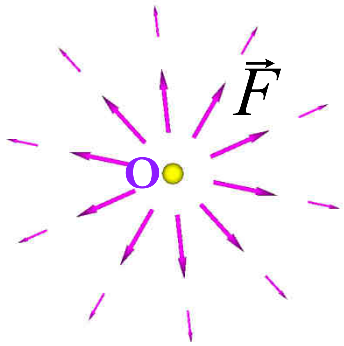
Tema 6. Campos y movimiento en campos centrales

1. Campos centrales.
2. Campos newtoniano/coulombiano.
3. Movimiento en un potencial central.
4. Problema de los dos cuerpos. Órbitas en un campo gravitatorio.

- Definición de fuerza central:

$$\boxed{\vec{F} = F(r)\vec{u}_r}$$



- **Las fuerzas centrales son conservativas**, ya que:

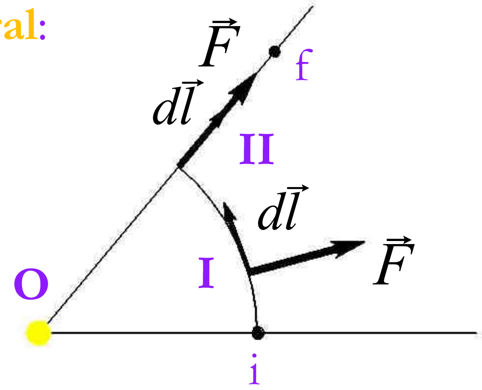
$$\begin{cases} \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \end{cases}$$

(La fuerza no depende explícitamente del tiempo)

- Las fuerzas centrales tienen asociado un **potencial central**:

$$U - U_0 = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\int_{r_0}^{r} F(r)dr$$

$$U = U(r)$$



- Los potenciales centrales originan fuerzas centrales:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\frac{dU}{dr}\vec{u}_r$$

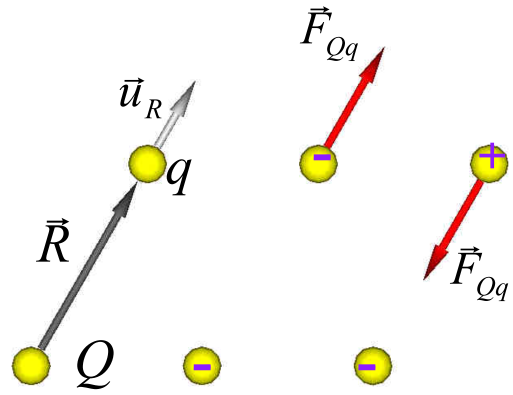
Tema 6. Campos y movimiento en campos centrales

1. Campos centrales.
2. Campos newtoniano/coulombiano.
3. Movimiento en un potencial central.
4. Problema de los dos cuerpos. Órbitas en un campo gravitatorio.

- Campo newtoniano/coulombiano:

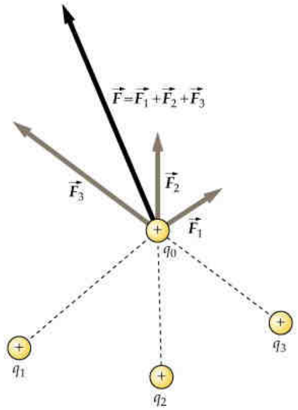
$$\boxed{\vec{F} = \frac{\alpha}{R^2}\vec{u}_R}$$

$$\boxed{\alpha = -GMm} \qquad \boxed{\alpha = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}}$$



- Principio de superposición:

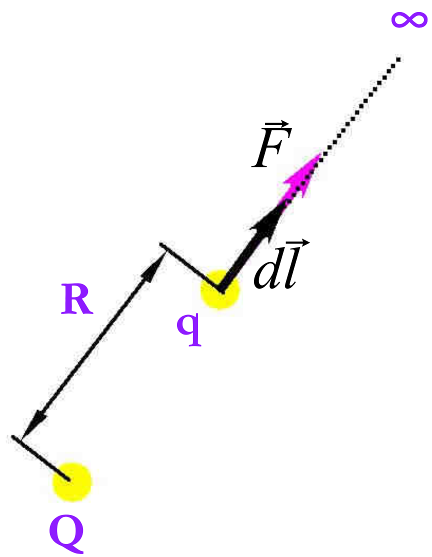
$$\boxed{\vec{f} = \sum_i \vec{f}_i = \sum_i \frac{\alpha_i}{R_i^2} u\vec{R}_i}$$



