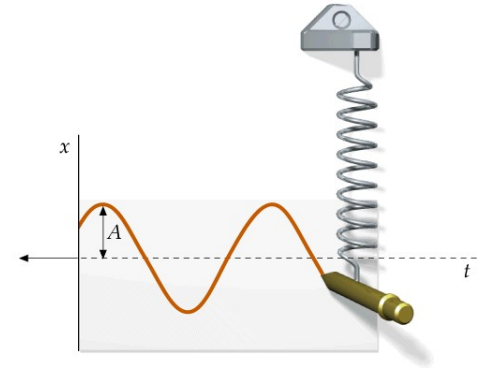


# TEMA 3. OSCILACIONES SIMPLES

Chantal Ferrer Roca 2008



1. El oscilador armónico simple. Ejemplos de fenómenos que responden a este modelo.
2. Energía del oscilador armónico simple.
3. Superposición de movimientos armónicos: interferencias, pulsaciones y trayectorias de Lissajous.
4. Oscilaciones amortiguadas. Caso inframortiguado: tiempo de relajación y factor de calidad.
5. Oscilaciones forzadas. Efectos Transitorios.
6. Fuerza de tipo armónico. Curva de Resonancia. Amplitud de absorción y amplitud elástica.
7. Fuerza periódica. Principio de superposición y Teorema de Fourier.

APÉNDICE: Ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes

Bibliografía: [Marion], [Kibble], [AFinn], [French], [Feynman], [Mec-Berk]

# TEMA 3. OSCILACIONES SIMPLES

## NOTA IMPORTANTE:

Los contenidos de este documento representan un esquema de los conceptos fundamentales del tema, por lo que en ningún caso se trata de apuntes completos. Este esquema se complementa con explicaciones, razonamientos, ejemplos y problemas que se desarrollan durante las clases, así como con alguno(s) de los libros que se incluyen en la bibliografía

Bibliografía: [Marion], [Kibble], [AFinn], [French], [Feynman], [Mec-Berk]

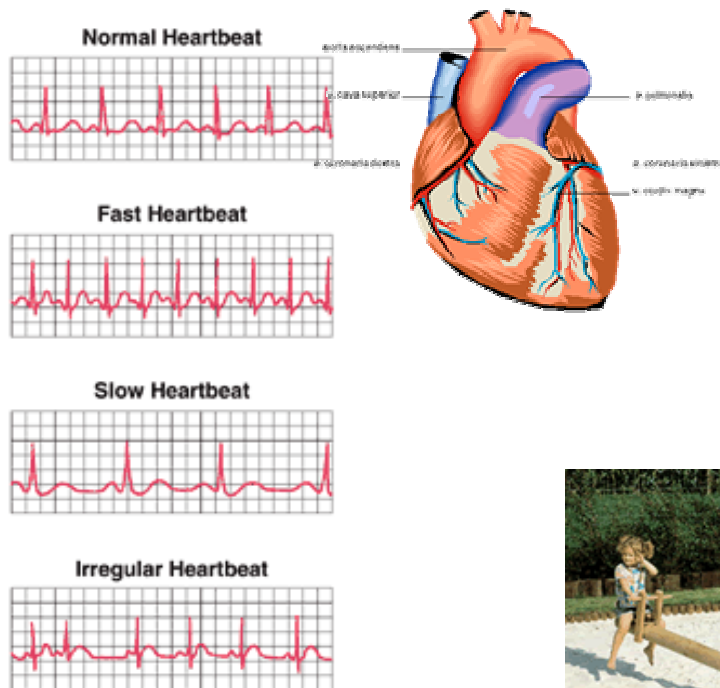
**Chantal Ferrer Roca 2008**

# INTRODUCCIÓN

**Movimientos periódicos (de vaivén, oscilatorios o vibratorios)**  
alrededor de una posición de equilibrio

**Respiración**  
**Latidos del corazón**  
**Tímpano al oír un sonido**  
**Pestañear**

**Giro de una rueda**  
**Precesión de una peonza**  
**Mareas**  
**Movimientos planetarios**  
**Ciclo de intensidad solar**  
**Ciclos económicos**



**Columpio**  
**Balancín**  
**Mecedora**

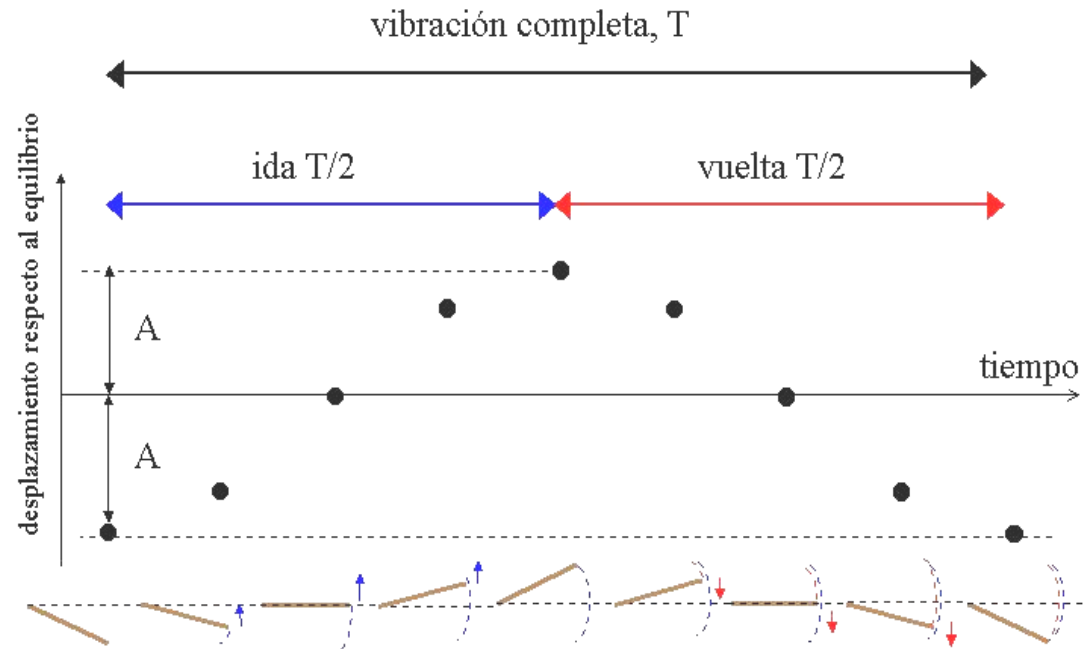
**Chantal Ferrer Roca 2008**

# 1. El oscilador armónico simple (O.A.S.)

**Movimientos periódicos (de vaivén, oscilatorio o vibratorio)**

alrededor de una posición de equilibrio

**El más sencillo de describir físicamente: Movimiento Armónico Simple**



Péndulo

Masas sujetas a resortes o muelles

Vibración de los átomos de un sólido

Vibración de átomos dentro de una molécula

Vibración de electrones de una antena radiante, de un plasma, en los átomos, etc...

En este tema : un solo cuerpo que vibra en **1D** o **2D**

Chantal Ferrer Roca 2008

# 1. El oscilador armónico simple (O.A.S.)

Es un **modelo de gran utilidad en la explicación de fenómenos físicos, descrito por la ecuación diferencial:**

$$\ddot{\Psi} + \omega_0^2 \Psi = 0$$

$\Psi$  magnitud cualquiera (distancia, ángulo, carga eléctrica, función de ondas, etc.)

$\omega_0$  pulsación o frecuencia angular propia del sistema (radianes/segundo)

$\omega_0 = 2\pi/T$ ,  $T$  período

**Solución:** cualquiera de las siguientes expresiones:

$$\Psi(t) = B_1 e^{i\omega_0 t} + B_2 e^{-i\omega_0 t}$$

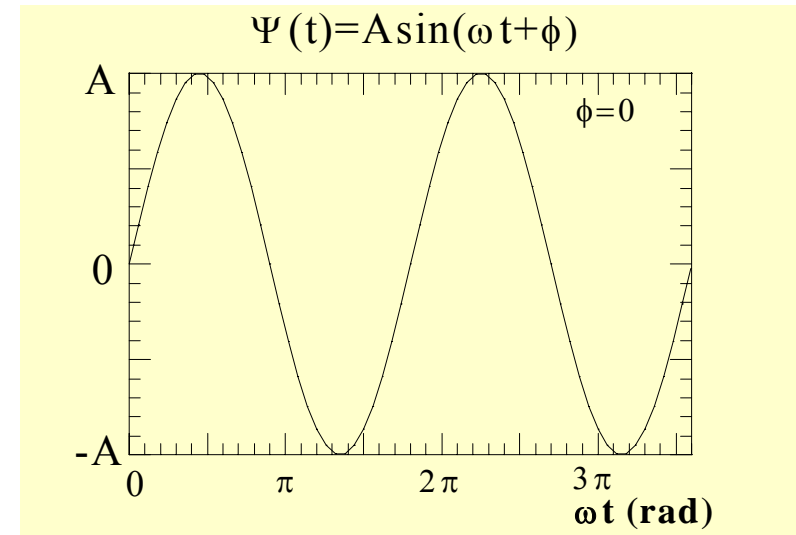
$$\Psi(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$$

$$\Psi(t) = B \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$\Psi(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$C_1 = A \cos \phi; C_2 = A \sin \phi$$

$$C_1 = B_1 + B_2; C_2 = i(B_1 - B_2)$$

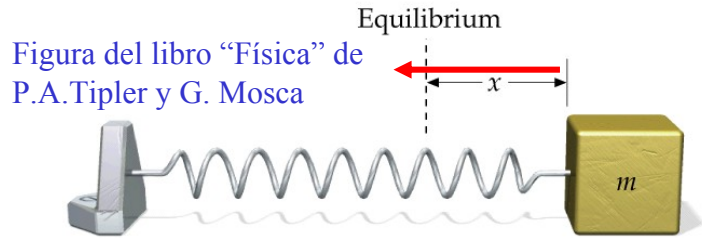


A amplitud del movimiento y  $\phi$  fase inicial.

