TEMA 4. SISTEMAS DE PARTÍCULAS

1. Centro de masas y coordenadas relativas. Fuerzas internas y externas.
2. Conservación del momento lineal total de un sistema. Sistemas de masa variable y ejemplos.
3. Conservación del momento angular de un sistema.
4. Energía cinética y potencial de un sistema. Energía interna. Conservación de la energía mecánica de un sistema.
5. El caso de dos cuerpos.
6. Simetrías de la energía potencial y leyes de conservación.
7. Teorema del Virial.

Bibliografía: [Marion], [Kibble], [AFinn], [Mec-Berk], [BarOls], [Golds]

Chantal Ferrer Roca 2008

TEMA 4. SISTEMAS DE PARTÍCULAS

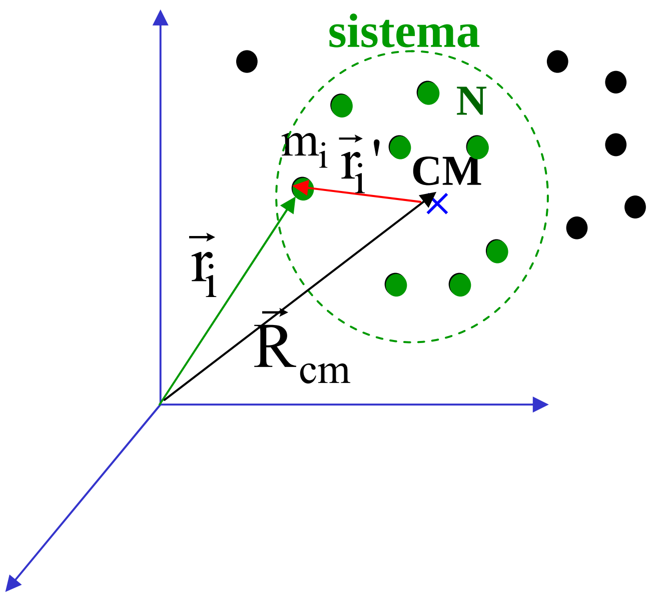
NOTA IMPORTANTE:

Los contenidos de este documento representan un esquema de los conceptos fundamentales del tema, por lo que en ningún caso se trata de apuntes completos. Este esquema se complementa con explicaciones, razonamientos, ejemplos y problemas que se desarrollan durante las clases, así como con alguno(s) de los libros que se incluyen en la bibliografía.

Bibliografía: [Marion], [Kibble], [AFinn], [Mec-Berk], [BarOls], [Golds]

Chantal Ferrer Roca 2008

Introducción



Cada partícula tiene $\vec{r}_i, \vec{v}_i, \vec{p}_i, \vec{a}_i, \vec{\ell}_i, T_i, U_i$

sistema constituido por **N** partículas (independientes o bien constituyendo un cuerpo rígido)

El SISTEMA, tiene $\vec{R}, \vec{V}, \vec{P}, \vec{A}, \vec{L}, T, U$

Cada una de estas magnitudes se puede obtener como la suma de las de cada una de las partículas que lo componen

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i \qquad \vec{L} = \sum_i \vec{L}_i \qquad T = \sum_i T_i \qquad U = \sum_i U_i$$

PERO….Puede ser más conveniente obtenerlas como el valor del CM (centro de masas) y el valor relativo al centro de masas.

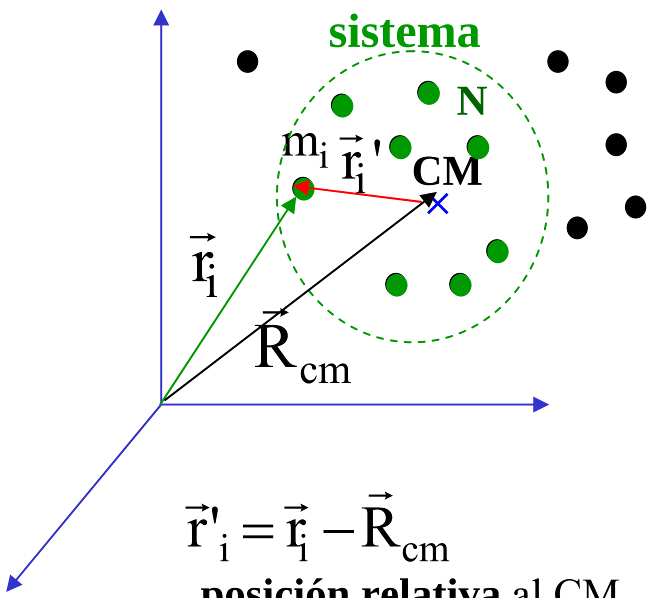
$$\vec{L} = \vec{L}_{cm} + \vec{L}_{rel} \qquad T = T_{cm} + T_{rel}$$

Se verifican las leyes de Newton $\quad \dot{\vec{P}} = \vec{F}^{ext} \qquad \dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{ext}$

Y los principios de conservación

Chantal Ferrer Roca 2008

1. Centro de masas y coordenadas relativas. Fuerzas internas y externas



sistema constituido por **N** partículas (independientes o bien constituyendo un cuerpo rígido)

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$ **masa total** del sistema

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$ posición del **centro de masas** del sistema

$$\vec{V}_{cm} = \dot{\vec{R}}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i$$ velocidad CM

$$\vec{A}_{cm} = \ddot{\vec{R}}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i$$ aceleración CM

$$\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{R}_{cm}$$

posición relativa al CM
(**coordenadas relativas**)

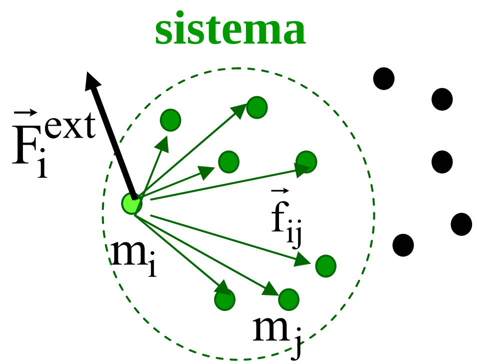
$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{f}_i$$

fuerza total sobre la partícula i,

resultante de las F externas (origen fuera del sistema)

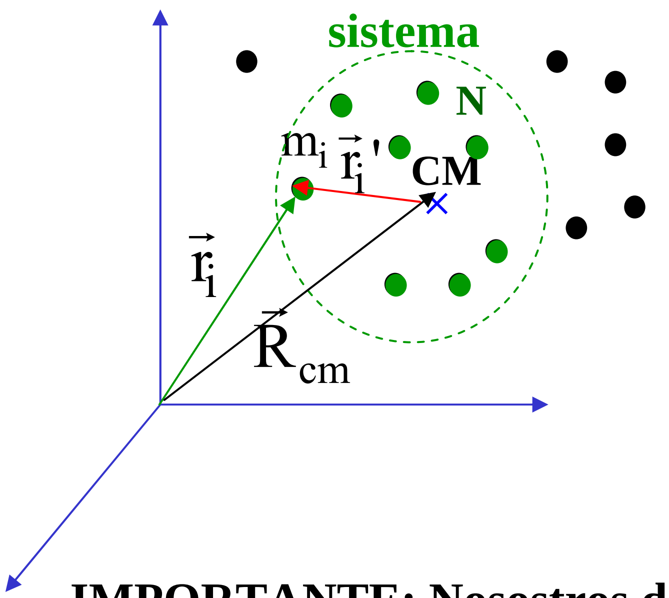
Resultante de las F de interacción con las otras N-1 partículas del sistema $\vec{f}_i = \sum_j \vec{f}_{ij}$

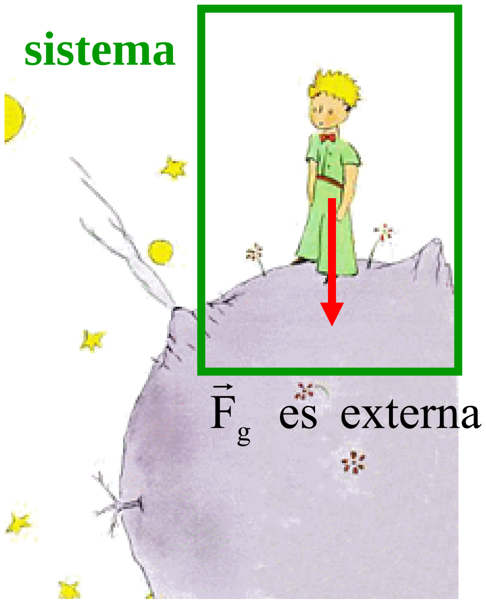
3ª ley Newton $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$

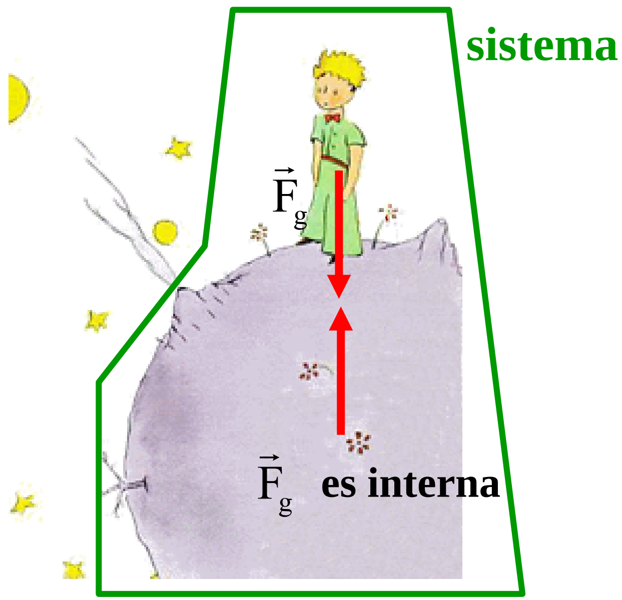


Chantal Ferrer Roca 2008

1. Centro de masas y coordenadas relativas. Fuerzas internas y externas







IMPORTANTE: Nosostros decidimos qué constituye el sistema y qué queda fuera de él. Y la descripción física será coherente con esa elección.