- Cálculo de la energía potencial tomando el origen en el infinito

$$U(\infty) - U(R) = -\int_R^\infty \vec{F}\cdot d\vec{l} = -\int_R^\infty \frac{\alpha}{r^2}dr = -\frac{\alpha}{R}$$

$$\boxed{U = -G\frac{Mm}{R}} \qquad \boxed{U(R) = \frac{\alpha}{R}} \qquad \boxed{U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{R}}$$

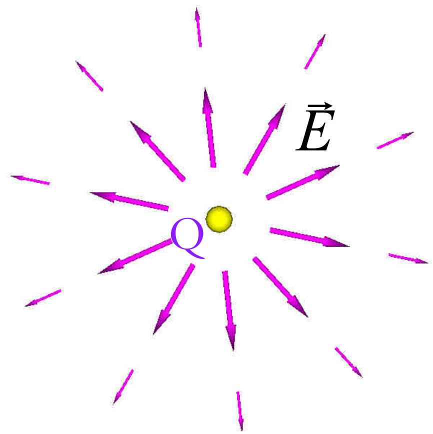


- Campos:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{mag}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$



- Principio de superposición para los campos:

$$\vec{f} = \sum_i \vec{f}_i$$

- Potencial:

$$V = \frac{U}{m} = -G\frac{M}{R}$$

$$V = \frac{U}{mag}$$

$$V = \frac{U}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R}$$

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}V$$

$$\vec{f} = -\vec{\nabla}V$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

- Principio de superposición para el potencial:

$$V = \sum_i V_i = \sum_i \frac{\alpha_i}{R_i}$$

- Características vectoriales:

- Rotacional, circulación:

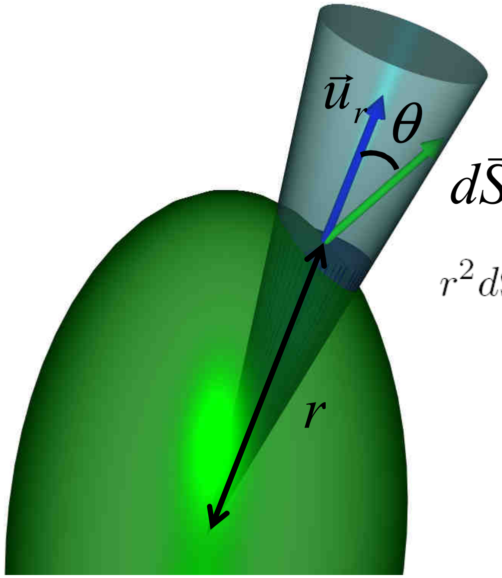
$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0} \qquad \oint \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$$

(forma diferencial)

$$\boxed{\oint \vec{g} \cdot d\vec{l} = 0} \qquad \boxed{\oint \vec{f} \cdot d\vec{l} = 0} \qquad \boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$$

(forma integral)

- Divergencia, flujo:



$$r^2 d\Omega = dS \cos\theta$$

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{S} = \oint f \; dS \;\; \cos\theta = \oint \frac{\alpha}{mag \; r^2} dS \;\; \cos\theta$$

$$d\Omega = \frac{dS \cos\theta}{r^2}$$

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{S} = \frac{\alpha}{mag} \oint d\Omega = 4\pi \frac{\alpha}{mag}$$

$$\boxed{\oint \vec{g}\cdot d\vec{S} = -4\pi GM}$$

$$\boxed{\oint \vec{f}\cdot d\vec{S} = 4\pi\frac{\alpha}{mag}}$$

- **T. Gauss-** (forma integral)

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}}$$

- Buscamos la forma diferencial del T. Gauss:

$$\left\{\begin{array}{l} \oint \vec{f}\cdot d\vec{S} = 4\pi\frac{\alpha}{mag} = 4\pi\int\frac{d(\alpha/mag)}{d\tau}d\tau \\ \\ \oint \vec{f}\cdot d\vec{S} = \int \vec{\nabla}\cdot\vec{f}d\tau \end{array}\right.$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{g} = -4\pi G\rho_M}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{f} = 4\pi\frac{d(\alpha/mag)}{d\tau}}$$

- T. Gauss- (forma diferencial)