# 1. El oscilador armónico simple (O.A.S.)

Ejemplos de fenómenos que responden a este modelo

$$\ddot{\Psi} + \omega^2 \Psi = 0$$



MASA CON RESORTE sin rozamiento

Si los desplazamientos  $x$  respecto a la posición de equilibrio son pequeños, se cumple la ley de Hooke:

$$F = -k(x - x_e) = ma$$

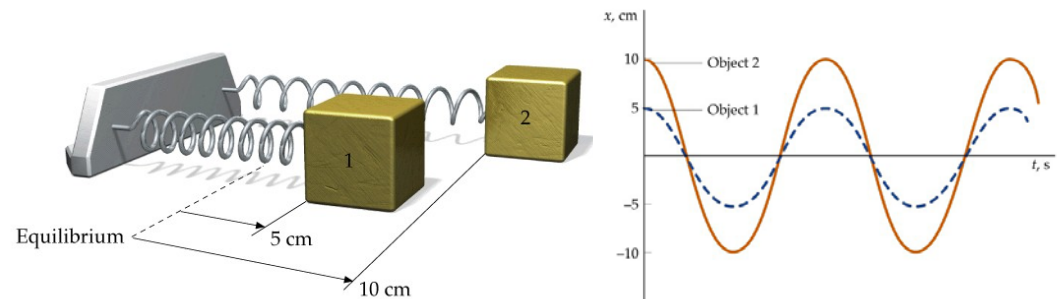
Ec. movimiento:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}(x - x_e) = 0$$

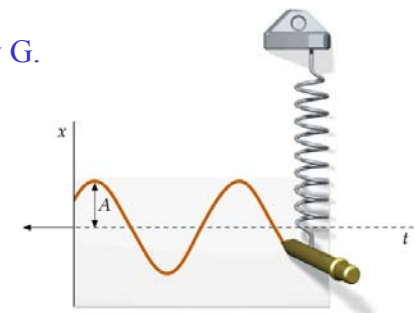
Solución:

$$x(t) - x_e = x_0 \cos(\omega t + \phi)$$

**OAS** con  $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$



Figuras del libro "Física" de P.A.Tipler y G. Mosca, Ed. Reverté, 2005



Chantal Ferrer Roca 2008

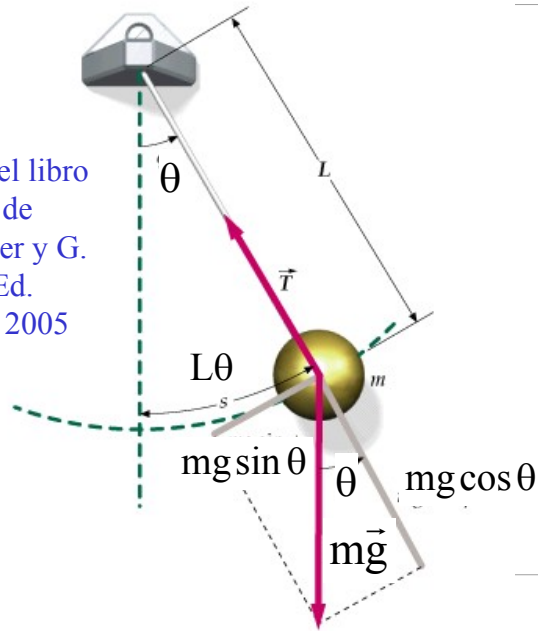


# 1. El oscilador armónico simple (O.A.S.)

Ejemplos de fenómenos que responden a este modelo

$$\ddot{\Psi} + \omega^2 \Psi = 0$$

Figura del libro  
"Física" de  
P.A.Tipler y G.  
Mosca, Ed.  
Reverté, 2005



PÉNDULO SIMPLE de longitud  $L$

$$F_{\phi} = ma_{\phi} \quad -mg \sin \theta = mL\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

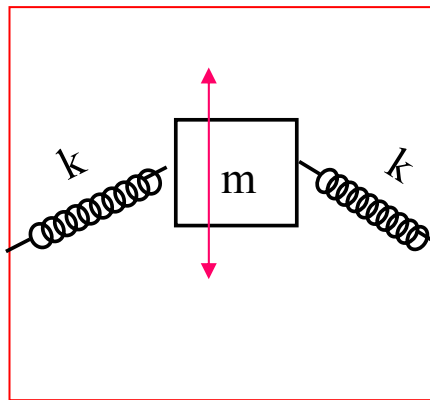
linearizando (ángulos pequeños)

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

**OAS** con  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$

$$\theta(t) = \theta_m \sin(\omega t + \phi)$$

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \phi)$$

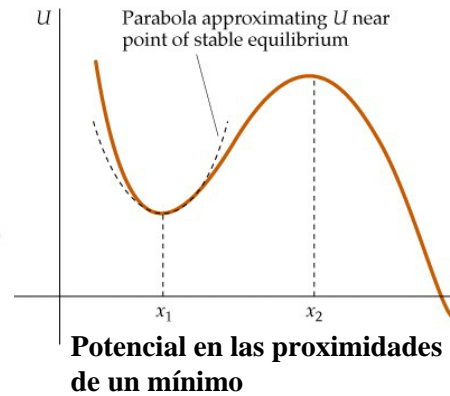
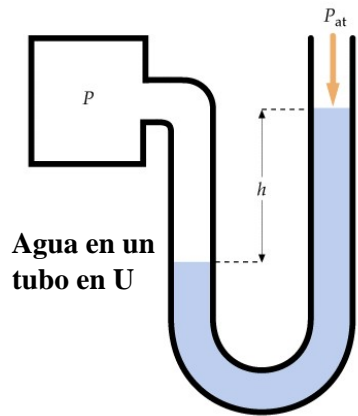


**OSCILACIONES TRANSVERSALES** de masa sujeta a un muelle que responde a la ley de Hooke: la fuerza recuperadora NO es lineal en general, pero puede ser linealizada, como en el caso anterior. (pequeñas oscilaciones)

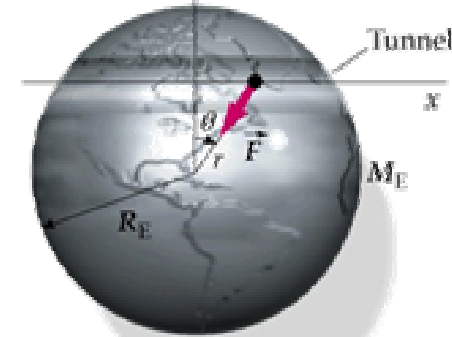
# 1. El oscilador armónico simple (O.A.S.)

Ejemplos de fenómenos que responden a este modelo

Chantal Ferrer Roca 2008



Partícula moviéndose en un tunel dentro de la Tierra a distancia variable del centro

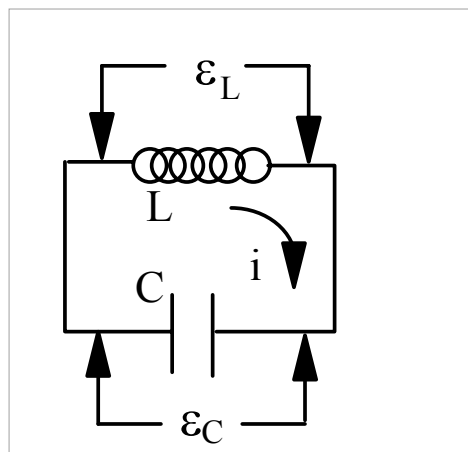


Figuras del libro "Física" de P.A.Tipler y G. Mosca, Ed. Reverté, 2005

$$\ddot{\Psi} + \omega^2 \Psi = 0$$

OTROS EJEMPLOS en los que hay una fuerza recuperadora lineal o que puede ser linealizada y que obliga a una masa puntual a oscilar alrededor de una **posición de equilibrio** que tomaremos como origen.

O bien, en un ámbito distinto (cargas y f.e.m.):



**CIRCUITO LC** ambas ddp son iguales  $\epsilon_C = \epsilon_L$

$$\epsilon_L = -L \frac{di}{dt} = -L\dot{q} \quad \epsilon_C = \frac{q}{C} \quad \ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

