi_+(x - vt) + \Psi_-(x + vt)$$

Llamando $a = x - vt$, $b = x + vt$, entonces $\Psi = \Psi_+(a) + \Psi_-(b)$. Diferenciando respecto de x, t a través de a, b obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= \left(\frac{\partial^2 \Psi_+}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \Psi_-}{\partial b^2} \right) v^2 \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \Psi_+}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \Psi_-}{\partial b^2} \end{aligned}$$

de donde se sigue la ecuación de ondas

- Veamos ahora que para que $\Psi(x, t)$ sea una onda progresiva es suficiente que satisfaga la ecuación de ondas. En efecto, teniendo en cuenta que la regla de la cadena de las derivadas parciales obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2} - 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a \partial b} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial b^2} \right) v^2 \\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a \partial b} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial b^2}\end{aligned}$$

Por tanto, para que si se satisface la ecuación de onda entonces $\partial^2 \Psi / \partial a \partial b = 0$, es decir Ψ es una combinación lineal de funciones que dependen o de a o de b . Es decir, $\Psi = \Psi_+(a) + \Psi_-(b)$.

13.2 Soluciones estacionarias y armónicas

- Como en la ecuación de ondas no se mezclan las derivadas parciales, podemos obtener dos ecuaciones diferenciales independientes. Descompongamos la función de ondas en producto de dos

$$\Psi(x, t) = \psi(x) \chi(t)$$

Sustituyendo en la ecuación de ondas y dividiendo por $\psi(x) \chi(t)$ obtenemos

$$\frac{v^2}{\psi(x)} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} = \frac{1}{\chi(t)} \frac{d^2 \chi(t)}{dt^2}$$

Ambos términos de la igualdad son independientes, así que, deben ser iguales a una misma constante, que llamaremos $-w^2$. Por tanto, tenemos las ecuaciones separadas

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{w^2}{v^2} \psi(x) &= 0 \\ \frac{d^2 \chi(t)}{dt^2} + w^2 \chi(t) &= 0\end{aligned}$$

La primera de ellas se conoce como ecuación de Helmholtz independiente del tiempo.

- Las soluciones para cada valor de w arbitrario son combinación de exponenciales imaginarias (soluciones armónicas de oscilador)

$$\begin{aligned}\psi_p(x) &= A(w) e^{i \frac{w}{v} x} + A^*(w) e^{-i \frac{w}{v} x} \\ \chi_p(t) &= B(w) e^{i w t} + B^*(w) e^{-i w t}\end{aligned}$$

El producto de estas soluciones es

$$\Psi_p(x, t) = \psi_p(x) \chi_p(t) = 4 |AB| \cos\left(\frac{w}{v} x + \alpha\right) \cos(wt + \beta)$$

siendo $\alpha = \arg A$ y $\beta = \arg B$.

- Ondas estacionarias. Notar que las soluciones anteriores son tales que en cada punto x la onda oscila siempre de la misma forma. Existen puntos donde no hay oscilación (nodos): cumplen que $xw/v + \alpha = \pi/2 \pm n\pi$. Otros puntos oscilan con amplitud máxima (vientres): cumplen que $xw/v + \alpha = \pm n\pi$. Vemos pues que estas ondas no progresan. Se llaman por eso ondas estacionarias. Son los "modos normales" de vibración.
- Sin embargo, estas soluciones estacionarias se pueden expresar como combinación de ondas "progresivas" a derechas e izquierdas, de manera que

$$\Psi_p(x, t) = \psi_p(x) \chi_p(t) = \Psi_p^+(x - vt) + \Psi_p^-(x + vt)$$

$$\Psi_p^+(x - vt) = a_+(w) \cos\left(\frac{w}{v}(x - vt) + \alpha_+(w)\right)$$

$$\Psi_p^-(x + vt) = a_-(w) \cos\left(\frac{w}{v}(x + vt) + \alpha_-(w)\right)$$

donde $a_+ = a_- = 2|AB|$ y $\alpha_+ = \arg AB^*$, $\alpha_- = \arg AB$. Estas son las soluciones progresivas armónicas (también llamadas planas) de la ecuación de ondas.

- Velocidad de fase. Es la velocidad de propagación de la onda, que corresponde a la velocidad con la que debemos desplazarnos para observar siempre la misma fase de la onda. Para Ψ_p^\pm tenemos que de $(x \mp vt)w/v + \alpha_\pm(w) = cte$ se obtiene diferenciando que $dx/dt = \pm v$.
- Periodo de una onda armónica. Es el tiempo T que transcurre en una posición fija para recuperar la misma fase. Es decir, $wT = w\Delta t = 2\pi$. Por tanto,

$$T = 2\pi/w$$

La frecuencia es $\nu = 1/T$ es el número de periodos por segundo.