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{f} = \frac{\rho_q}{\epsilon_0}}$$

- Ecuación de Poisson:

$$\Delta V := div(gr\vec{a}d\ V) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}V) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{f} = -4\pi\frac{d(\alpha/mag)}{d\tau}$$

$$\boxed{\Delta V = 4\pi G\rho_m}$$

$$\boxed{\Delta V = -4\pi\frac{d(\alpha/mag)}{d\tau}}$$

- Ec. Poisson-

$$\boxed{\Delta V = -\frac{\rho_q}{\epsilon_0}}$$

Tema 6. Campos y movimiento en campos centrales

1. Campos centrales.
2. Campos newtoniano/coulombiano.
3. Movimiento en un potencial central.
4. Problema de los dos cuerpos. Órbitas en un campo gravitatorio.

Conservación del momento angular

- El momento angular de una partícula moviéndose en el seno de un potencial central se conserva.

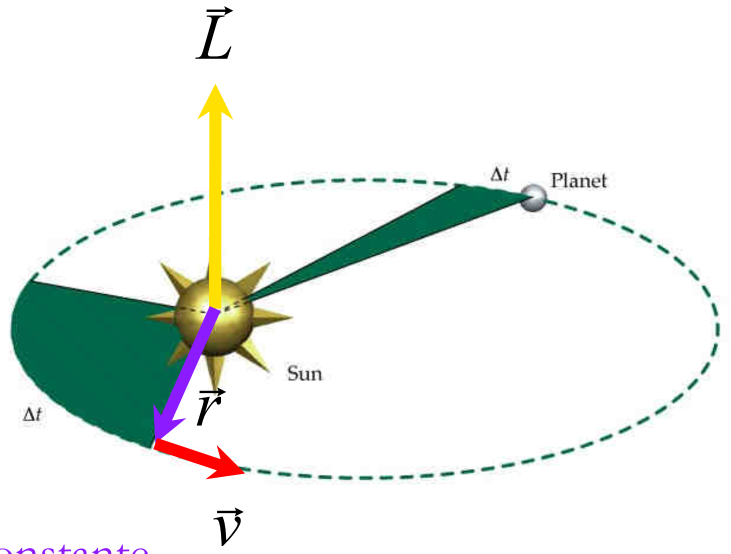
$$\vec{F} = F(r)\vec{u_r}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \vec{cte}$$

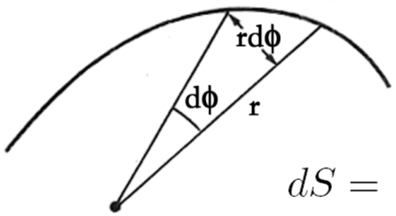
- Consecuencias:

1. El movimiento se desarrolla en un plano.

$$\vec{r} \perp \vec{L}$$



2. Ley de las áreas: la velocidad aerolar (v_a) es constante.



$$dS = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \ r d\phi$$

$$\boxed{L = mr^2\dot{\phi}}$$

$$\boxed{v_a = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi} = \frac{L}{2m}}$$

Ecuaciones del movimiento

- Lagrangiana de masa puntual moviéndose en un plano:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r)$$

- ϕ es cíclica. Recuperamos la conservación del momento angular:

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \phi} = mr^2\dot{\phi} \equiv l$$

$$\boxed{\dot{\phi} = \frac{l}{mr^2}}$$

- Ecuación de movimiento para la coordenada radial:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