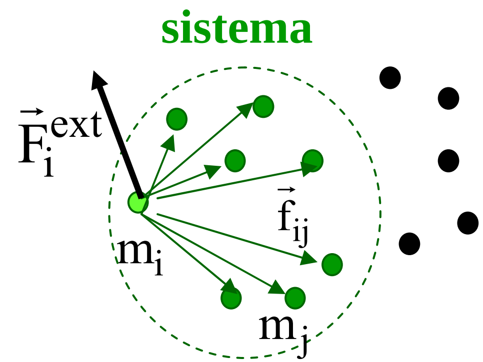
$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{f}_i$$

fuerza total sobre la partícula i,

resultante de las F externas (origen fuera del sistema)

Resultante de las F de interacción con las otras N-1 partículas del sistema $\vec{f}_i = \sum_j \vec{f}_{ij}$

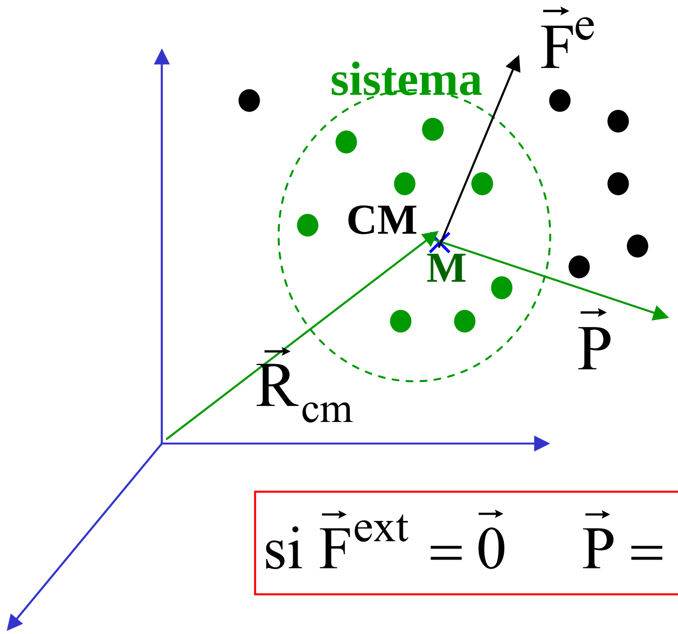
3ª ley Newton $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$



Chantal Ferrer Roca 2008

Chantal Ferrer Roca 2008

2. Conservación del momento lineal de un sistema



$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = M\vec{V}_{cm}$$ **Momento lineal total** del sistema

$$\boxed{\dot{\vec{P}} = \frac{d(M\vec{V}_{cm})}{dt} = \vec{F}^{ext}}$$

El CM del sistema se mueve como si fuese una partícula de masa M (masa total), sobre la que actúan todas las fuerzas externas al sistema

$$\boxed{\text{si } \vec{F}^{ext} = \vec{0} \qquad \vec{P} = \text{cte}}$$

No hay interacción del sistema con lo que hay fuera de él: **Sistema Aislado** - Conservación del momento del sistema

Demostración: las fuerzas internas se cancelan mutuamente, no cambian el movimiento del sistema

2ª ley Newton, partícula i $\quad \dot{\vec{p}}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{f}_i$

sumando para todas las partículas i

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{P}} = \sum_i \vec{F}_i^{ext} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} = \vec{F}^{ext} + \vec{0}$$

$\sum_{i<j} (\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji}) = 0$ sumadas por parejas

Ejemplo, N=3

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \vec{f}_{31} + \vec{f}_{32} = (\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21}) + (\vec{f}_{13} + \vec{f}_{31}) + (\vec{f}_{23} + \vec{f}_{32}) = \vec{0}$$

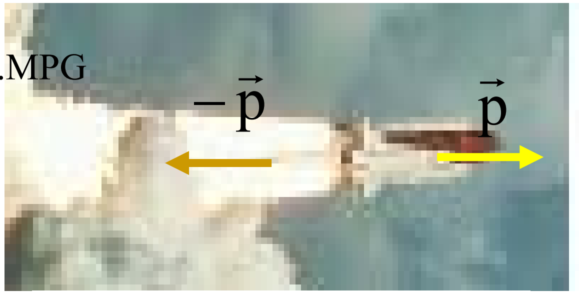
2. Conservación del momento lineal de un sistema. Ejemplos.

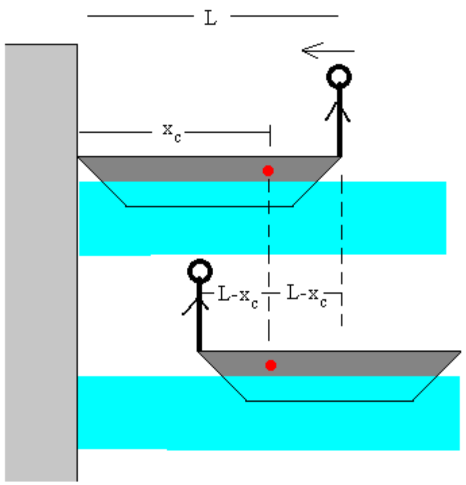
Chantal Ferrer Roca 2008

FENÓMENOS

$$\text{si } \vec{F}^{ext} = \vec{0} \qquad \vec{P} = \text{cte}$$

http://www.wfu.edu/physics/demolabs/demos/avimov/mechanics/rocket_cart/wagon1.MPG





El sistema está constituido por plataforma-persona-extintor por un lado y gases del extintor por otro. $m_b v_b = m_g v_g$

otros fenómenos: retroceso de las armas en los disparos, retroceso de patinador al lanzar masa, etc.

http://www.wfu.edu/physics/demolabs/demos/avimov/mechanics/exploding_carts/cars_explosion_eq.MPG

http://www.wfu.edu/physics/demolabs/demos/avimov/mechanics/exploding_carts/cars_explosion_uneq.MPG

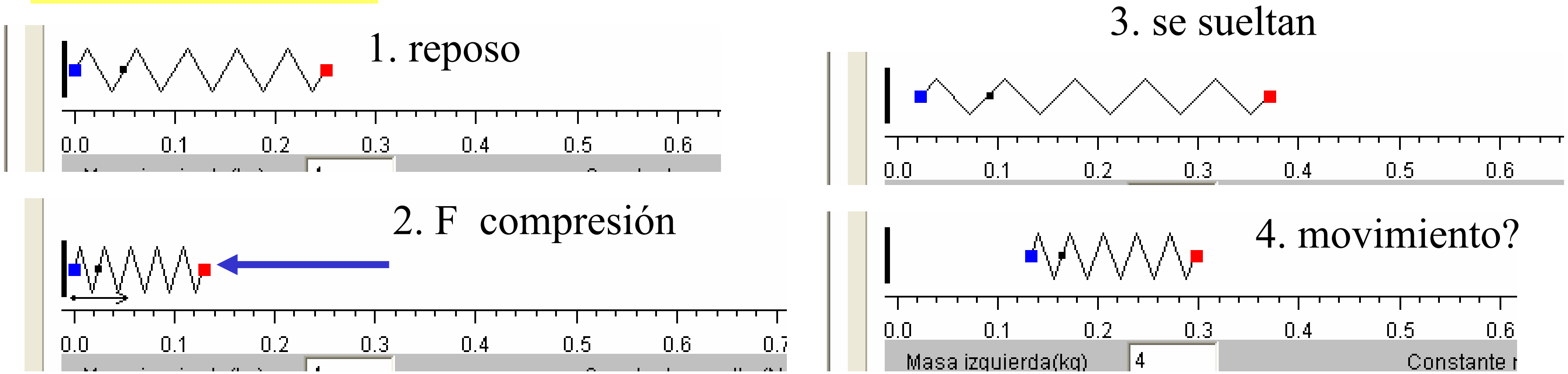
DEMO: "explosión" de dos móviles con ruedas en interacción magnética repulsiva o por medio de un resorte