- Longitud de onda. Es la distancia λ entre dos posiciones consecutivas con la misma fase para un instante fijo. Es decir, $(w/v)\lambda = (w/v)\Delta x = 2\pi$. Por tanto,

$$\lambda = v \frac{2\pi}{w}$$

Notar que $\lambda = vT$, es decir, la longitud de onda es la distancia recorrida por una posición de fase constante en un periodo.

- Número de ondas. Es el número de longitudes de onda k que hay en una distancia 2π . Es decir

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{w}{v}$$

La relación entre w y k se llama relación de dispersión: $w(k) = vk$. Para $v = cte$ el medio de propagación se llama no dispersivo.

13.3 Paquetes de ondas. Velocidad de grupo

- Vamos a construir una onda como superposición de ondas armónicas progresivas a derechas, $a_0 \cos(kx - wt)$, con la misma amplitud a_0 y longitudes de onda $\lambda = 2\pi/k$ donde $k \in [k_0 - \varepsilon, k_0 + \varepsilon]$. En un medio en general no dispersivo tendremos que $w(k) = kv(k)$. Desarrollando en torno a $w_0 = w(k_0)$ tenemos

$$w(k) \simeq w_0 + w'_0(k - k_0)$$

La superposición de estas ondas sera

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= a_0 \int_{k_0 - \varepsilon}^{k_0 + \varepsilon} \cos(kx - wt) dk \\ &\simeq a_0 \int_{k_0 - \varepsilon}^{k_0 + \varepsilon} \cos(kx - w_0t - w'_0(k - k_0)t) \\ &= \frac{a_0}{x - w'_0t} [\sin(k_0 - w_0t + \varepsilon x - \varepsilon w'_0t) - \\ &\quad - \sin(k_0 - w_0t - \varepsilon x + \varepsilon w'_0t)] \end{aligned}$$

Llamando $A = k_0 - w_0t$, $B = \varepsilon x - \varepsilon w'_0t$ y utilizando $\sin(A + B) - \sin(A - B) = 2 \cos A \sin B$ obtenemos

$$\Psi(x, t) = 2a_0\varepsilon \frac{\sin \varepsilon(x - w'_0t)}{\varepsilon(x - w'_0t)} \cos(k_0x - w_0t)$$

- Velocidad de grupo. La función

$$2a_0\varepsilon \frac{\sin \varepsilon(x - w'_0t)}{\varepsilon(x - w'_0t)}$$

representa la modulación de las amplitudes de oscilación (envolvente). Para $t = 0$, la amplitud máxima está en $x = 0$ y se va atenuando a izquierda y derecha. La velocidad con la que se propaga esta amplitud máxima se obtiene diferenciando la fase $\varepsilon(x - w'_0t) = cte$. Esta es la velocidad de grupo v_g :

$$v_g = w'_0 = \left(\frac{dw(k)}{dk} \right)_{k_0}$$

Para un medio no dispersivo la velocidad de grupo coincide con la velocidad de fase, $v_g = v_f = w/k$. En este caso el grupo de ondas se mueve al mismo tiempo que las propias ondas.

- Podemos definir la anchura Δx de la envolvente, en un instante fijo, alrededor del máximo valor como

$$\varepsilon \Delta x = \pi/2$$

El tiempo Δt que necesita esta anchura para pasar por un punto fijo es

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_g} = \frac{\pi/2}{\varepsilon v_g} = \frac{\pi/2}{\Delta w}$$

Las igualdades anteriores constituyen las relaciones de incertidumbre posición-número de ondas y tiempo-frecuencia angular, respectivamente.

- Para medios dispersivos tenemos que

$$w(k) = kv_f(k)$$

Por tanto

$$v_g = \frac{dw(k)}{dk} = v_f(k) + k \frac{dv_f}{dk}$$

Si $dv_f/dk < 0$ tenemos un medio dispersivo normal ($v_g < v_f$). Si $dv_f/dk > 0$ tenemos un medio dispersivo anómalo ($v_g > v_f$). El medio dispersivo normal, es pues, el que al aumentar el número de ondas, la velocidad de fase disminuye.