**OAS** con  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

$$q(t) = q_m \sin(\omega t + \phi)$$



# 1. El oscilador armónico simple (O.A.S.)

Ejemplos de fenómenos que responden a este modelo

¿posición de equilibrio? DISCUSIÓN

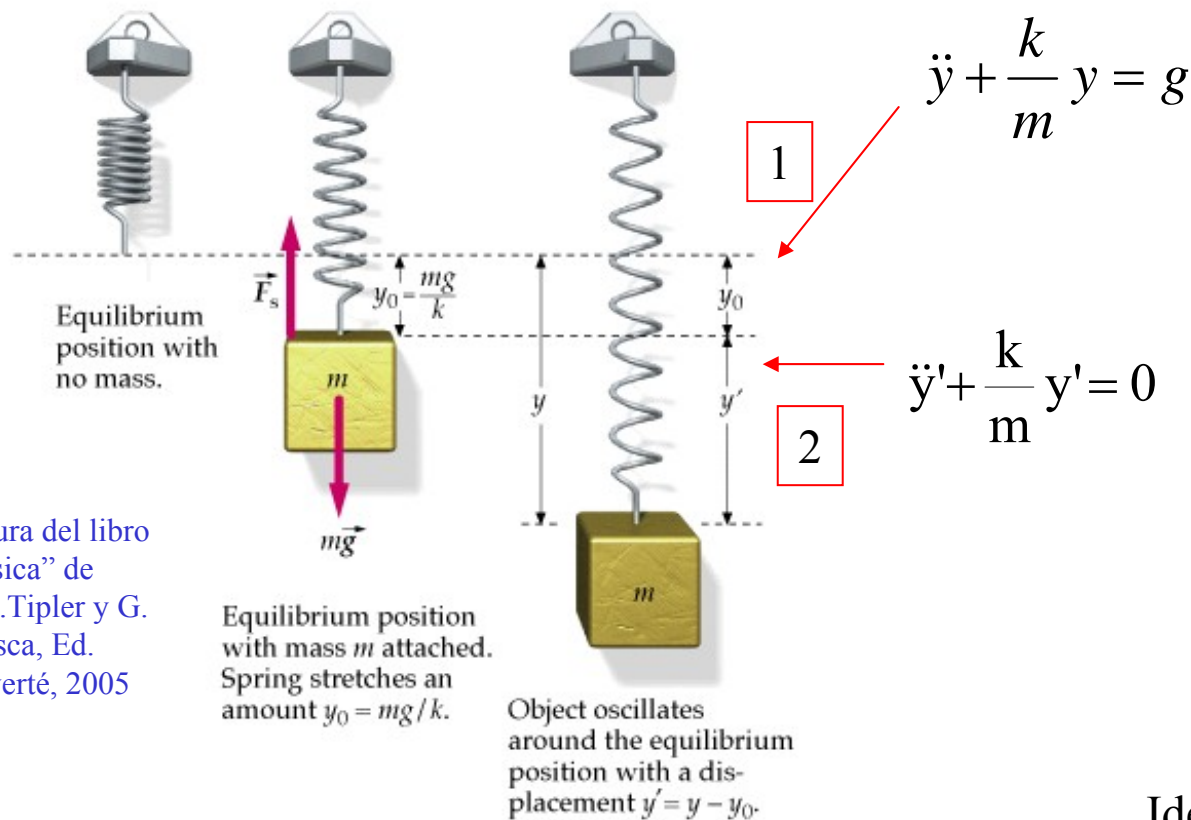


Figura del libro "Física" de P.A.Tipler y G. Mosca, Ed. Reverté, 2005

$$\ddot{\Psi} + \omega^2 \Psi = 0$$

$$y = y_h + y_{particular}$$

$$y_h = A \cos(\omega t + \phi)$$

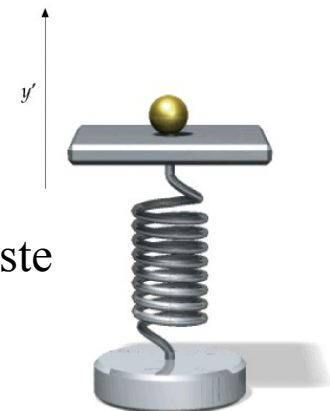
$$y_{particular} = y_{eq} = -\frac{mg}{k}$$

y referido a 1

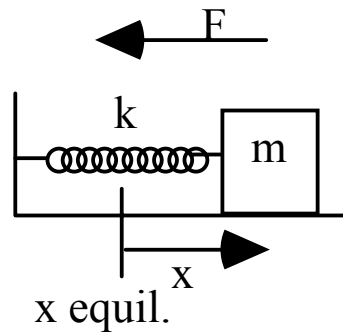
$$y' = y'_h = A \cos(\omega t + \phi)$$

y' referido a 2

Idem en este caso



## 2. Energía del oscilador armónico simple.



$$E = T + U$$

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m (-\omega A \sin(\omega t + \phi))^2$$

$$U = -\int_0^x F \cdot dx = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k (A \cos(\omega t + \phi))^2$$

$\downarrow$   
 $m\omega^2$

$$E = T + U = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

Aunque se haya particularizado para el caso de una masa sujeta a un muelle, esta dependencia con el cuadrado de la amplitud y de la pulsación es general para TODOS los osciladores lineales (también aproximación de pequeñas oscilaciones)

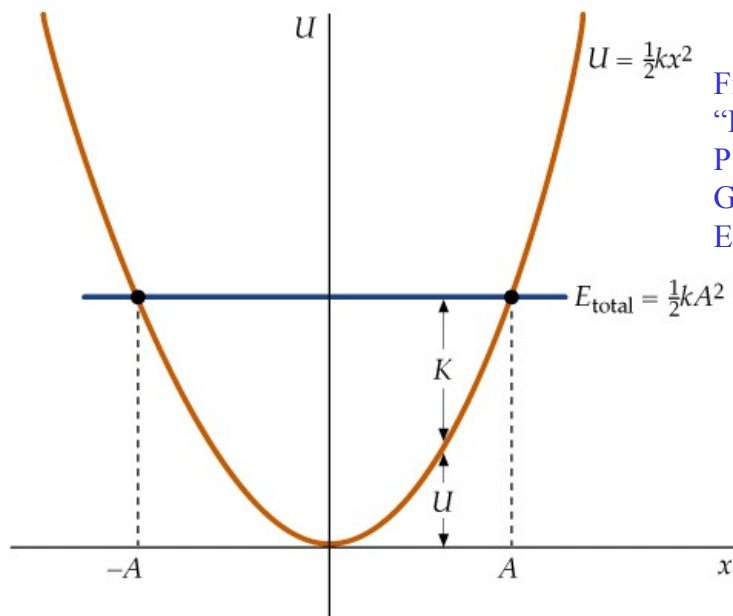
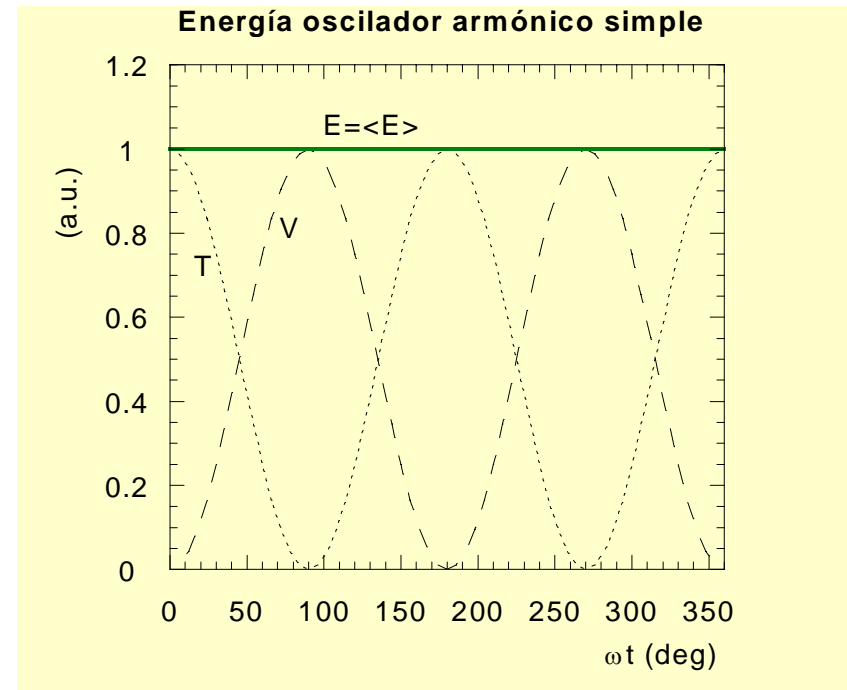


Figura del libro  
"Física" de  
P.A.Tipler y  
G. Mosca,  
Ed. Reverté, 2005



### 3. Superposición de movimientos armónicos: interferencias

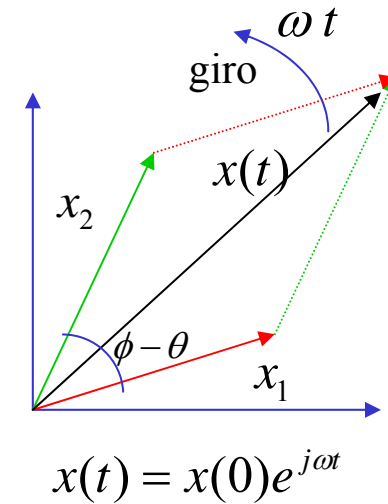
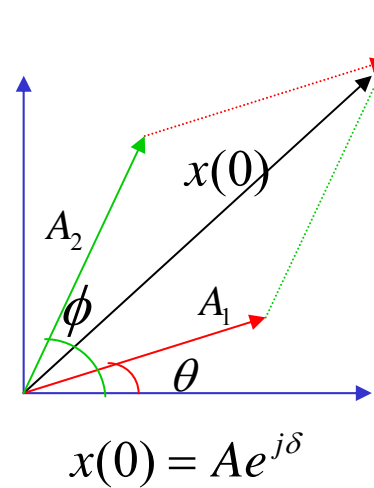
Superposición de movimientos armónicos paralelos de igual frecuencia

#### USO DE LA SOLUCIÓN COMPLEJA EN PROBLEMAS DE OSCILADORES

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= 0 && \longrightarrow && x_1 = A_1 e^{j(\omega t + \theta)} \\ \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 &= 0 && && x_2 = A_2 e^{j(\omega t + \phi)} \end{aligned} \right\} x = x_1 + x_2 = (A_1 e^{j\theta} + A_2 e^{j\phi}) e^{j\omega t} = x(0) e^{j\omega t}$$

Amplitud constante  
Fase relativa constante

Cálculo en t=0



$$A = |x(0)| = \sqrt{x(0) \cdot x(0)^*} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\phi - \theta)}$$

$$\delta = \frac{\text{Im } x}{\text{Re } x} = \frac{A_1 \sin \theta + A_2 \sin \phi}{A_1 \cos \theta + A_2 \cos \phi}$$