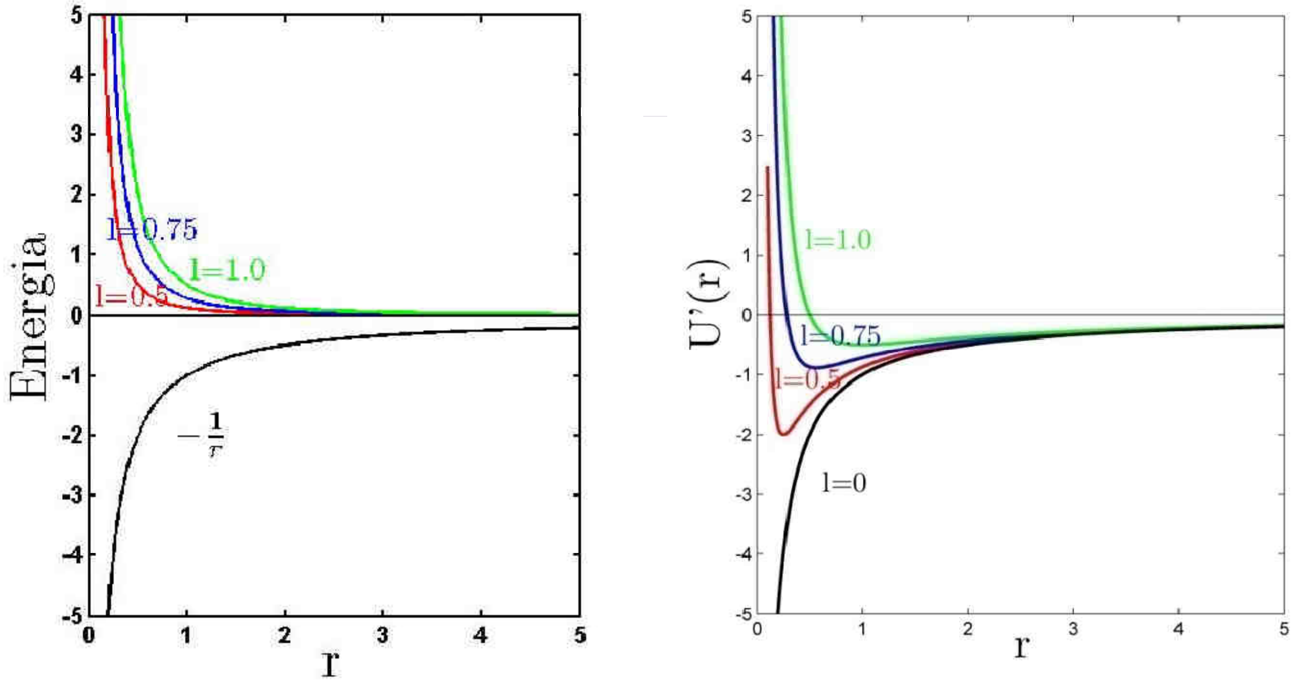
$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + \frac{dU}{dr} = 0$$

$$\boxed{m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{dU}{dr} = 0}$$

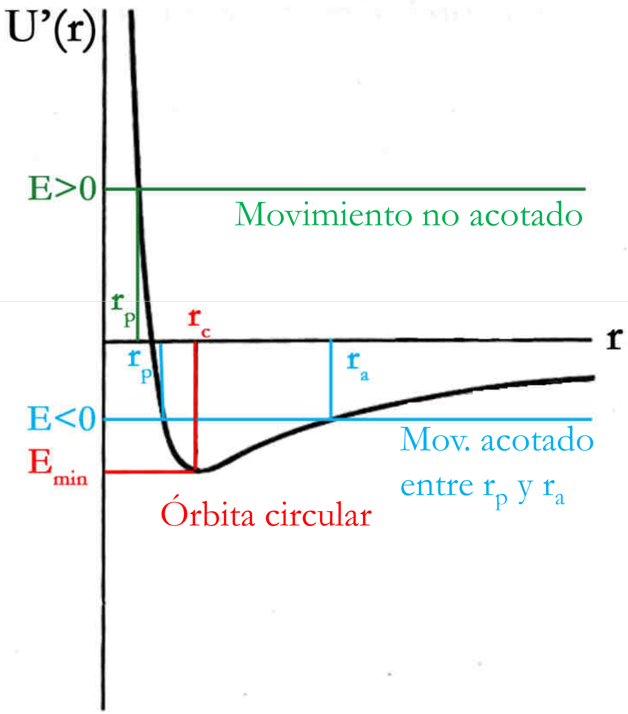
Análisis del potencial

T azimutal o de rotación o "barrera centrífuga"

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + U(r)}_{U'(r)}$$



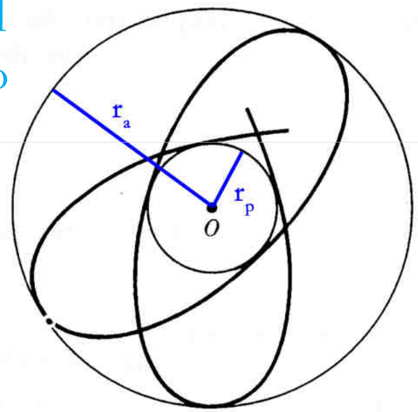
$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + U(r)}_{U'(r)}$$