PROBLEMAS 4.1, 4.2, 4.3 a) b)del boletín

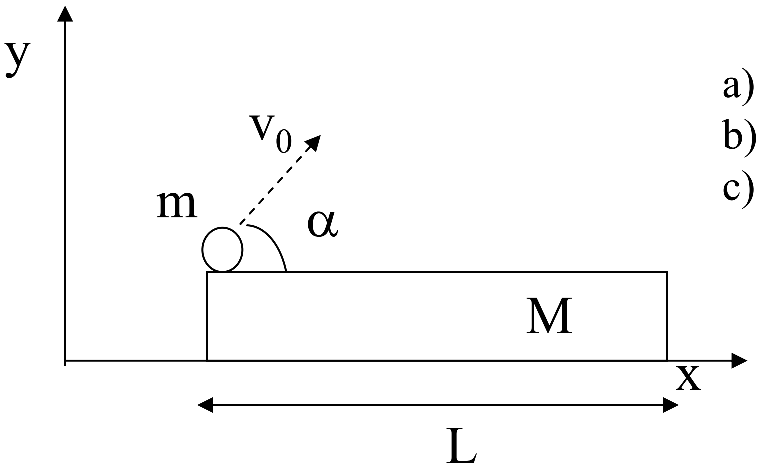
CUESTIONES 44, 45

2. Conservación del momento lineal de un sistema. Ejemplos.

EJEMPLO 1 Dos masas unidas por un muelle



EJEMPLO 2 Tiro parabólico sobre una plataforma móvil



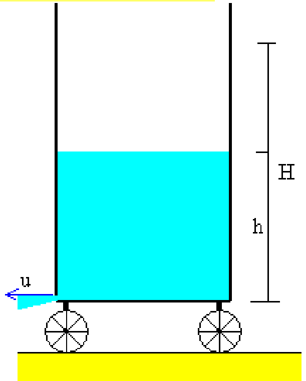
a) Calcular posición del CM inicialmente y en un t cualquiera.
b) Velocidad de la plataforma y tiempo durante el que se mueve.
c) Velocidad máxima del cuerpo lanzado para que caiga sobre la plataforma

M = 3m, a =45º y L= 100

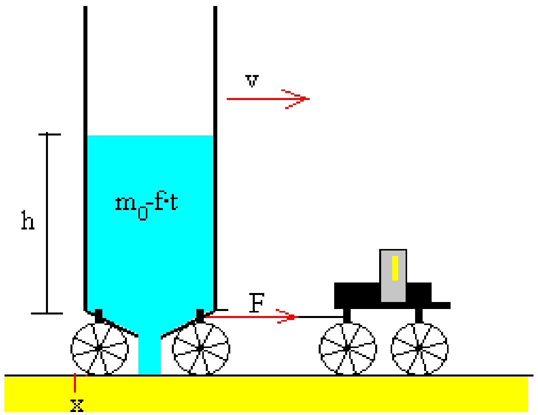
2. Conservación del momento lineal de un sistema. Sistemas de masa variable

Sistema aislado de partículas constituido por subsistemas cuya masa o número de partículas varía, aunque la masa total del sistema como conjunto permanezca constante.

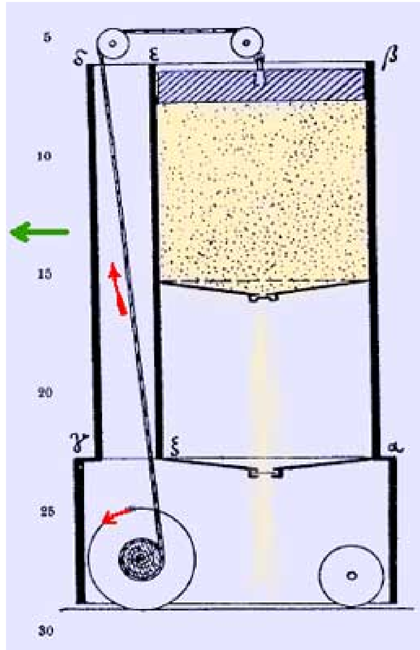
EJEMPLOS:



Depósito de masa variable (cohete de Torricelli)



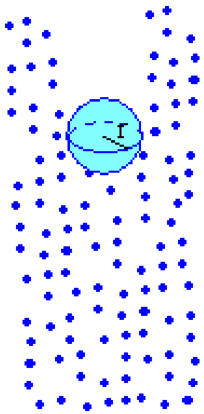
Depósito de masa variable con fuerza constante aplicada



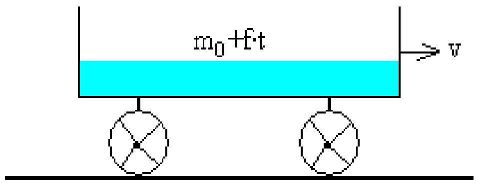
Depósito de masa variable que mueve ruedas. ¿III aC?) referido por Herón de Alejandría (s. I dC)

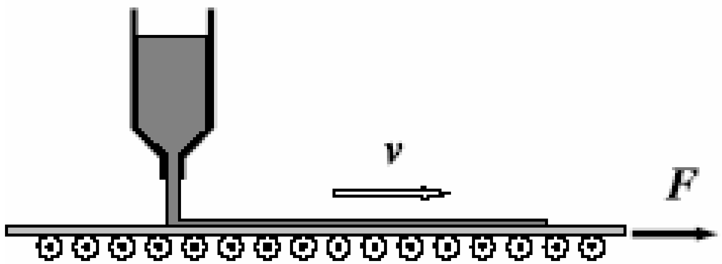
Imágenes de la página: http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/default.htm

Gota que cae en atmósfera húmeda



Lluvia que cae en un vagón, que se mueve inicialmente con v constante





Cinta transportadora sobre la que cae continuamente material

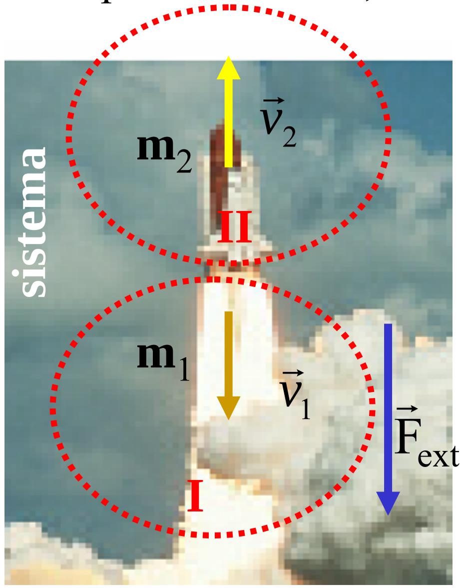
Chantal Ferrer Roca 2008

2. Conservación del momento lineal de un sistema. Sistemas de masa variable

Sistema aislado de partículas constituido por subsistemas cuya masa o número de partículas varía, aunque la masa total del sistema como conjunto permanezca constante.

EJEMPLO 3: cohete a reacción

$$\frac{dm_1}{dt} = -\frac{dm_2}{dt}$$



$$M = m_1 + m_2 = cte$$

$$\vec{P} = M\vec{V}_{cm} \quad = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$M\vec{A}_{cm} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + \underbrace{\frac{dm_1}{dt}\vec{v}_1 + m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} + \frac{dm_2}{dt}\vec{v}_2}_{} =$$

$$= \boxed{m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt}} + \boxed{m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} + \frac{dm_2}{dt}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)} = \vec{F}^{ext}$$

$$\vec{F}_I^{ext} = \frac{d(m_1\vec{v}_1)}{dt} - \vec{v}_1\frac{dm_1}{dt}$$

$$\vec{F}_{II}^{ext} = \frac{d(m_2\vec{v}_2)}{dt} + \vec{v}_1\frac{dm_1}{dt}$$

variación de p_1

empuje: tasa con la que pierde o gana momento cada subsistema

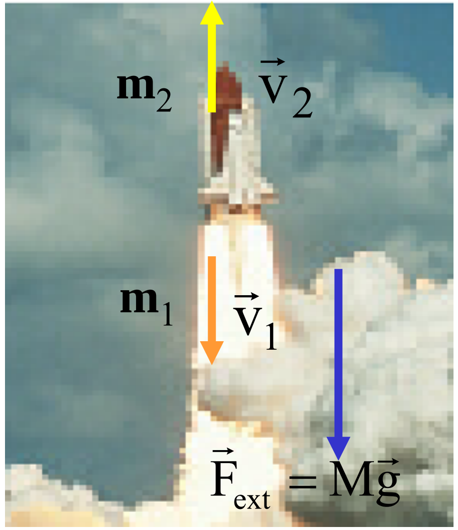
variación de p_2

sumando ambas, sistema completo: $$\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2$$

Chantal Ferrer Roca 2008

2. Conservación del momento lineal de un sistema. Sistemas de masa variable

EJEMPLO 3a: cohete a reacción en presencia de gravedad



El subsistema que nos interesa es el del cohete (II)

$$\vec{F}_{II}^{ext} = m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} + \overbrace{(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}^{-\vec{u}} \frac{dm_2}{dt}$$

$\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ = velocidad relativa de los gases **cte**

$$\vec{F}_{II}^{ext} dt = m_2 d\vec{v}_2 - \vec{u} dm_2$$

$$-m_2 g dt = m_2 dv_2 + u dm_2$$

u y v_2 tienen sentidos opuestos

$$\int_{v(0)}^{v(t)} dv_2 = \int_{t=0}^{t} -u \frac{dm_2}{m_2} - \int_{t=0}^{t} g dt = -u \ln \frac{m_2(t)}{m_2(0)} - gt$$

$$\boxed{v(t) = v(0) - gt + u \ln \frac{m(0)}{m(t)}}$$

En el espacio libre, g =0

El cohete de empuje constante

$$\boxed{D = \frac{dm_2}{dt} = cte}$$

El combustible se quema a un ritmo constante

$$v(t) = v(0) + u \ln \frac{m_0}{m_o - Dt} - gt$$

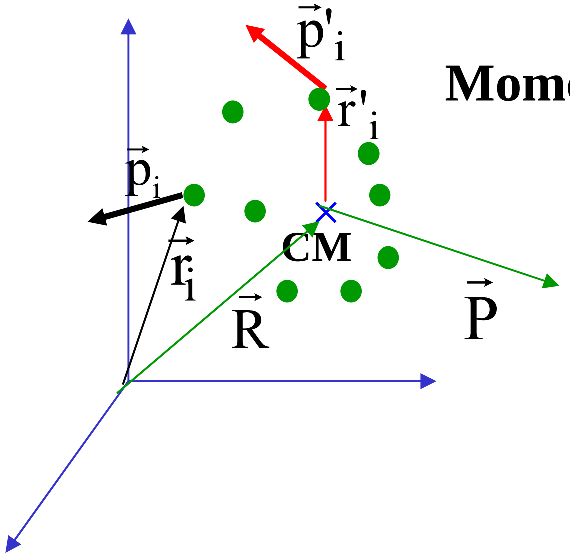
v_{max} ? Tiempo que tarda en alcanzarla?