**CASOS:**

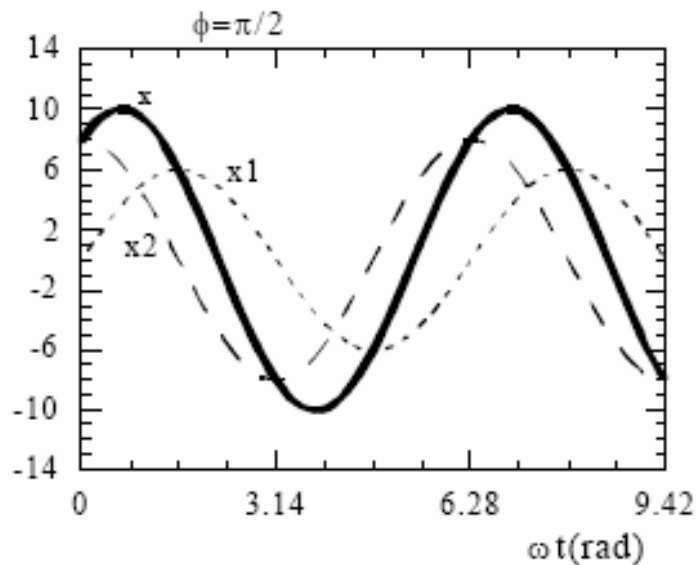
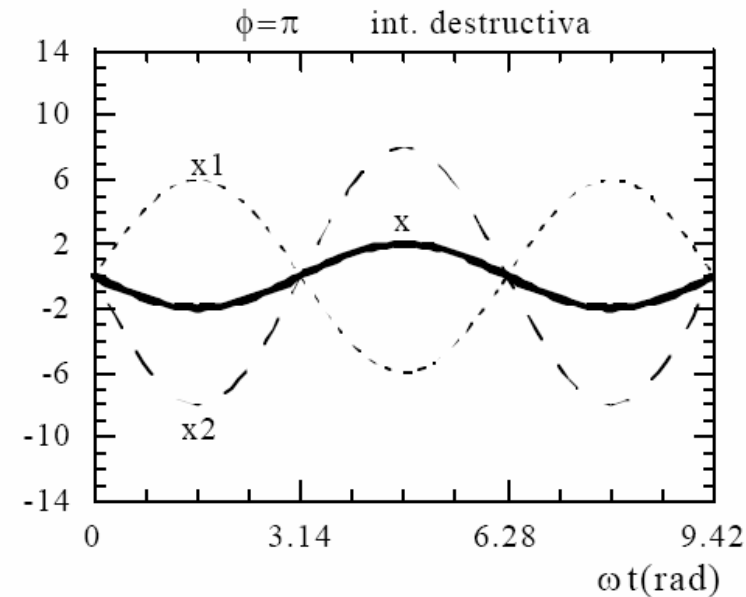
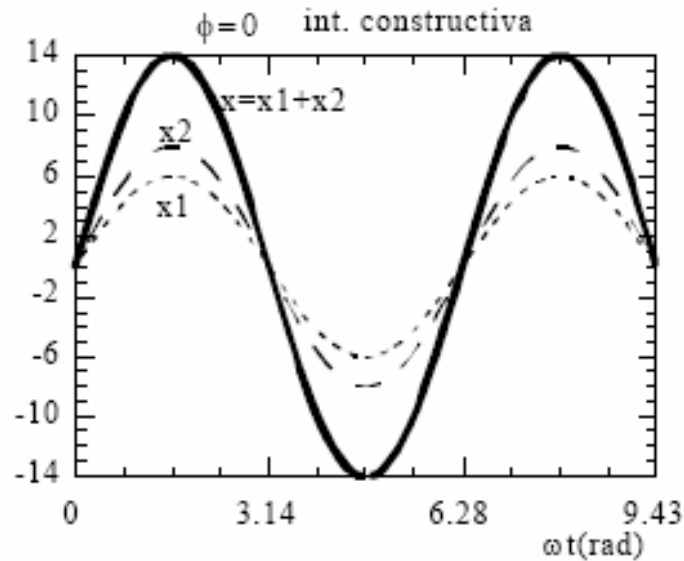
- $\phi - \theta = 0$ , interferencia constructiva
- $\phi - \theta = \pi/2$ , interferencia en cuadratura
- $\phi - \theta = \pi$ , interferencia destructiva

#### Problema 3.1 boletín

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/mas/mas.htm>

### 3. Superposición de movimientos armónicos: interferencias

#### Superposición de movimientos armónicos paralelos de igual frecuencia

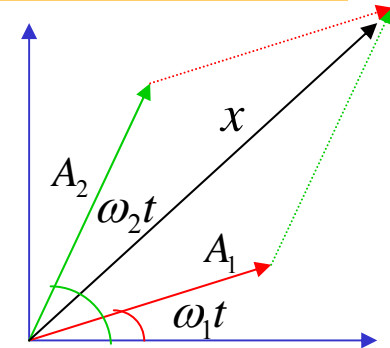


CASOS:  $\phi-\theta=0$ , interferencia constructiva  
 $\phi-\theta=\pi/2$ , interferencia en cuadratura  
 $\phi-\theta=\pi$ , interferencia destructiva

**Problema 3.1 boletín**

Superposición de movimientos armónicos paralelos de **DISTINTA** frecuencia

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1 e^{j\omega_1 t} \\ x_2 &= A_2 e^{j\omega_2 t} \end{aligned} \right\} x = x_1 + x_2 = A_1 e^{j\omega_1 t} + A_2 e^{j\omega_2 t}$$



$$A(t) = |x|^2 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t} \quad \text{Amplitud variable}$$


CASO PARTICULAR: amplitudes iguales


**MODULACIÓN DE AMPLITUD**

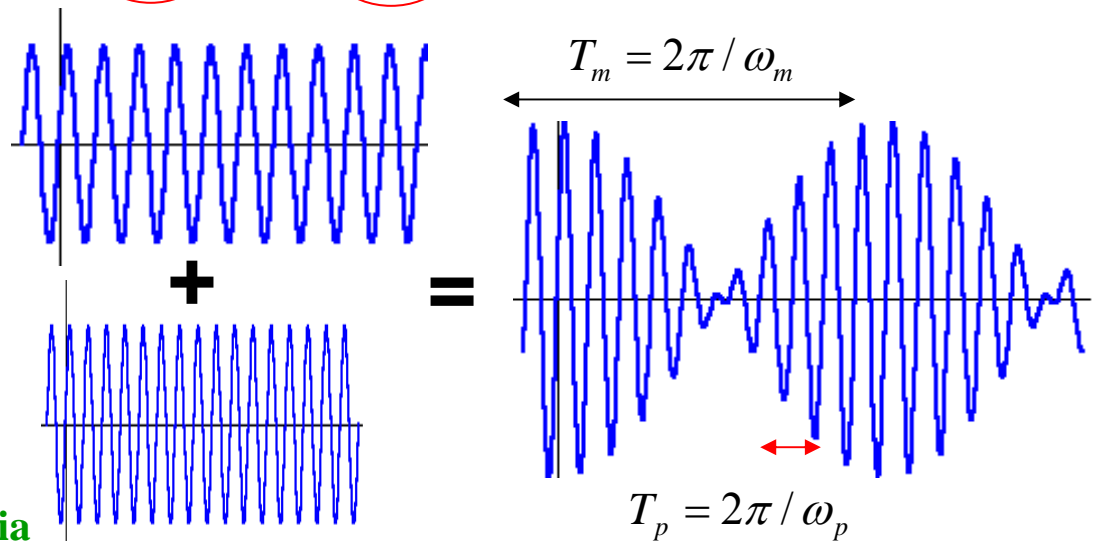
$$x = x_1 + x_2 = A(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t = 2A \cos \omega_m t \cos \omega_p t$$

$$x = A(t) \cos \omega_p t$$

$$2A \cos \omega_m t$$

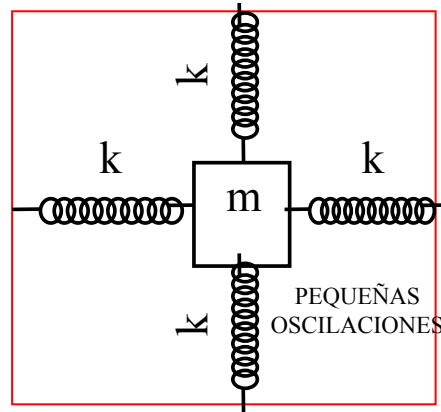
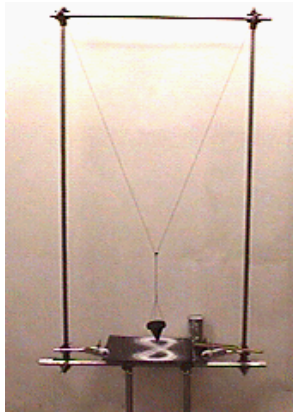
  $v_1=330 \text{ Hz } v_2=331 \text{ Hz } (\Delta v=1 \text{ Hz})$

  $v_1=330 \text{ Hz } v_2=340 \text{ Hz } (\Delta v=10 \text{ Hz})$



**DEMO: Dos diapasones de distinta frecuencia**

### 3. Superposición de movimientos armónicos 2D: trayectorias de Lissajous.



**Problema 3.2 boletín POLARIZACIÓN**

$\omega_2/\omega_1 \setminus \delta$	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	$\pi$
1									
2									
3									
4									
1/2									
3/2									
4/3									
6/5									
$\sqrt{2}$									

$x = \sin(\omega_1 t)$                        $y = \sin(\omega_2(t+\delta))$

$$\ddot{x} + \omega_x^2 x = 0$$

$$\ddot{y} + \omega_y^2 y = 0$$

$$\omega_y \neq \omega_x$$

$\frac{\omega_x}{\omega_y}$  irracional  $\rightarrow$  trayectorias abiertas

$\frac{\omega_x}{\omega_y}$  racional  $\rightarrow$  trayectorias cerradas

**curvas de Lissajous**  
trayectorias  $y(x)$





## 4. Oscilaciones amortiguadas.

En los osciladores reales existen fenómenos disipativos que producen un amortiguamiento de la oscilación. El modelo de oscilador amortiguado introduce un término proporcional a la primera derivada (término disipativo). La ecuación diferencial del oscilador contiene un nuevo término

$$\ddot{\Psi} + \overbrace{2\beta\dot{\Psi}}^{\text{Término disipativo}} + \omega_0^2\Psi = 0$$