13.4 Reflexión y transmisión de ondas

- Reflexión de una onda. Supongamos que una perturbación $f(x+vt)$ se propaga a izquierdas desde $x > 0$. En $x = 0$ encontramos un medio que mantiene nula la perturbación (condición de contorno). Para ello, se debe crear una onda a derechas $-f(-x+vt)$ que genere una onda estacionaria con un nodo en $x = 0$. Esta onda se llama onda reflejada
- Transmisión de una onda. Consideremos ahora dos medios distintos con frontera en $x = 0$. Al pasar una onda incidente, que viaja a izquierdas, por dicha frontera, parte de la onda se refleja y parte se transmite. Sean $f_1(x, t)$ y $f_2(x, t)$ las ondas resultantes en los medios 1 ($x < 0$) y 2 ($x > 0$). Entonces, para ondas armónicas, se tiene

$$\begin{aligned} f_1(x, t) &= f_{inc} + f_{refl} = Ae^{i(\omega t - k_1 x)} + Be^{i(\omega t + k_1 x)} \\ f_2(x, t) &= f_{tran} = Ce^{i(\omega t - k_2 x)} \end{aligned}$$

Notar que la frecuencia angular (pulsación) ω es la misma para todas las ondas (la constante que elegimos al separar la ecuación de ondas). Sin embargo, al ser medios distintos, $v_1 \neq v_2$, por lo que $k_1 \neq k_2$. Si no hubiese transmisión $(f_{inc} + f_{refl})_{x=0} = 0$ con lo que $A = -B$ (como antes). Con onda transmitida, exigiremos continuidad de la onda y de sus derivadas parciales en la frontera $x = 0$

$$(f_{inc} + f_{refl} = f_{tran})_{x=0}$$

$$\left(\frac{\partial f_{inc}}{\partial x} + \frac{\partial f_{refl}}{\partial x} = \frac{\partial f_{tran}}{\partial x} \right)_{x=0}$$

Estas condiciones nos llevan a que

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A, \quad C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A$$

- Definimos el coeficiente de reflexión R y el de transmisión T como sigue

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2$$

$$T = 1 - R = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{k_2}{k_1} \frac{|C|^2}{|A|^2}$$

13.5 Ondas en el espacio

- La generalización de la ecuación de ondas en el espacio para una perturbación escalar $\Psi(\vec{r}, t)$ en un medio no dispersivo es

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$$

Para una magnitud vectorial $\vec{\Psi}(\vec{r}, t) = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$ tenemos tres ecuaciones de ondas para las tres perturbaciones escalares Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 .

- Onda plana en el espacio. Es una perturbación de la forma $\Psi(\vec{n} \cdot \vec{r}, t)$. Esta perturbación vale lo mismo en todos los puntos de cada plano perpendicular a la dirección \vec{n} . Como en el caso unidimensional, las ondas planas se pueden descomponer en ondas planas progresivas a derechas e izquierdas. En efecto, si definimos dos nuevas variables $a = \vec{n} \cdot \vec{r} - vt$ y $b = \vec{n} \cdot \vec{r} + vt$, llegamos a la conclusión de que $\partial^2 \Psi / \partial a \partial b = 0$. Es decir,

$$\Psi(\vec{n} \cdot \vec{r}, t) = \Psi_+(\vec{n} \cdot \vec{r} - vt) + \Psi_-(\vec{n} \cdot \vec{r} + vt)$$

También podemos probar que toda onda plana satisface la ecuación de ondas.

- Ondas esféricas. Son perturbaciones de la forma $\Psi(|\vec{r}|, t) = \Psi(r, t)$. Utilizando el operador laplaciano ∇^2 en coordenadas esféricas obtenemos

$$\frac{\partial^2(r\Psi)}{\partial r^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2(r\Psi)}{\partial t^2} = 0$$

Tenemos así una perturbación $r\Psi$ unidimensional con respecto a la variable radial r . Podemos, pues, hacer la descomposición

$$\Psi(r, t) = \frac{1}{r} [\Psi_+(r - vt) + \Psi_-(r + vt)]$$

En este caso las ondas Ψ_{\pm} son ondas salientes y entrantes respecto del centro de simetría esférica.

- Soluciones planas armónicas. Consideremos soluciones de la ecuación de ondas con variables separadas

$$\Psi(\vec{r}, t) = X(x) Y(y) Z(z) \chi(t)$$

Sustituyendo en la ecuación de ondas y dividiendo por $\Psi(r, t)$ obtenemos

$$\frac{1}{\chi} \frac{d^2 \chi}{dt^2} = \frac{v^2}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{v^2}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{v^2}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}$$

Cada miembro de la igualdad debe ser una constante, que llamamos $-w^2$. Por otro lado, cada término del segundo miembro debe ser constante, que llamaremos $-w_1^2, -w_2^2, -w_3^2$, respectivamente. Obviamente

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = w^2 \iff \vec{w} \cdot \vec{w} = w^2$$

Las soluciones con variables separadas son pues producto de exponenciales. Definiendo el vector número de ondas $\vec{k} = \vec{w}/v$, tenemos las soluciones

$$\Psi_p(\vec{r}, t) = \exp\left(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm wt\right)$$

que son ondas planas armónicas, propagándose en la dirección de \vec{k} . Notar que las componentes de \vec{k} , como las de \vec{w} pueden ser positivas o negativas. La definición de periodo y longitud de onda es la misma que para ondas armónicas unidimensionales.