$x(t)$? $\quad x(t) - x_0 = \int_{v(0)}^{v(t)} v_2 dt$

Chantal Ferrer Roca 2008

PROBLEMA 4.4 del boletín: cohete con varias etapas

3. Conservación del momento angular de un sistema.



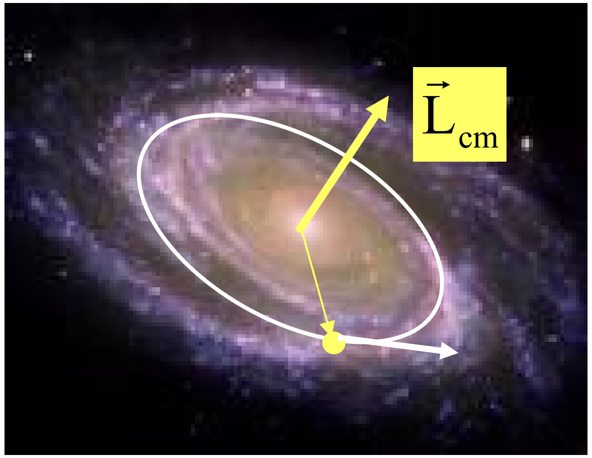
Momento angular total del sistema $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$

(primer teorema de König)

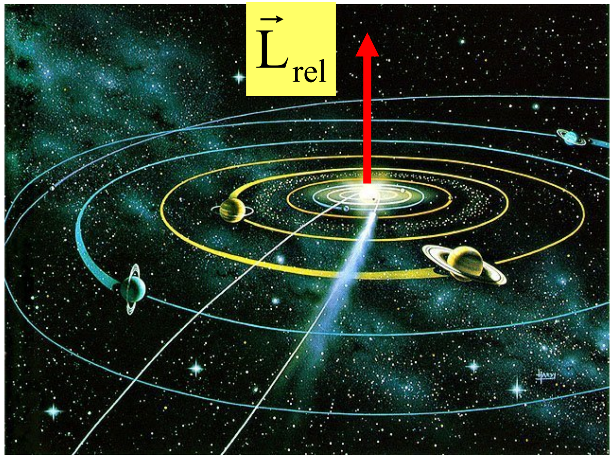
$$\boxed{\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i \vec{r}\,'_i \times \vec{p}\,'_i = \vec{L}_{cm} + \vec{L}_{rel}}$$

L del CM respecto al origen

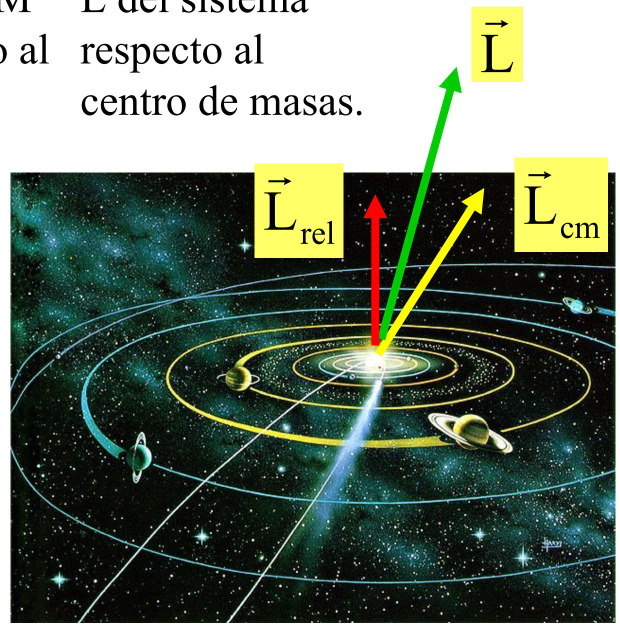
L del sistema respecto al centro de masas.



Movimiento del CM del sistema solar alrededor del centro de la galaxia



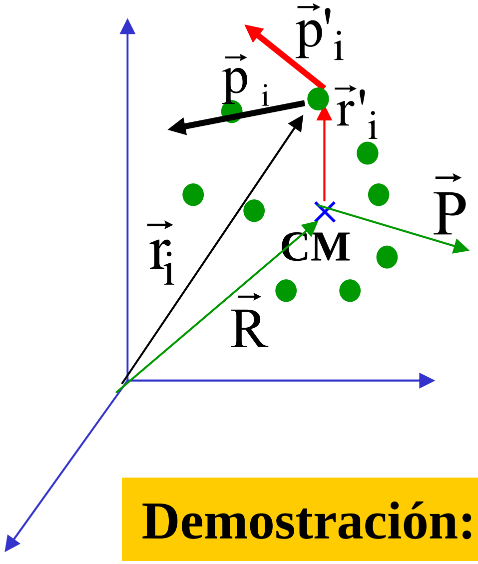
Momento angular de todos los cuerpos del sistema solar (planetas, etc.) respecto al CM del sistema solar



Momento angular total (suma de los anteriores)

Chantal Ferrer Roca 2008

3. Conservación del momento angular de un sistema.



Momento angular total del sistema

(primer teorema de König)

$$\boxed{\vec L=\vec R\times\vec P+\sum_i \vec r'_i\times\vec p'_i=\vec L_{cm}+\vec L_{rel}}$$

L del CM respecto al origen

L del sistema respecto al centro de masas.

Demostración: $\vec r_i{}'=\vec r_i-\vec R$ **posición relativa** al CM (coordenadas relativas)

$$\sum_i m_i\vec r'_i=\sum_i m_i\vec r_i-\sum_i m_i\vec R=M\vec R-M\vec R=\vec 0$$ (Posición del CM respecto al CM)

$$\vec L=\sum_i\vec r_i\times\vec p_i=\sum_i(\vec r_i{}'+\vec R)\times m_i(\dot{\vec r}_i{}'+\dot{\vec R})=\sum_i m_i\left[(\vec r_i{}'\times\dot{\vec r}_i{}')+(\vec r_i{}'\times\dot{\vec R})+(\vec R\times\dot{\vec r}_i{}')+(\vec R\times\dot{\vec R})\right])$$

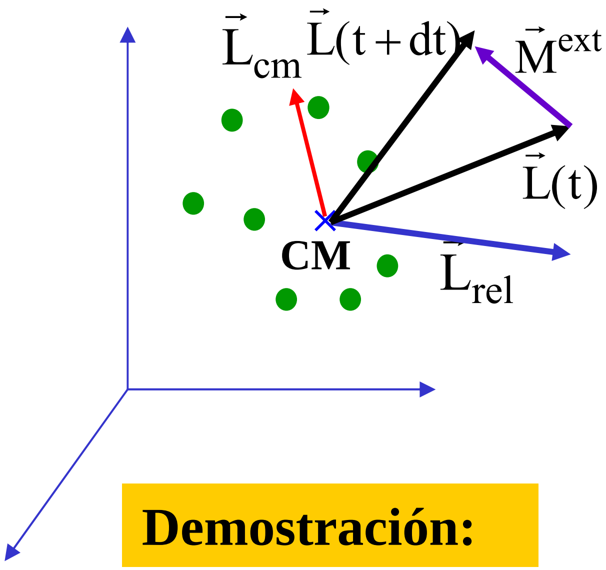
$$\sum_i(m_i\vec r'_i)\times\dot{\vec R}+\vec R\times\sum_i(m_i\dot{\vec r}_i{}')=(\vec 0\times\dot{\vec R})+(\vec R\times\vec 0)=\vec 0$$

$$\vec L=\sum_i m_i\left[(\vec r_i{}'\times\dot{\vec r}_i{}')+(\vec R\times\dot{\vec R})\right]=\sum_i\vec r'_i\times\vec p'_i+\vec R\times\vec P=\vec L_{rel}+\vec L_{cm}$$

Chantal Ferrer Roca 2008

3. Conservación del momento angular de un sistema.

Chantal Ferrer Roca 2008



$$\boxed{\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{ext}}$$

conservación $\boxed{\text{Si} \quad \dot{\vec{L}} = \vec{M}^{ext} = 0, \quad \vec{L} = cte}$

Demostración:

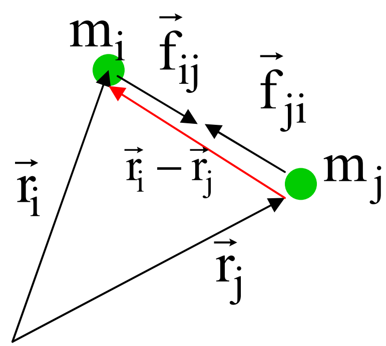
$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{f}_i \qquad \sum_{i,j\neq i} (\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}) = 0$$

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times (\vec{F}_i^{ext} + \vec{f}_i) = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}) + \underbrace{\sum_{i,j\neq i} (\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij})}_{\text{nulo}} = \sum_i \vec{M}_i^{ext} = \vec{M}^{ext}$$

$$\vec{f}_i = \sum_j \vec{f}_{ij}$$

nulo

$$\sum_{i,j\neq i} (\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}) = \sum_{i<j} (\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}) + (\vec{r}_j \times \vec{f}_{ji}) = \sum_{i<j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} = 0$$

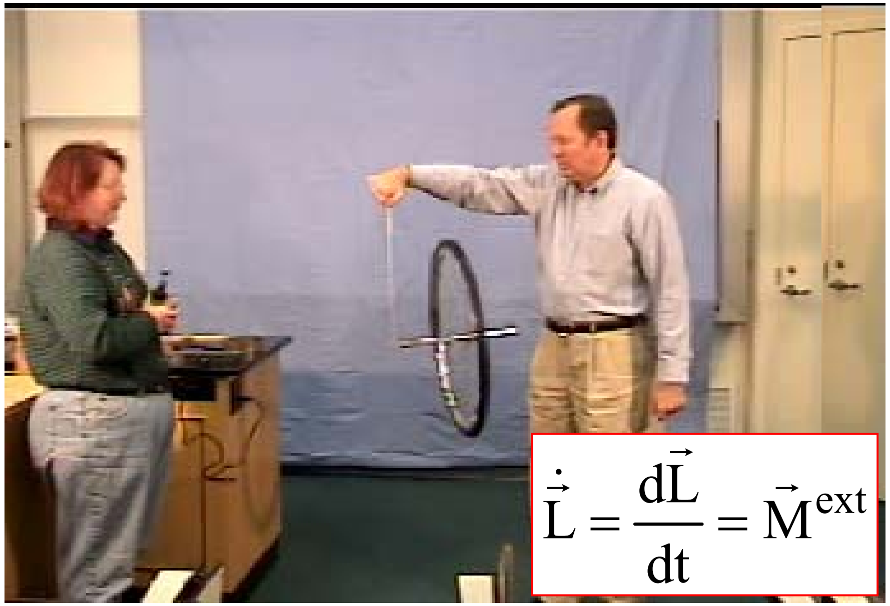


si las f internas son de tipo central, su momento se anula

3. Conservación del momento angular de un sistema

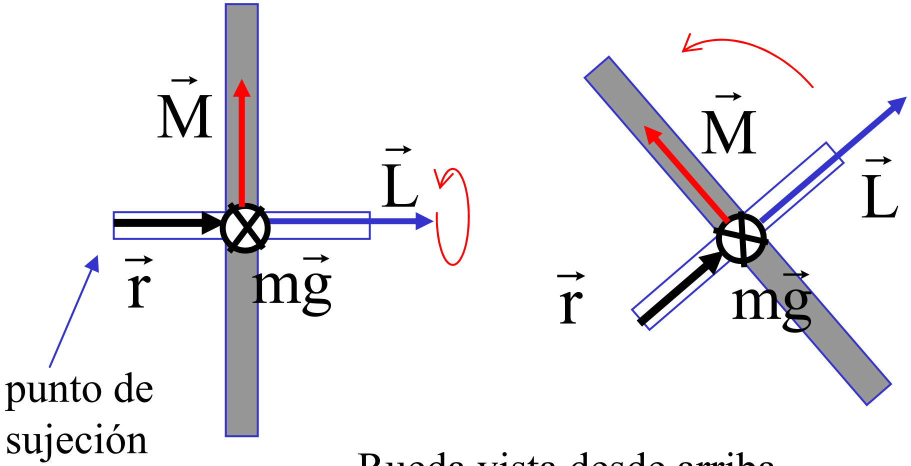
FENÓMENOS

Chantal Ferrer 2008



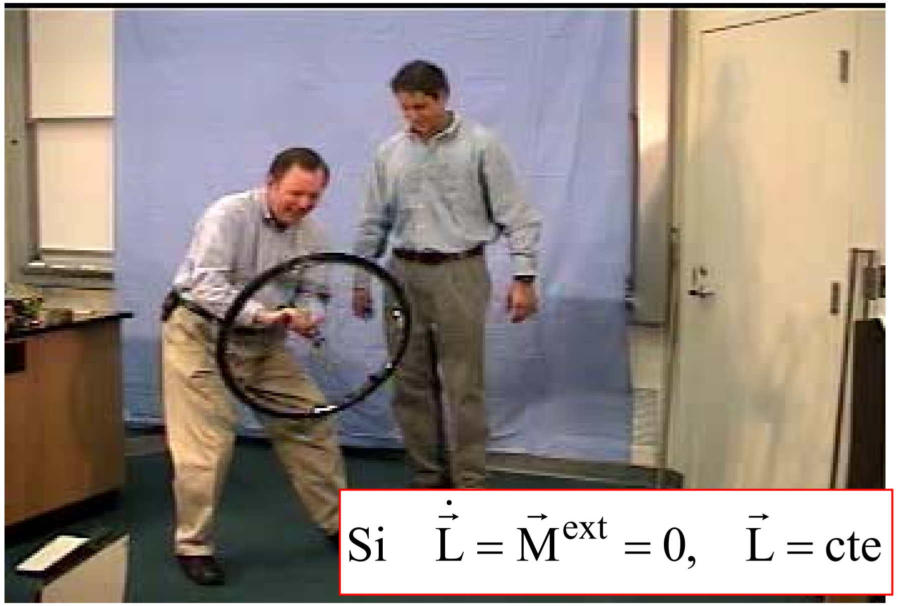
$$\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{ext}$$

Demostración experimental en clase

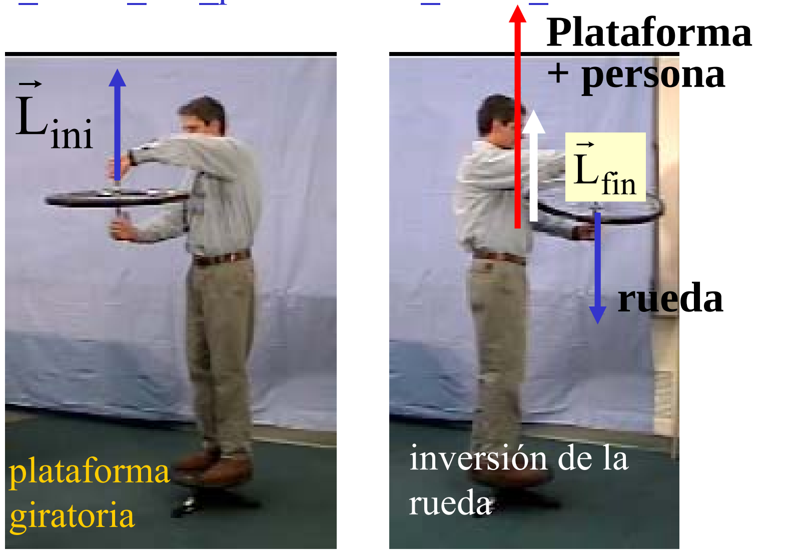


Rueda vista desde arriba

http://www.wfu.edu/physics/demolabs/demos/avimov/mechanics/gyroscope/bicycle_wheel.MPG
http://www.wfu.edu/physics/demolabs/demos/avimov/mechanics/bike_wheel_and_platform/bike_wheel_rotation.MPG



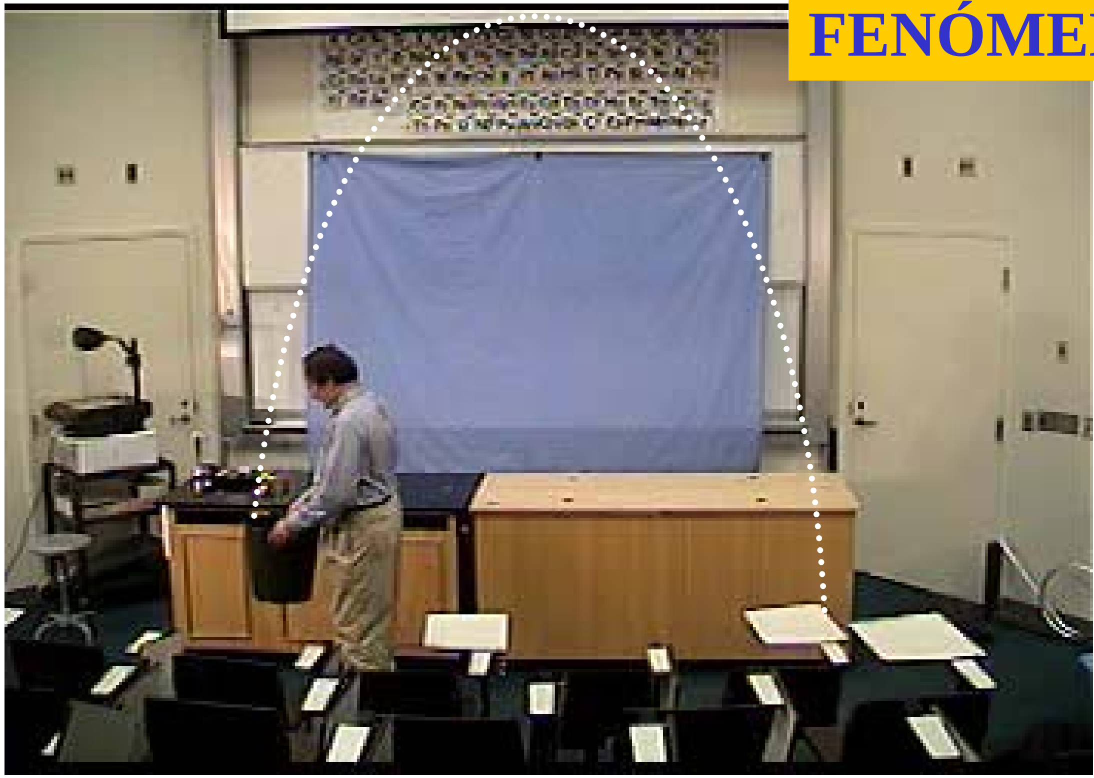
$$\text{Si} \quad \dot{\vec{L}} = \vec{M}^{ext} = 0, \quad \vec{L} = \text{cte}$$