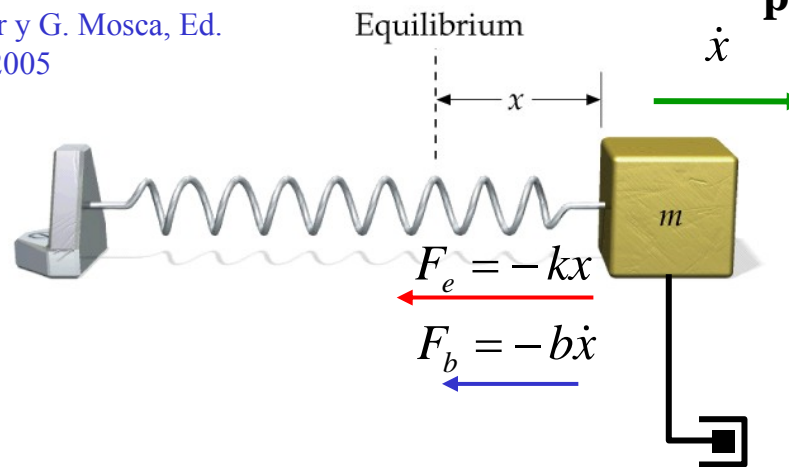
Factor de amortiguamiento

Nota: el factor 2 que multiplica a  $\beta$  se introduce por conveniencia en la notación, como se podrá apreciar más adelante

### EJEMPLO 1: masa y resorte sujetas a un rozamiento de tipo viscoso



Figuras del libro "Física" de P.A.Tipler y G. Mosca, Ed. Reverté, 2005



**Fuerza de rozamiento de tipo viscoso: proporcional a la velocidad**

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = 0$$

## 4. Oscilaciones amortiguadas.

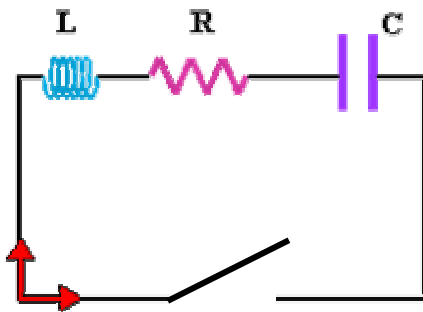
En los osciladores reales existen fenómenos disipativos que producen un amortiguamiento de la oscilación. El modelo de oscilador amortiguado introduce un término proporcional a la primera derivada (término disipativo). La ecuación diferencial del oscilador contiene un nuevo término

**Término disipativo**

$$\ddot{\Psi} + 2\beta\dot{\Psi} + \omega_0^2\Psi = 0$$

Factor de amortiguamiento

### EJEMPLO 2: circuito RLC



Condensador con carga inicial  $q_0$ , al cerrar el circuito:

$$\varepsilon_L + \varepsilon_R + \varepsilon_C = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

El único término disipativo en este caso corresponde a la resistencia ( efecto Joule)

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2q = 0$$

## 4. Oscilaciones amortiguadas.

**SOLUCIÓN**  $\Psi(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$   $r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$  **CASOS según  $\beta$**

### 1. **APERIÓDICO SOBREAMORTIGUADO** $\beta > \omega_0$

$$r = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \pm \omega \quad \text{raíces reales}$$

$$\Psi(t) = e^{-\beta t} (C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t})$$

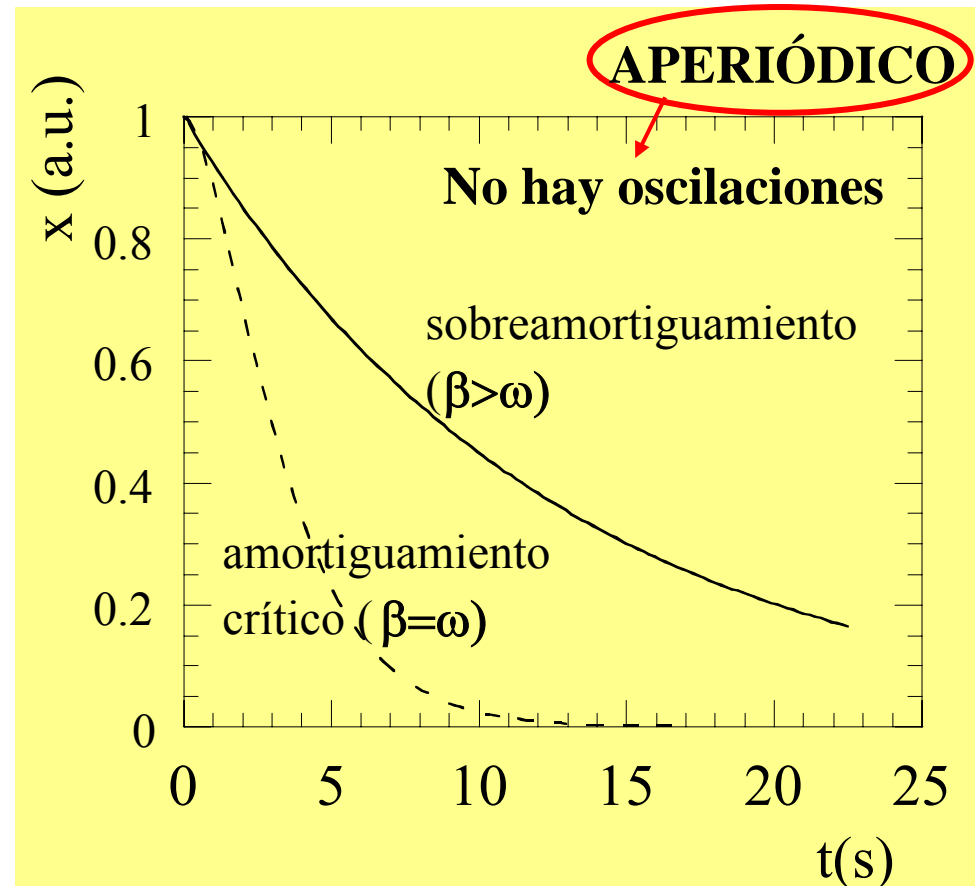
$$\Psi(t) = A e^{-\beta t} \cosh(\omega t + \phi)$$

### 2. **APERIÓDICO CRÍTICO** $\beta = \omega_0$

$$r = -\beta = -\omega_0 \quad \text{raíces reales iguales}$$

$$\Psi(t) = e^{-\omega_0 t} (C_1 + C_2 t)$$

**A igualdad de condiciones alcanza antes el valor cero**



Problema 3.3 boletín

Cuestiones 30,36, 37 a,b

## 4. Oscilaciones amortiguadas.

**SOLUCIÓN**  $\Psi(t) = C_1 e^{rt} + C_2 e^{-rt}$   $r = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$  **CASOS según  $\beta$**

### 3. INFRA-AMORTIGUADO $\beta < \omega_0$ SÍ HAY OSCILACIONES

$r = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \pm i\omega'$  raíces imaginarias  $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

$\Psi(t) = e^{-\beta t} (C_1 e^{i\omega' t} + C_2 e^{-i\omega' t})$

Cuestiones 30,36, 37 a,b, 38  
Problema 3.4 del boletín

$\Psi(t) = \underbrace{Ae^{-\beta t}}_{A(t)} \cos(\omega' t + \phi)$

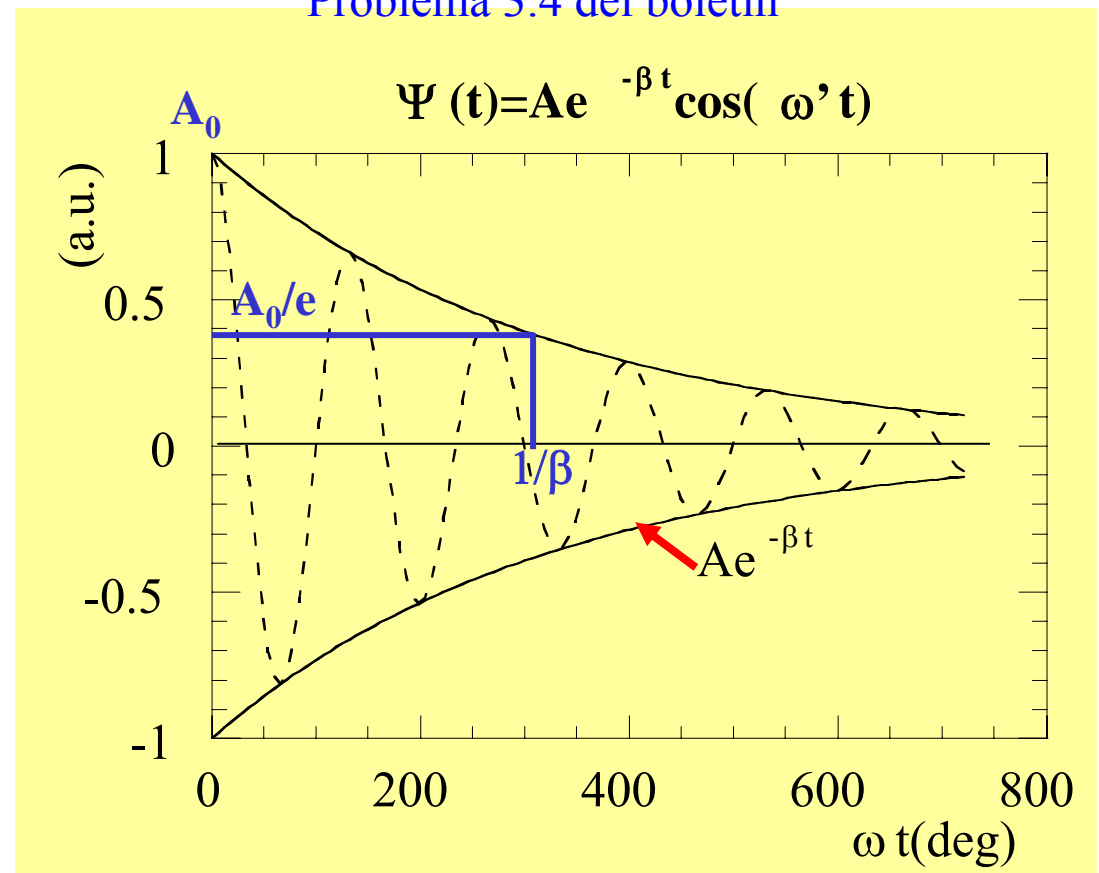
**Amplitud que disminuye exponencialmente con el tiempo**