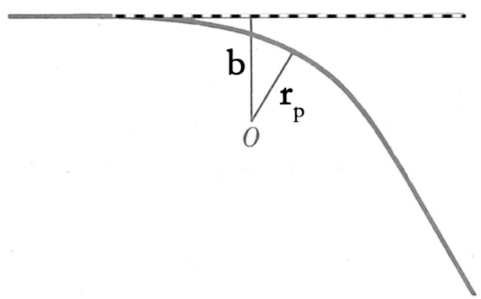
Órbita circular: $\dot{r} = 0 \qquad E = U'(r_c) \equiv E_{min}$

$$\frac{dU'}{dr} = 0$$

Movimiento acotado entre el pericentro (r_p) y el apocentro (r_a)



Movimiento no acotado



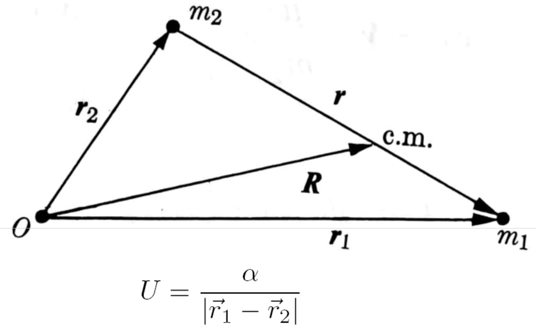
Tema 6. Campos y movimiento en campos centrales

1. Campos centrales.
2. Campos newtoniano/coulombiano.
3. Movimiento en un potencial central.
4. Problema de los dos cuerpos. Órbitas en un campo gravitatorio.

Planteamiento del problema:

Dos partículas sobre las que no actúa ninguna fuerza externa y que interaccionan con un potencial del tipo coulombiano

$$U = \frac{\alpha}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$



$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}_2^{\,2} - \frac{\alpha}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad \text{(6 grados de libertad)}$$

-El movimiento se descompone en movimiento del CM más movimiento alrededor del CM

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}_{CM}^{\,2} + \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^{\,2} - \frac{\alpha}{r} \equiv L_{CM}(\vec{R},\dot{\vec{R}}) + L_{rel}(\vec{r},\dot{\vec{r}})$$

$$M\ddot{\vec{R}}_{CM} = 0$$

El CM se mueve como una partícula libre

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{u}_r$$

El mov. relativo se ve afectado por una F central. El momento angular relativo al CM se conserva

- El movimiento es un plano:

$$L_{rel} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{\alpha}{r}$$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\dot{\phi} = \dfrac{l}{\mu r^2}} \\ \mu\ddot{r} = \mu r\dot{\phi}^2 + \dfrac{\alpha}{r^2} \end{array}\right\} \quad \boxed{\mu\ddot{r} = \frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{\alpha}{r^2}}$$

Sólo hay una coordenada de interés.

Análisis del potencial

$$E = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + \frac{\alpha}{r}}_{U'}$$

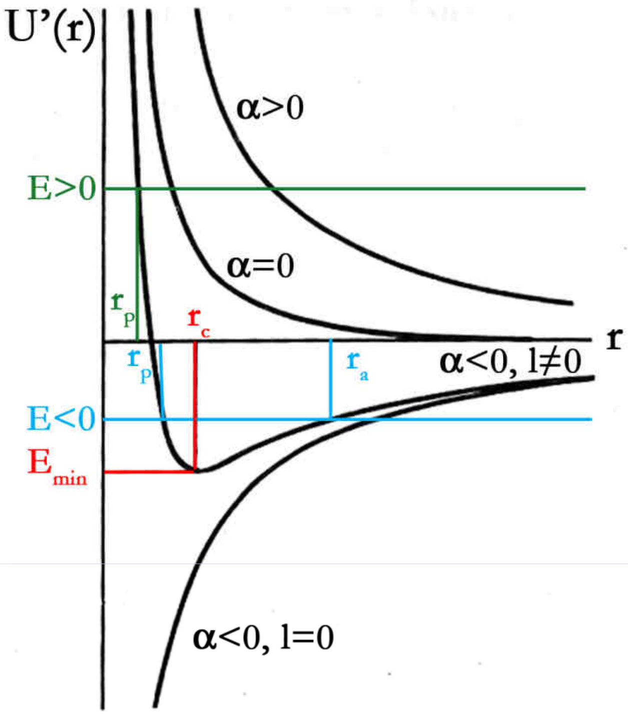
1. Órbita circular.