$$\vec{L}_{fin} = \vec{L}_{rueda} + \vec{L}_{persona}$$

4. Energía cinética y potencial de un sistema. Conservación de la energía mecánica

FENÓMENOS



http://www.wfu.edu/physics/demolabs/demos/avimov/mechanics/cm_in_parabolic/trashcan-throw.MPG

Segundo teorema de König.

Energia cinética del sistema

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M \left|\vec{V}_{cm}\right|^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left|\vec{v}_i{'}\right|^2}$$

T del CM (de una partícula de masa M que se mueve a la velocidad del CM)

T de las partículas individuales en relación al CM

Caso particular: en sólidos rígidos las partículas del sistema mantienen las distancias relativas fijas y solo pueden girar respecto al CM

Chantal Ferrer Roca 2008

4. Energía cinética y potencial de un sistema. Conservación de la energía mecánica

Segundo teorema de König.

Energia cinética del sistema

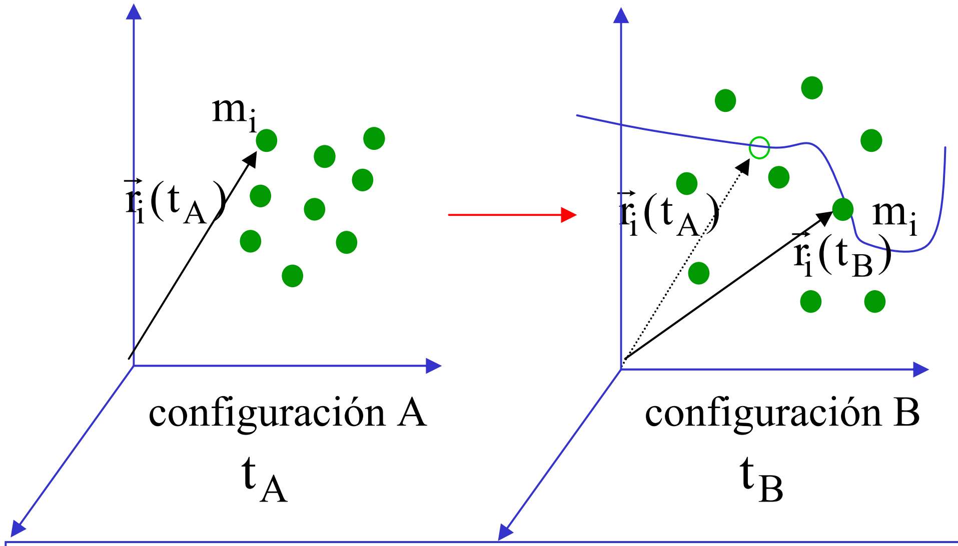
$$\boxed{T = \frac{1}{2} M \left|\vec{V}_{cm}\right|^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left|\vec{v}_i{}'\right|^2}$$

$$\boxed{T = \sum_{i=1}^{N} T_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left|\vec{v}_i\right|^2}$$

T del CM (como si fuera una partícula de masa M que se mueve a la velocidad del CM)

T de las partículas individuales en relación al CM

Demostración:



Trabajo dinámico que lleva el sistema de la configuración A a la B siguiendo trayectorias para cada partícula

$$W_{din} = \sum_{i=1}^{N} \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_A}^{t_B} d\left(\frac{1}{2} m_i \left|\vec{v}_i\right|^2\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(T_i(t_B) - T_i(t_A)\right) = \Delta T$$

$$\boxed{T = \sum_{i=1}^{N} T_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left|\vec{v}_i\right|^2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left|\vec{v}_i{}'\right|^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \vec{V}^2 + \dot{\vec{R}} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}'_i$$

nulo

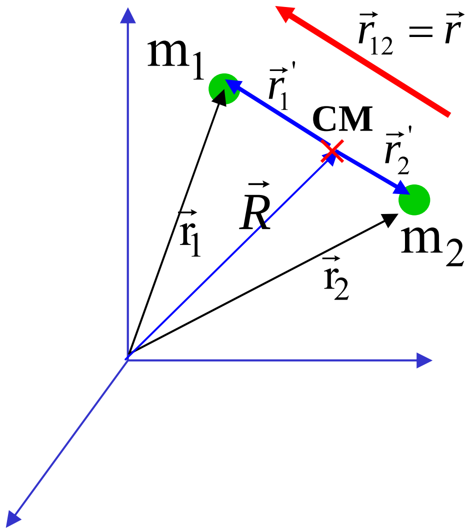
$$\left|\vec{v}_i\right|^2 = \left|\dot{\vec{r}}_i{}' + \dot{\vec{R}}\right|^2 = \left|\dot{\vec{r}}_i{}'\right|^2 + \left|\dot{\vec{R}}\right|^2 + 2\dot{\vec{r}}_i{}' \cdot \dot{\vec{R}}$$

Chantal Ferrer Roca 2008

5. El caso de dos cuerpos. Momento angular

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_{cm} + \vec{L}_{rel}}$$

PROBLEMA 4.3 d) y e)



$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$ **coordenadas del CM**

coordenadas relativas al CM $\vec{r}'_1 = \vec{r}_1 - \vec{R} \quad \vec{r}'_2 = \vec{r}_2 - \vec{R}$

$\vec{r} = \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_1' - \vec{r}_2'$ **posición relativa (de 1 respecto a 2)**

Se demuestra que:

Idem para las velocidades

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \underbrace{\frac{m_2\vec{r}}{m_1 + m_2}}_{\vec{r}_1'} \qquad \vec{r}_2 = \vec{R} - \underbrace{\frac{m_1\vec{r}}{m_1 + m_2}}_{\vec{r}_2'}$$

$$\vec{L}_{rel} = \vec{r}'_1 \times \vec{p}'_1 + \vec{r}'_2 \times \vec{p}'_2 = \frac{m_2}{M}\vec{r} \times m_1\vec{v}'_1 - \frac{m_1}{M}\vec{r} \times m_2\vec{v}'_2 = \vec{r} \times \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}\right)$$

$$\boxed{\vec{L}_{rel} = \vec{r} \times (\mu\vec{v})}$$

velocidad relativa $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$

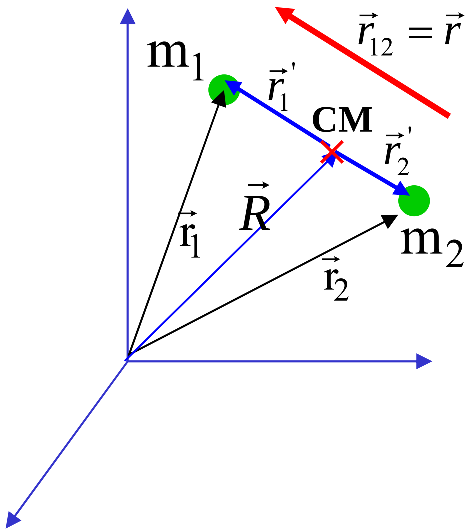
Masa reducida $\boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$ $\quad si\ m_1 >> m_2, \quad \mu = m_2$

Chantal Ferrer Roca 2008

5. El caso de dos cuerpos. Energía Cinética

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M \vec{V}_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu \vec{v}^2}$$

PROBLEMA 4.3 c)



$$\dot{\vec{R}} = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2}$$ **velocidad del CM**

velocidades relativas al CM $\quad \dot{\vec{r}}'_1 = \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{R}} \qquad \dot{\vec{r}}'_2 = \dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{R}}$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{r}}_1' - \dot{\vec{r}}_2'$$ **velocidad relativa (de 1 respecto a 2)**