$A(t=0)=A_0$  valor inicial

$t = 1/\beta = 2\tau$   $A(t) = \frac{A_0}{e}$

**Pulsación menor que la del OAS,**

Si  $\beta \ll \omega_0$   $\omega' \approx \omega_0$



## 4. Oscilaciones amortiguadas.

Chantal Ferrer Roca 2008

### 3. INFRAMORTIGUADO $\beta < \omega_0$

$$\Psi(t) = \underbrace{Ae^{-\beta t}}_{A(t)} \cos(\omega' t + \phi)$$

#### MEDIDA DE LA PÉRDIDA DE AMPLITUD (O DE LA ENERGÍA)

$$t \ll \tau$$

Para  $t \ll \tau$   $A(t) = A_0 e^{-t/2\tau} \approx A_0 (1 - t/2\tau)$   
 tiempo de relajación  $\swarrow$

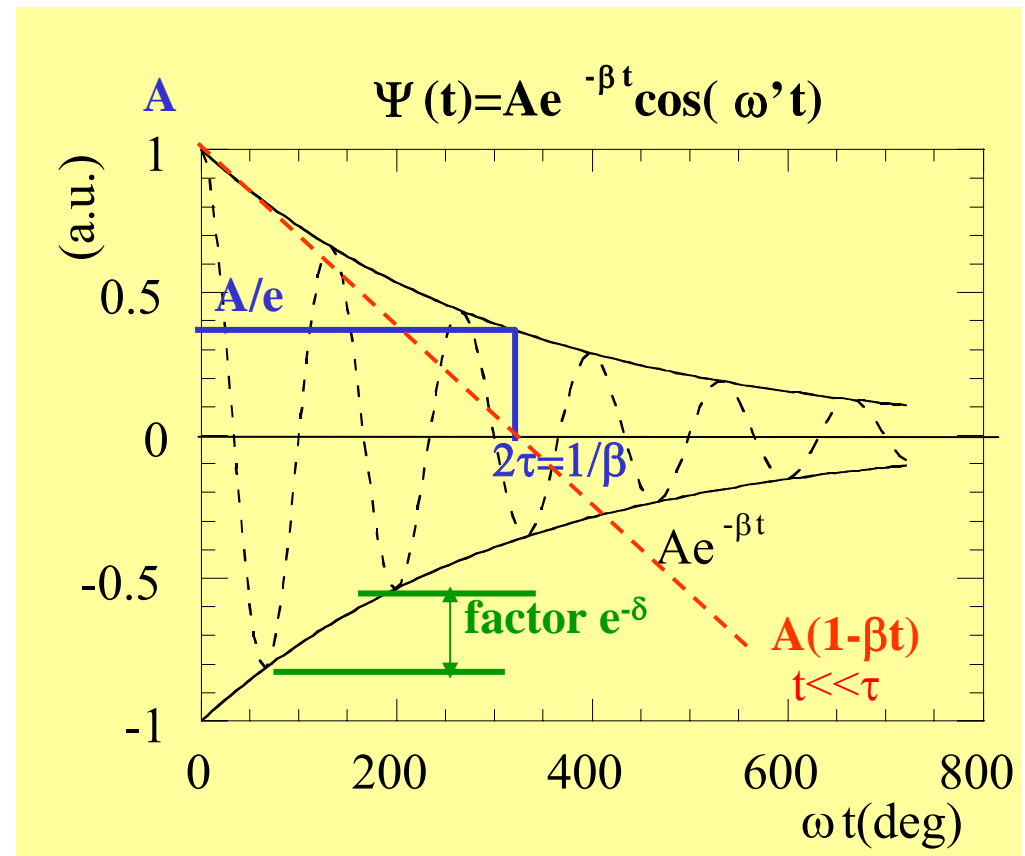
la tangente (derivada) en  $t=0$  de la exponencial corta el eje horizontal en  $t = 2\tau$

$$\left. \frac{dA(t)}{dt} \right|_{t=0} = -A_0 / 2\tau$$

**Decremento logarítmico  $\delta$ :** ¿en qué medida disminuye la amplitud pasado un período de oscilación?

$$\frac{A(t+T)}{A(t)} = \frac{Ae^{-\beta(t+T)}}{Ae^{-\beta t}} = e^{-\beta T} = e^{-\beta \frac{2\pi}{\omega'}} = e^{-\delta}$$

$$\delta = \beta \frac{2\pi}{\omega'}$$



## 4. Oscilaciones amortiguadas.

Chantal Ferrer Roca 2008

### 3. INFRAMORTIGUADO $\beta < \omega_0$

$$\Psi(t) = \underbrace{Ae^{-\beta t}} \cos(\omega' t + \phi)$$

**ENERGÍA:** máxima disipación cuando  $v$  es máxima. Supongamos masa con resorte

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad U = \frac{1}{2} kx^2 \quad E = T + U = \dots = \frac{1}{2} mA^2 e^{-2\beta t} (\omega_0^2 + \beta^2 \cos 2\omega' t + \beta\omega' \sin 2\omega' t)$$

(demostrar como [ejercicio-problema 3.4](#) del boletín )

$$\langle E(\tau) \rangle = \frac{E_0}{e} \quad \tau = \frac{1}{2\beta}$$

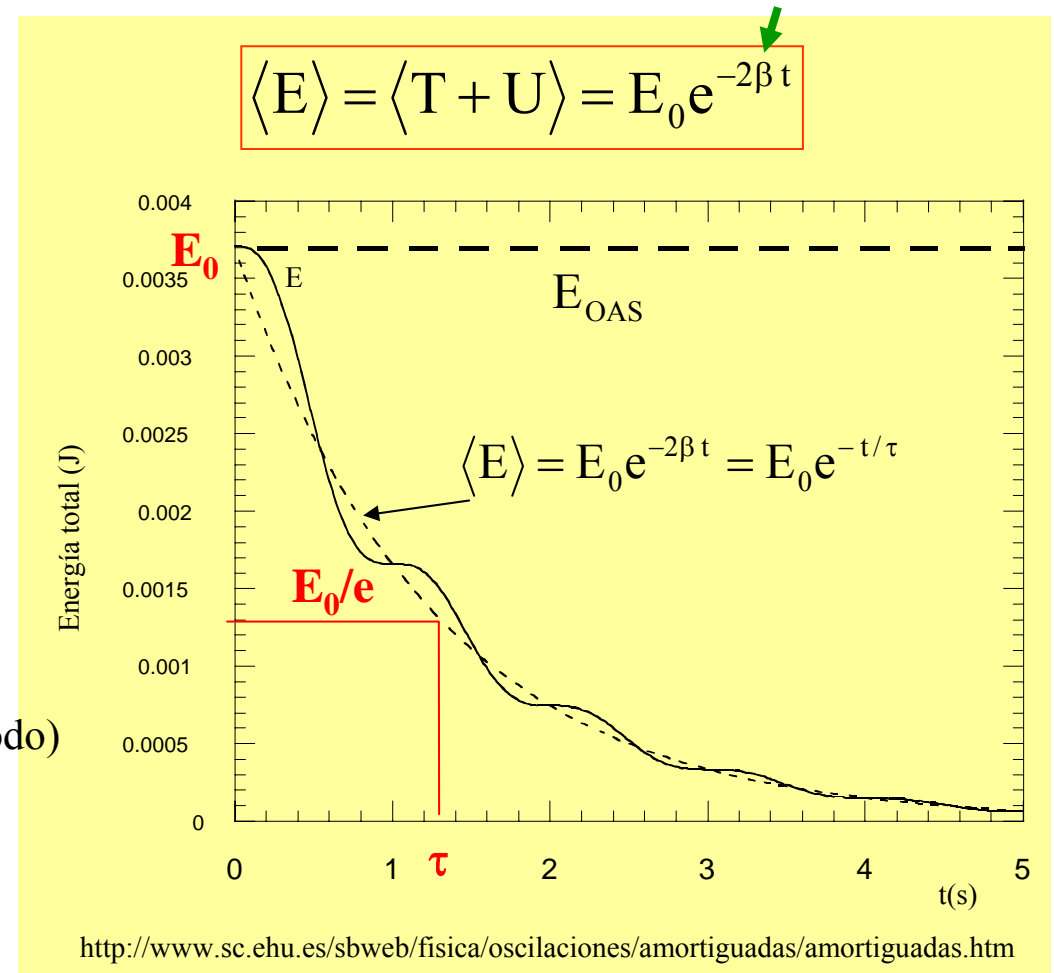
**Tiempo de relajación:** tiempo en el que la energía promedio desciende a  $1/e$  del valor inicial

**Factor de calidad**  $Q = 2\pi \frac{\langle E \text{ almacenada} \rangle}{\langle E \text{ disipada} \rangle} \Big|_{1 \text{ ciclo}}$

$$Q = 2\pi \frac{\langle E \rangle}{\langle P \rangle T'} = 2\pi \frac{\langle E \rangle}{T' \langle E \rangle / \tau} = 2\pi \frac{\tau}{T'} = \omega' \tau = \frac{\pi}{\delta}$$

$Q =$  medida de  $\tau$  (t. relajación) respecto a  $T'$  (periodo)

$Q$  grande : poco amortiguamiento (y viceversa)



Cuestión 31





# 5. Oscilaciones forzadas. Efectos Transitorios.

Existe un mecanismo externo que suministra energía al sistema, compensando las pérdidas por disipación.