$r_c,\ E_{min}?$

$$\frac{dU'}{dr} = 0 \Rightarrow r_c = -\frac{l^2}{\mu\alpha}$$

$$v = \sqrt{-\frac{\alpha}{\mu r_c}}$$

$$E_{min} = -\frac{\alpha^2\mu}{2l^2} = \frac{\alpha}{2r_c}$$



2. Pericentro (r_{min}, r_p) y apocentro (r_{max}, r_a)

$$\dot{r} = 0 \Rightarrow E = U' \qquad E = \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} + \frac{\alpha}{r}$$

$$\boxed{\frac{1}{r_{p,a}} = -\frac{\mu\alpha}{l^2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2\alpha^2}{l^4} + \frac{2\mu E}{l^2}}} \qquad \frac{r_c}{r_{p,a}} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{E}{E_{min}}}$$

3. Tipos de movimiento:

3.1.1 Potencial atractivo ($\alpha<0$): órbita acotada si $E<0$.

3.1.2 Potencial atractivo ($\alpha<0$): órbita no acotada si $E\geq0$.

3.2. Potencial repulsivo ($\alpha>0$): órbita no acotada. $E>0$ necesariamente.

Ecuaciones del movimiento

$r(t)?$

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + U'$$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}[E - U'(r)]}$$

$$\boxed{\int_{r_0}^{r} dr \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[E - U'(r)]}} = t - t_0}$$

$\phi(t)?$

$$l = \mu r^2 \dot{\phi}$$

$$\boxed{\phi - \phi_0 = \frac{l}{\mu}\int_{t_0}^{t} dt \frac{1}{\mu[r(t)]^2}}$$

Trayectoria

$r = r(\phi)?$

- Partimos de:

$$\mu \ddot{r} = \frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{\alpha}{r^2}$$

- Idea feliz:

$$u = \frac{1}{r} \qquad u = u(\phi)?$$

$$\dot{r} = -\frac{l}{\mu}\frac{du}{d\phi} \qquad \ddot{r} = -\frac{l^2}{\mu^2}u^2\frac{d^2u}{d\phi^2}$$

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\frac{\alpha\mu}{l^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{r} = -\frac{\alpha\mu}{l^2} + A\cos(\phi - \phi_0)}$$

Estudio de la trayectoria

- Acabamos de ver:

$$\frac{1}{r} = -\frac{\alpha\mu}{l^2} + A\cos(\phi - \phi_0)$$

- Ecuación de una cónica (ved complemento):

$$\frac{p}{r} = 1 + \epsilon\cos\phi$$

- Escogemos $\phi_0=0$. Pero, y A?

$$\begin{cases} \frac{1}{r_{p,a}} = -\frac{\alpha\mu}{l^2} + A \\ \frac{1}{r_{p,a}} = -\frac{\mu\alpha}{l^2} \pm \sqrt{\frac{\mu^2\alpha^2}{l^4} + \frac{2\mu E}{l^2}} \end{cases}$$

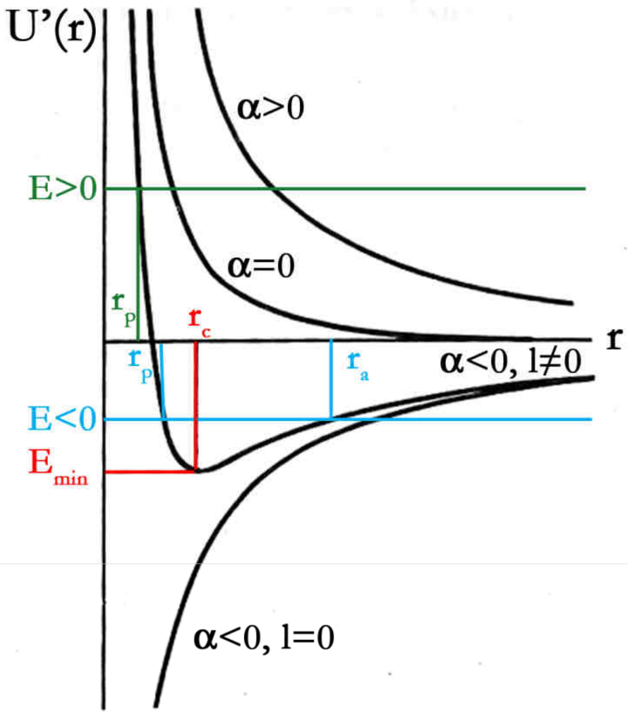
$$A = \sqrt{\frac{\mu^2\alpha^2}{l^4} + \frac{2\mu E}{l^2}}$$