Se demuestra que: $\quad \dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{R}} + \underbrace{\frac{m_2 \dot{\vec{r}}}{m_1 + m_2}}_{\dot{\vec{r}}_1'} \qquad \dot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{R}} - \underbrace{\frac{m_1 \dot{\vec{r}}}{m_1 + m_2}}_{\dot{\vec{r}}_1'}$

$$T_{rel} = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{M}\vec{v}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{M}\vec{v}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}^2$$

$$\boxed{T_{rel} = \frac{1}{2}\mu \vec{v}^2}$$

velocidad relativa

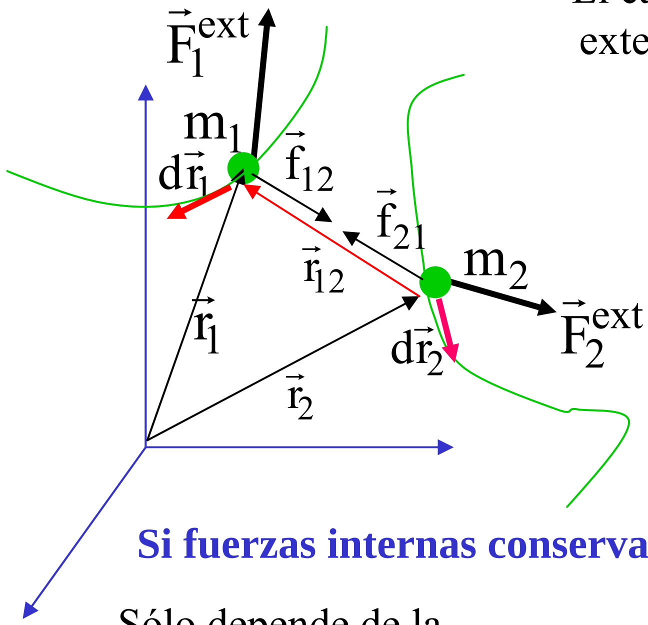
Masa reducida

$$\boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}}$$

$si\ m_1 >> m_2, \quad \mu = m_2$

Chantal Ferrer Roca 2008

4. Conservación de la energía mecánica. El caso de dos cuerpos.



El cambio en la energía cinética es igual al trabajo efectuado por las fuerzas externas e internas sobre el sistema

$$dW = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 \; = \vec{F}_1^{ext} d\vec{r}_1 + \vec{F}_2^{ext} d\vec{r}_2 + \vec{f}_{12} d\vec{r}_{12}$$

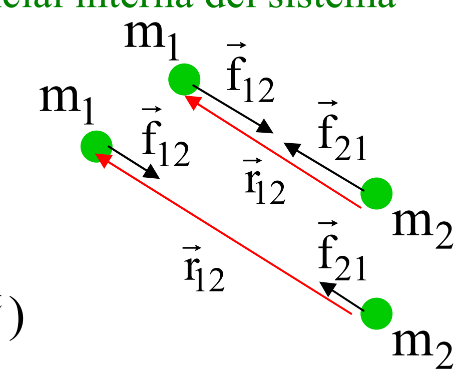
$$W = \underbrace{\left(\int_{\Gamma,A_1}^{B_1} \vec{F}_1^{ext} d\vec{r}_1 + \int_{\Gamma,A_2}^{B_2} \vec{F}_2^{ext} d\vec{r}_2 \right)}_{W^{ext}} + \underbrace{\int_{\Gamma,A}^{B} \vec{f}_{12} d\vec{r}_{12}}_{W^{int}}$$

Si fuerzas internas conservativas $\quad \vec{f}_{12} = -\vec{\nabla} U_{12}(r_{12})$

Energía potencial interna del sistema

Sólo depende de la distancia relativa

$$W_{int} = \int_{\Gamma,A_{1,2}}^{B_{1,2}} \vec{f}_{12} d\vec{r}_{12} = -\int_{\Gamma,A_{1,2}}^{B_{1,2}} dU_{12} = -\Delta U_{12}$$



fuerzas externas conservativas

$$W_{ext} = -\int_{A_1}^{B_1} \vec{\nabla}_1 U_1 d\vec{r}_1 - \int_{A_2}^{B_2} \vec{\nabla}_2 U_2 d\vec{r}_2 \; = -\int_{A_1}^{B_1} dU_1 - \int_{A_2}^{B_2} dU_2 = -\Delta(U_1^{ext} + U_2^{ext})$$

$$W^{ext} + W^{int} = -\Delta U^{ext} - \Delta U_{12} \; = \Delta T$$

Energía propia del sistema

$$\Delta(\underbrace{T + U^{ext} + U_{12}}_{E}) = 0$$

$$\boxed{E = (T + U_{12}) + U^{ext}}$$ **constante**

Chantal Ferrer Roca 2008

4. Conservación de la energía mecánica. El caso de dos cuerpos.

$$\boxed{\Delta E = 0}$$

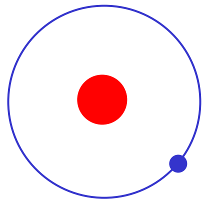
$$\boxed{E = (T + U_{12}) + U^{ext}}$$

constante

Energía propia

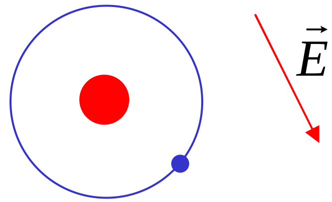
EJEMPLOS:

Si un sistema está aislado la energía propia se conserva



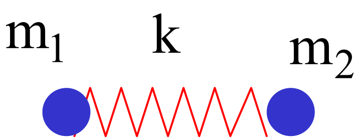
átomo de hidrógeno aislado

$$E = \underbrace{T_p + T_e}_{T_{CM} + T_{rel}} - k\frac{e^2}{r} = E_{propia} = cte$$



átomo de hidrógeno en un campo de fuerzas

$$E = \underbrace{T_p + T_e - k\frac{e^2}{r}}_{E_{propia}} + U_p^{ext} + U_e^{ext} = cte$$



masas unidas por muelle

En el seno del campo gravitatorio

$$E = \underbrace{\overbrace{T_1 + T_2}^{T_{CM} + T_{rel}} + \frac{1}{2}kx^2}_{E_{propia}} + mgh_1 + mgh_2 = cte$$

más ejemplos en el tema de potenciales centrales (problema de dos cuerpos)

$$E_{interna} = T_{rel} + U_{12}$$

Chantal Ferrer Roca 2008

4. Conservación de la energía mecánica

CASO general

Demostración:

$$W = \sum_{i=1}^{N} \int_A^B \vec{F}_i^{ext} \cdot d\vec{r}_i + \sum_{i,j\neq i=1}^{N} \int_A^B \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_i = W^{ext} + W^{int}$$

fuerzas internas conservativas $\vec{f}_{ij} = -\vec{\nabla}_i U'_{ij}$

Energía potencial interna del sistema

$$W^{int} = \sum_{i<j} \int_A^B (\vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_j) = \sum_{i<j} \int_A^B \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = -\sum_{i<j} \int_A^B dU_{ij} = -\sum_{i<j} \Delta U_{ij} = -\Delta U_{int}$$

fuerzas externas conservativas $\vec{F}_i^{ext} = -\vec{\nabla}_i U_i$

$$W^{ext} = -\sum_i \int_{A_i}^{B_i} \vec{\nabla}_i U_i^{ext} \cdot d\vec{r}_i = -\sum_i \int_{A_i}^{B_i} dU_i^{ext} = -\sum_i \Delta U_i^{ext} = -\Delta U^{ext}$$

$$\boxed{\Delta U = \Delta U^{int} + \Delta U^{ext}}$$

$$W^{ext} + W^{int} = -\Delta U^{ext} - \Delta U^{int} = \Delta T \qquad \Delta(T + U^{int} + U^{ext}) = 0$$

La energía total del sistema se conserva

$$E = T + U^{int} + U^{ext} = cte$$

Energía propia del sistema $E_{propia} = T_{cm} + E_{interna}$

$$E_{interna} = T_{rel} + U^{int}$$

en Termodinámica se considera sólo la energía interna, sin importar la T_{CM} y se cumple que:

$$\boxed{\Delta E_{interna} = W_{ext} = W_{ext(P)} + Q}$$

1ª ley de la Termodinámica

Chantal Ferrer Roca 2008

6. Simetrías de la energía potencial y leyes de conservación


Emmy Noether

Para cada regla de simetría en la naturaleza existe una ley de conservación correspondiente (versión pedestre del teorema de Noether)

1. Homogeneidad del espacio : Conservación del momento lineal

invariancia frente a traslaciones espaciales $\delta U = 0$

$$0 = U(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1, \vec{r}_2 + \delta\vec{r}_2, ..., t) - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., t) = \underbrace{\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_1}}_{-\vec{F}_1}\delta\vec{r}_1 + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_2}}_{-\vec{F}_2}\delta\vec{r}_2 + ...$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... = 0 \rightarrow \boxed{\vec{P} = \text{cte}}$$

2. Homogeneidad del tiempo : Conservación de la energía

invariancia frente a traslaciones temporales $0 = \delta U = \frac{\partial U}{\partial t}\delta t$

$$0 = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., t + \delta t) - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., t) = \frac{\partial U}{\partial t}\delta t$$

$$\frac{dU}{dt} = \vec{\nabla}U \cdot \dot{\vec{r}}_i + \frac{\partial U}{\partial t} = -\sum_i \vec{F}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = -\frac{dT}{dt}$$

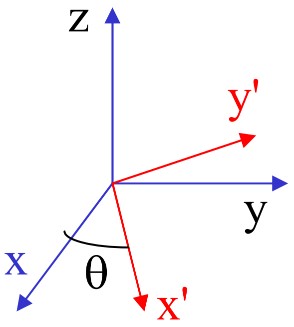
$$\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0 \rightarrow \boxed{E = \text{cte}}$$