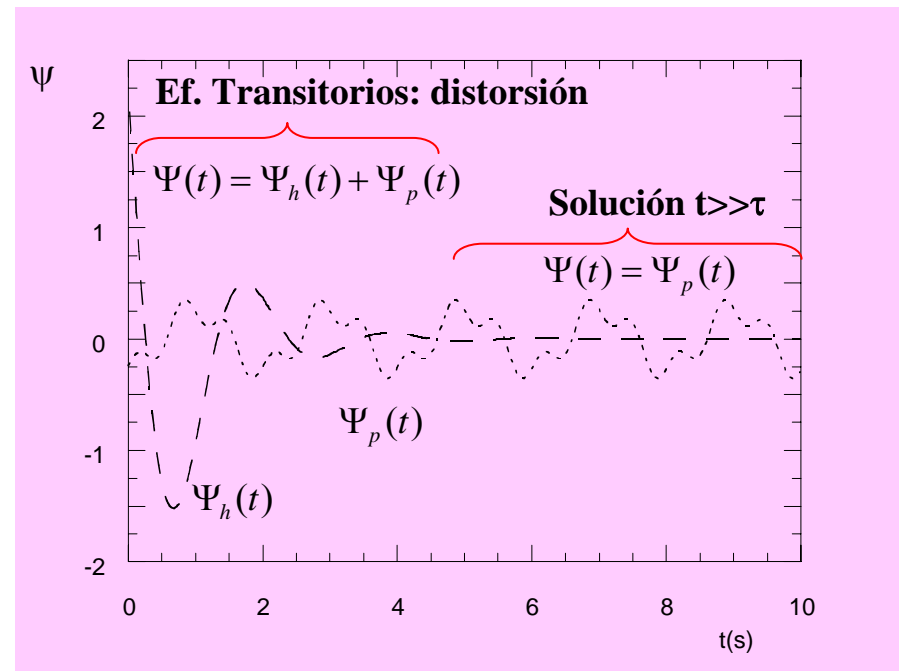
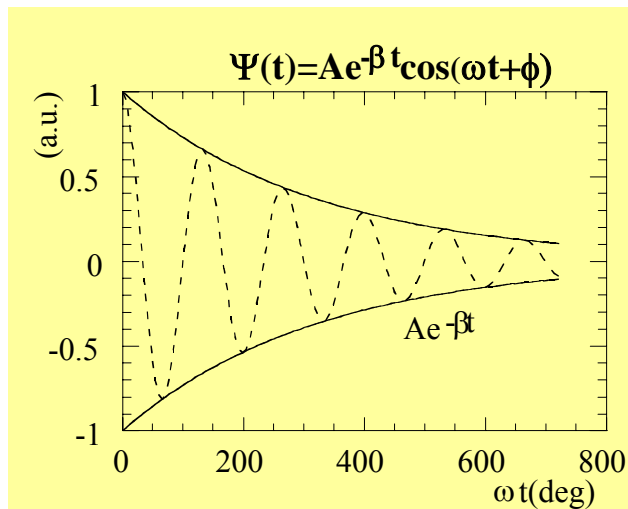
**Ecuación**  $\ddot{\Psi} + 2\beta\dot{\Psi} + \omega_0^2\Psi = G_{\text{ext}}(t)$  Ec. diferencial no homogénea

**Solución:**  $\Psi(t) = \Psi_h(t) + \Psi_p(t)$  **solución forzada**  
 (una solución particular que cumpla la ecuación diferencial).  
 Es la única solución para  $t \gg \tau$

**solución transitoria**  
 solución de la ec. homogénea (oscilador amortiguado).  
 Decae con el tiempo:

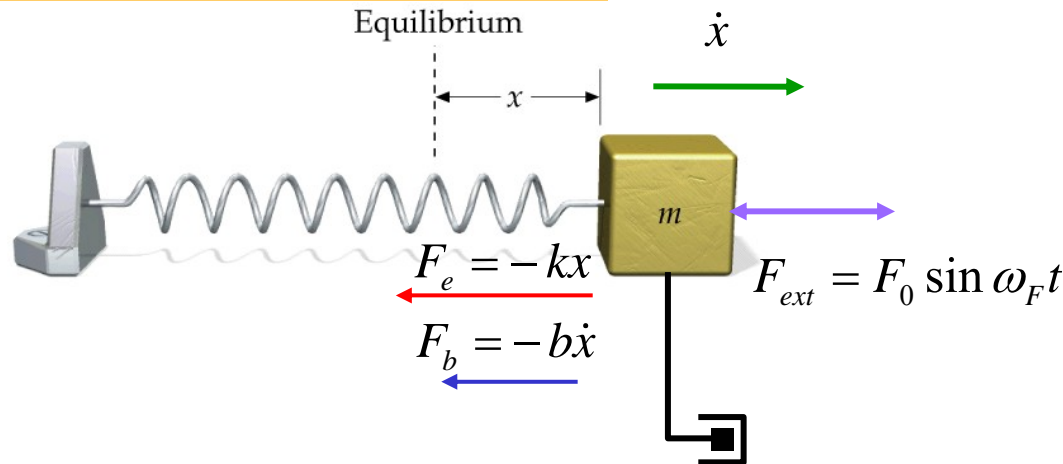
**CASOS según el tipo de fuerza aplicada**

## INFRA-AMORTIGUADO



## 5. Oscilaciones forzadas. Efectos Transitorios.

### EJEMPLO 1: masa con muelle



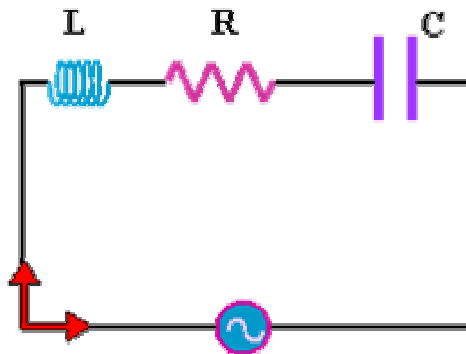
$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_0 \sin \omega t$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A \sin \omega_F t$$

$$x(t) = x_h + x_p$$

### EJEMPLO 2: circuito RLC

Con fuente de alimentación  $V$  en alterna



$$\varepsilon_L + \varepsilon_C + \varepsilon_R = L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri = V_{\max} \sin \omega t$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = \frac{V_{\max}}{L} \sin \omega t$$

$$q(t) = q_h + q_p$$

$$I = I_{\max} \sin(\omega t - \varphi)$$

$$V = V_{\max} \sin(\omega t)$$

## 6. Fuerza de tipo armónico. Resonancia

Chantal Ferrer Roca 2008

**Ecuación**  $\ddot{\Psi} + 2\beta\dot{\Psi} + \omega_0^2\Psi = A_{ext}(t) \rightarrow A_{ext}(t) = A_0 \sin \omega_F t$  *si  $\psi$  es desplazamiento  $x$*   
 Fuerza de tipo armónico de pulsación  $\omega_F \neq \omega_0$

**SOLUCIÓN ESTACIONARIA** : supondremos  $A(t) = A_0 e^{i\omega_F t}$  *sol. particular (inspección):*  
 $\psi(t) = C e^{i\omega_F t}$

$$(-\omega_F^2 + i2\omega_F\beta + \omega_0^2)C = \frac{F_0}{m} = A$$

$$C = \frac{A}{((\omega_0^2 - \omega_F^2) + i2\omega_F\beta)} = \frac{A}{Y} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Número complejo,} \\ \text{expresión polar} \\ |Y|e^{-i\delta} \end{array} \right.$$

$$|Y| = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\omega_F\beta)^2}$$

$$\delta = \text{tg}^{-1} \frac{\text{Im } Y}{\text{Re } Y} = \text{tg}^{-1} \frac{-2\omega_F\beta}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)}$$

$$\Psi_p(t) = \left( \frac{A}{|Y|} e^{i\delta} \right) e^{i(\omega_F t)} = D(\omega_F) e^{i(\omega_F t + \delta)}$$

(Parte imaginaria)

$$\Psi_p(t) = D(\omega_F) \sin(\omega_F t + \delta)$$

$$\frac{A}{|Y|} = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\omega_F\beta)^2}}$$

$$\delta = \text{tg}^{-1} \frac{\text{Im } Y}{\text{Re } Y} = \text{tg}^{-1} \frac{-2\omega_F\beta}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)}$$

# 6. Fuerza de tipo armónico. Resonancia.

## Ecuación

$$\ddot{\Psi} + 2\beta\dot{\Psi} + \omega_0^2\Psi = A \sin \omega_F t$$

## Solución estacionaria

$$\Psi_p(t) = D(\omega_F) \sin(\omega_F t + \delta)$$

**AMPLITUD:** depende de la frecuencia de la fuerza, con un máximo cuando la frecuencia de la fuerza se aproxima a la frecuencia propia del oscilador libre : **curva de resonancia**

$$D(\omega_F) = \frac{A}{|Y|} = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\beta\omega_F)^2}}$$