- Excentricidad ε

$$\epsilon = -\frac{l^2}{\alpha\mu}A = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}$$

- Resumen:

Si $\alpha < 0$	$E < 0$	$0 < \epsilon < 1$	Elipse	$a = \frac{\alpha}{2E}$
	$E = 0$	$\epsilon = 1$	Parábola	$a = \left\lvert\frac{l^2}{2\mu\alpha}\right\rvert$
	$E > 0$	$\epsilon > 1$	Hipérbola (rama +)	$a = \left\lvert\frac{\alpha}{2E}\right\rvert$
Si $\alpha > 0$	$E > 0$	$\epsilon > 1$	Hipérbola (rama −)	$a = \frac{\alpha}{2E}$



Leyes de Kepler

1. Los planetas se mueven describiendo elipses con el sol ocupando uno de los focos (*Astronomia Nova*, 1609).
2. El radio vector que conecta el sol con el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales (*Astronomia Nova*, 1609).
3. El cuadrado del período es proporcional al cubo de la distancia promedio a sol (*Harmonices Mundi*, 1619).

- La tercera ley es consecuencias de la ley de las áreas aplicada a la trayectoria elíptica:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \frac{l}{2\mu} \\ \frac{dS}{dt} = \frac{\pi ab}{T} \end{array}\right\} \Rightarrow T = \frac{2\pi ab\mu}{l}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2\mu}{|\alpha|}a^3$$

$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}a^3}$$

- Datos del Sistema Solar:

PLANETA	a ($U.A.$)	ϵ	i (^{o})	T (años)	a^3/T^2
Mercurio	0.387	0.206	7.00	0.241	0.998
Venus	0.723	0.007	3.39	0.615	0.999
Tierra	1.000	0.017	-	1.000	1.000
Marte	1.523	0.093	1.85	1.881	0.998
Júpiter	5.203	0.048	1.31	11.862	1.001
Saturno	9.54	0.056	2.5	29.46	1.000
Urano	19.18	0.047	0.77	84.02	0.999
Neptuno	30.07	0.009	1.78	164.77	1.001
Plutón	39.44	0.249	17.2	248	0.997