Chantal Ferrer Roca 2008

6. Simetrías de la energía potencial y leyes de conservación

Para cada regla de simetría en la naturaleza existe una ley de conservación correspondiente (versión pedestre del teorema de Noether)

3. Isotropía del espacio : Conservación del momento angular



$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{G_z(\theta)} \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

matriz de giro alrededor del eje z

$$\text{si } \delta\theta <<, \quad G_z(\delta\theta)\vec{r} \approx \begin{pmatrix}x+\delta\theta y\\ y-\delta\theta x\\ z\end{pmatrix}$$

invariancia frente a giros $\delta U = 0$

$$0 = U(G\vec{r}_1, G\vec{r}_2, \ldots, t) - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, t) = \frac{\partial U}{\partial x_1}(\delta\theta y_1) + \frac{\partial U}{\partial y_1}(-\delta\theta x_1) + \ldots..$$

$$= -F_{1x}(\delta\theta y_1) + F_{1y}(\delta\theta x_1) + \ldots.. = \left[\left(\vec{r}_1 \times \vec{F}_1\right)_z + \ldots.\right]\delta\theta$$

$$M_{1_z} + M_{2_z} + \ldots. = 0 \rightarrow \quad L_z = \text{cte}$$

idem para giros alrededor de otros ejes

$$\boxed{\vec{L} = \text{cte}}$$

Conservación de L a partir de un principio general, sin necesidad de invocar leyes de Newton

Chantal Ferrer Roca 2008

6. Simetrías de la energía potencial y leyes de conservación

EJEMPLO un sistema de dos partículas se mueve en 3 dimensiones con energía potencial

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = x_1^2 + y_2^2 - (z_1 - z_2)^2 \quad J$$

Determina las componentes del momento de la partícula 1 que se conservan
Determina las componentes del momento total que se conservan
Determina las componentes del momento de la partícula 2 que se conservan

EJEMPLO un sistema de dos partículas se mueve en 3 dimensiones con energía potencial

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 3(z_1 + z_2) + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \quad J$$

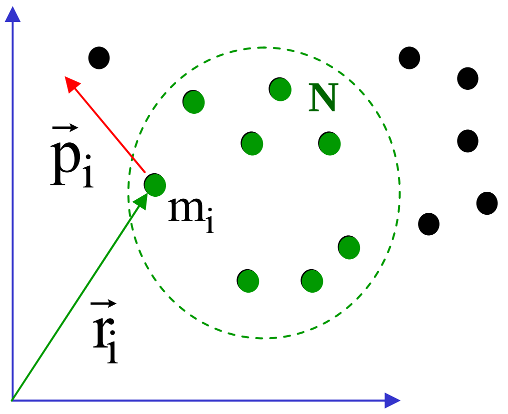
Calcula la fuerza total ejercida sobre el sistema
Cómo cambia la Energía potencial bajo un desplazamiento del sistema $\vec{a} = (1,1,1)$
Determina las componentes del momento total que se conservan
Determina las componentes del momento angular total que se conservan

Chantal Ferrer Roca 2008

7. Teorema del Virial

Chantal Ferrer Roca 2008

Si son magnitudes acotadas (orb. planetarias, mov. periódicos, etc.)



$$S(t) = \sum_i \vec{p}_i \vec{r}_i \quad \text{acotada}$$

$$\langle \dot{S}(t) \rangle ?$$

Promedio temporal $\langle A \rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau A\,dt$

$$\langle \dot{S}(t) \rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \dot{S}\,dt = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau dS = \frac{S(\tau) - S(0)}{\tau}$$

movimiento periódico: si τ es múltiplo del periodo, S(τ)=S(0)
movimiento no periódico: S(t) acotada, si τ es suficientemente largo,

$$\langle \dot{S}(t) \rangle = 0$$

Luego

$$\overbrace{\left\langle \sum_i \vec{p}_i \dot{\vec{r}}_i \right\rangle}^{2\langle T \rangle} = -\left\langle \sum_i \overset{\vec{F}_i}{\dot{\vec{p}}_i} \vec{r}_i \right\rangle$$

$$\boxed{\langle T \rangle = -\frac{1}{2}\left\langle \sum_i \vec{F}_i \vec{r}_i \right\rangle}$$

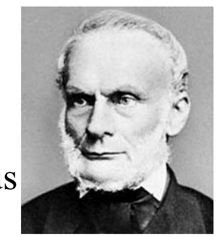
Virial (Clausius)

Si las fuerzas son conservativas

$$\boxed{\langle T \rangle = \frac{1}{2}\left\langle \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_i U_i \right\rangle}$$

Si hay fuerzas internas

$$\boxed{\langle T \rangle = -\frac{1}{2}\left\langle \left(\sum_i \vec{F}_i^{ext} \vec{r}_i + \sum_{i,j} f_{ij} \vec{r}_{ij}\right) \right\rangle}$$



Rudolph Clausius
(1822-1888)

Chantal Ferrer Roca 2008

7. Teorema del Virial

caso : **Fuerza central inversamente proporcional a una potencia de r**

Fuerza central $\Rightarrow$ Fuerza conservativa

$$F \propto r^n,\ U = kr^{n+1}$$

fuerza conservativas

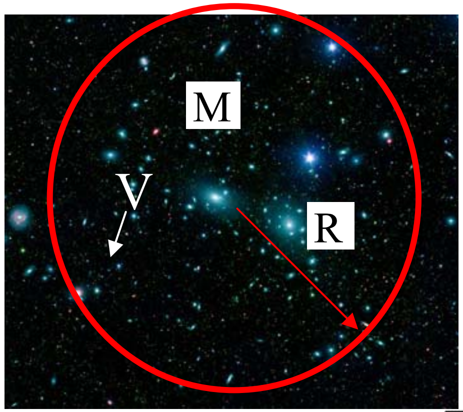
$$\boxed{\langle T \rangle} = \frac{1}{2}\left\langle \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_i U_i \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle r \cdot \frac{dU}{dr} \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle r \cdot k(n+1) r^n \right\rangle = \boxed{\frac{n+1}{2}\langle U \rangle}$$

CASOS PARTICULARES con los que este resultado es coherente

POTENCIAL ELÁSTICO $F = -kr,\ U = \frac{1}{2}kr^2$ $\quad n = 1 \quad \langle T \rangle = \langle U \rangle$

POTENCIAL GRAVITATORIO $F = Ar^{-2},\ U = Ar^{-1}$ $\quad n = -2 \quad 2\langle T \rangle = -\langle U \rangle$

Cluster de galaxias "Coma"



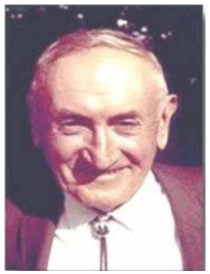
En 1933, F. Zwicky, aplicando el teorema del virial a un cúmulo de galaxias, dedujo una masa del cluster muy superior (100-10 veces) a la observada (Primera predicción de la materia oscura, no aceptada por la comunidad científica hasta 40 años después, con los estudios de Vera Rubin).

$$2\langle T \rangle = MV^2 = \frac{GM^2}{R} \approx \langle U \rangle$$

V = velocidad promedio de las galaxias en el cluster

$$M = \frac{RV^2}{G}$$

Estimación de la masa del cluster



Fritz Zwicky

7. Teorema del Virial

Chantal Ferrer Roca 2008

Caso: **Ecuación de estado de los gases perfectos**

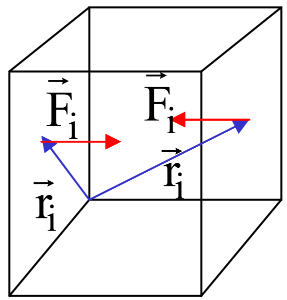
Moléculas de un gas contenido en un cubo de lado a.
Para cada pared sin vértice en el origen:

$$\sum_i \vec{F}_i^{ext}\vec{r}_i = -(Pa^2)a = -PV$$

fuerza de las paredes.
Estadísticamente $\perp$ a ellas

Sólo contribuyen tres paredes del cubo (aquellas en la que el producto escalar no es nulo):

$$\sum_i \vec{F}_i^{ext}\vec{r}_i = -3PV$$



$$\langle T\rangle = -\frac{1}{2}\left\langle \left(\sum_i \vec{F}_i^{ext}\vec{r}_i + \sum_{i,j}\vec{f}_{ij}\vec{r}_{ij}\right)\right\rangle = \frac{3}{2}PV - \frac{1}{2}\left\langle \sum_{i,j}\vec{f}_{ij}\vec{r}_{ij}\right\rangle$$

GAS IDEAL:
fuerzas internas nulas

$$\boxed{PV} = \frac{2}{3}\langle T\rangle + \frac{1}{3}\cancel{\left\langle \sum_{i,j}\vec{f}_{ij}\vec{r}_{ij}\right\rangle} = \boxed{Nk\tau}$$

Si las fuerzas intermoleculares son atractivas, término negativo

para una molécula

$$\langle T\rangle = \frac{1}{2}mv_{rms}^2 = \frac{3}{2}k\tau$$

temperatura

para N moléculas

$$\langle T\rangle = N\frac{1}{2}mv_{rms}^2 = \frac{3}{2}Nk\tau$$