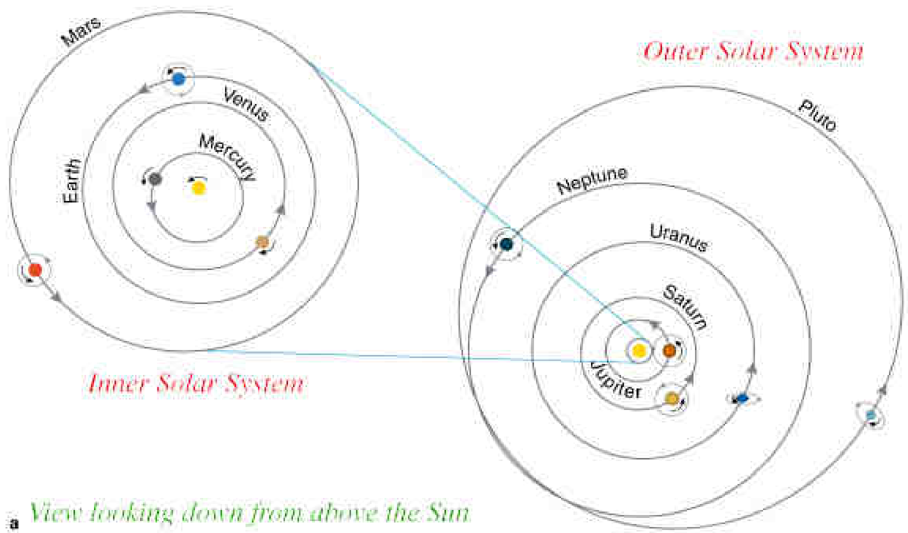
$1\ U.A. = 149.6 \cdot 10^6\ km$

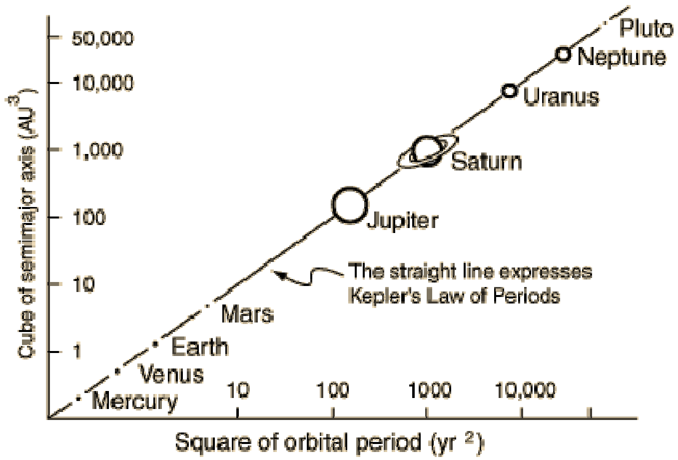
A. P. French, *Mecánica Newtoniana.*

- Como la masa M_s del sol es mucho más grande que la de cualquier planeta:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_s} a^3$$

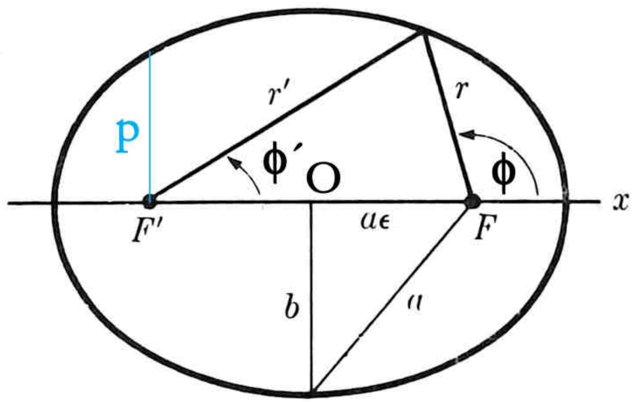
(¡ pero a es el semieje mayor, no la distancia media!)

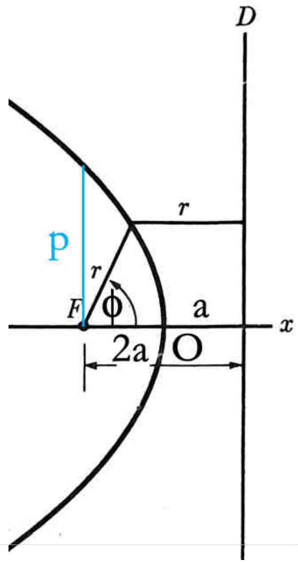


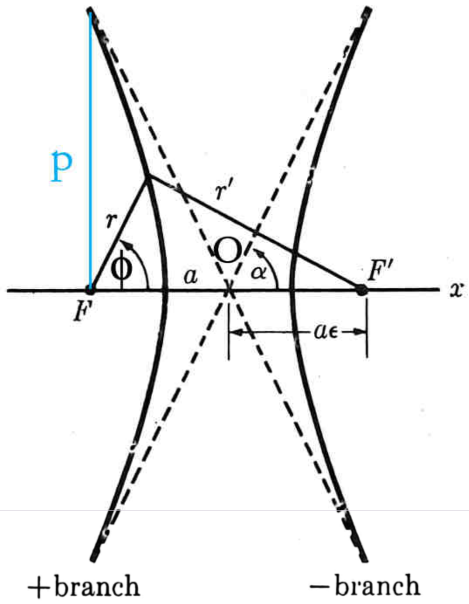


Complemento. Secciones cónicas:

$$\boxed{\frac{p}{r} = 1 + \epsilon\cos\phi}$$







$$0 < \epsilon < 1$$

$$p = a(1-\epsilon^2)$$

$$\frac{p}{r'} = 1 - \epsilon\cos\phi'$$

- Desde F'-

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$b = a\sqrt{1-\epsilon^2}$$

$$\epsilon = 1$$

$$p = 2a$$

$$y^2 = -4ax$$

$$\epsilon > 1$$

$$p = a(\epsilon^2 - 1)$$

$$\frac{p}{r} = -1 + \epsilon\cos\phi$$

- Rama negativa-

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\epsilon}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$b = a\sqrt{\epsilon^2 - 1}$$