## FRECUENCIA DE RESONANCIA

máximo  $\frac{dD(\omega_F)}{d\omega_F} = 0$

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

$$D(\omega_R) = D_{\max}$$

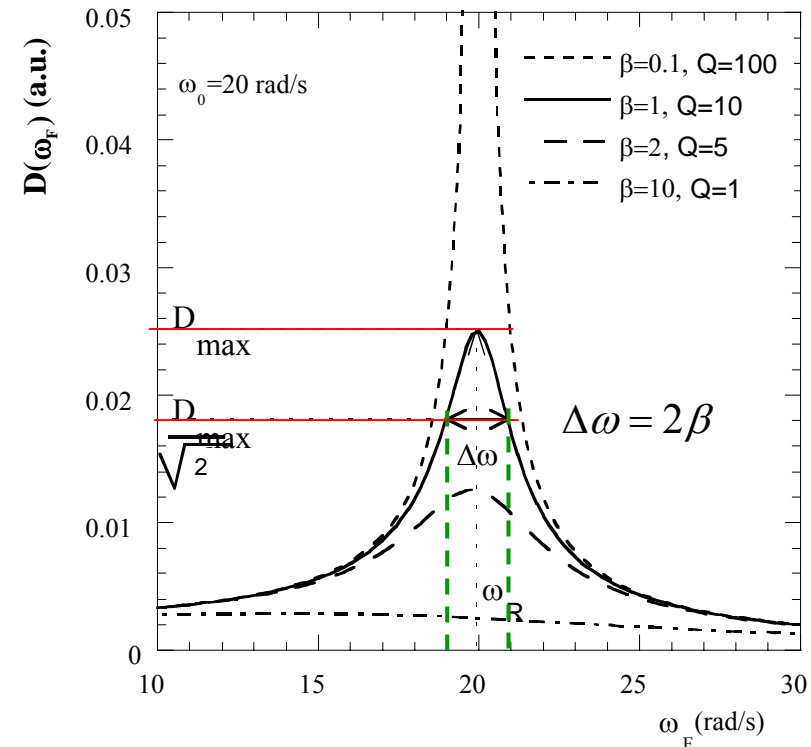
si  $\beta \ll \omega_0$   $\omega_R \approx \omega_0$ ,  $D_{\max} \approx \frac{A}{2\omega_0\beta}$

**Anchura (para  $\frac{D_{\max}}{\sqrt{2}}$ ):**  $\Delta\omega \cdot \tau \approx 1$

Chantal Ferrer Roca 2008

## Función Lorentziana

$$y(x) = \frac{A}{\sqrt{(x_0^2 - x^2)^2 + (x\Gamma)^2}}$$



mayor amortiguamiento=mayor anchura y menor Q

midiendo la anchura de la lorentziana se obtiene también el factor de amortiguamiento o el tiempo de relajación

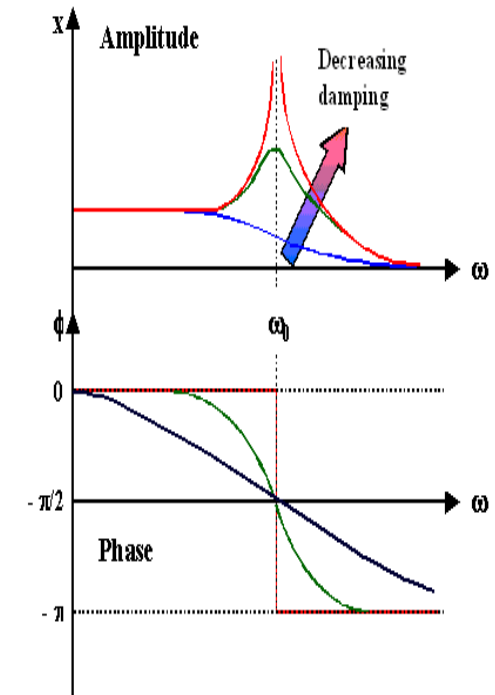
## 6. Fuerza de tipo armónico. Resonancia

Ecuación

$$\ddot{\Psi} + 2\beta\dot{\Psi} + \omega_0^2\Psi = A \sin \omega_F t \longrightarrow$$

Solución

$$\Psi_p(t) = D(\omega_F) \sin(\omega_F t + \delta)$$



Cuestiones 32, 33, 34, 35, 36c, 37c, 38c, 39

Chantal Ferrer Roca 2008

## 6. Fuerza de tipo armónico. Resonancia.

Chantal Ferrer Roca 2008

### Solución estacionaria

Ecuación  $\ddot{\Psi} + 2\beta\dot{\Psi} + \omega_0^2\Psi = A\sin\omega_F t \longrightarrow \Psi_p(t) = D(\omega_F)\sin(\omega_F t + \delta)$

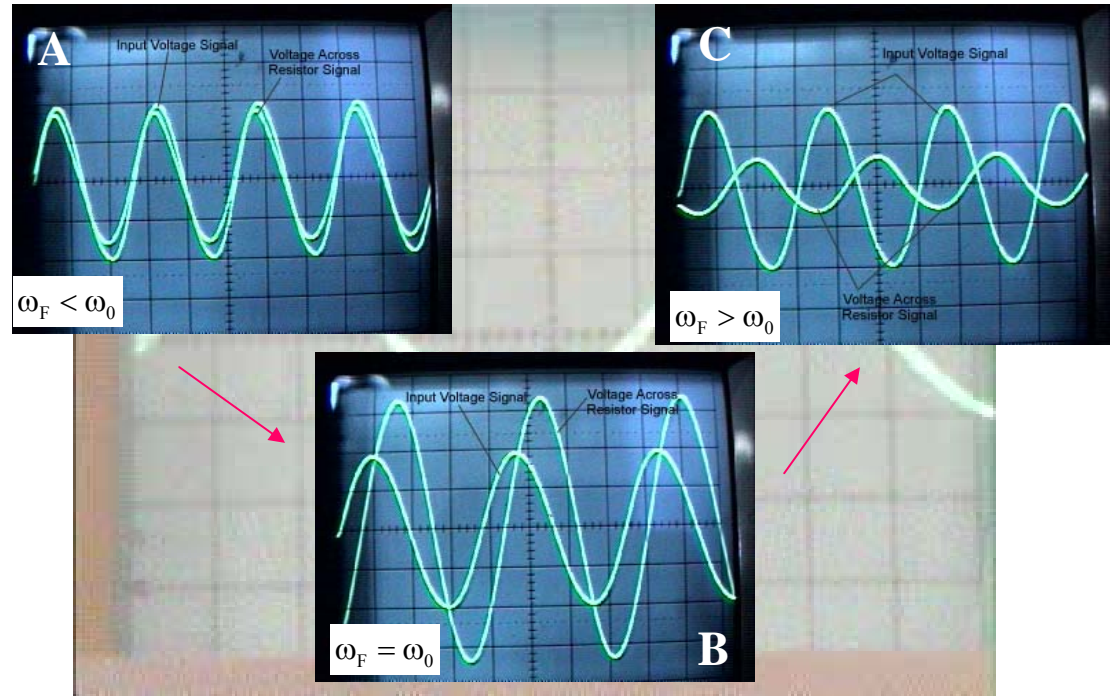
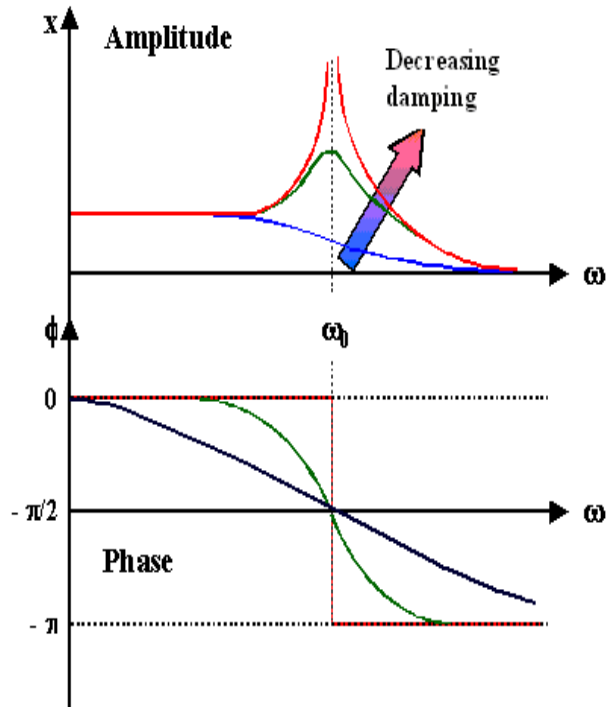
**FASE:** diferencia de fase entre la fuerza y el desplazamiento.  $\delta = \text{tg}^{-1} \frac{-2\omega_F\beta}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)}$

<http://bednorzmuller87.phys.cmu.edu/demonstrations/electricityandmagnetism/timedependentcurrents/demo6503.html>

A. debajo resonancia,  $\omega_F < \omega_0 \quad |\delta| < \frac{\pi}{2}$

B. resonancia,  $\omega_F = \omega_0 \quad |\delta| = \frac{\pi}{2}$

C. encima resonancia,  $\omega_F > \omega_0 \quad |\delta| > \frac{\pi}{2}$



<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/forzadas/forzadas.htm>



**SOLUCIÓN GENERAL** cerca de la resonancia: aparecen pulsaciones por la combinación de la frecuencia propia del oscilador y la de la forzada. La ausencia de pulsaciones garantiza que ambas coinciden y se está en resonancia.

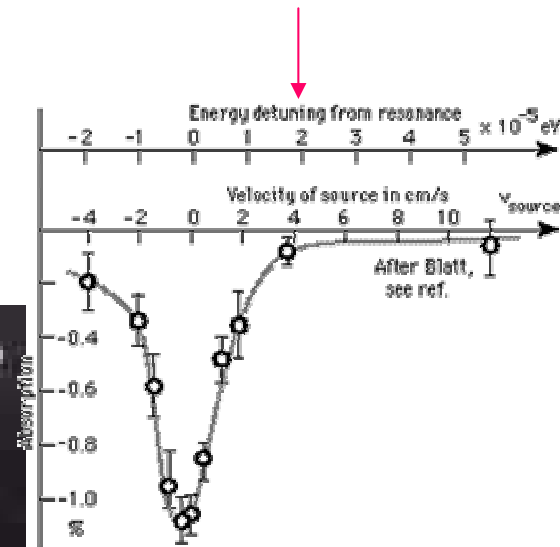


## 6. Resonancia

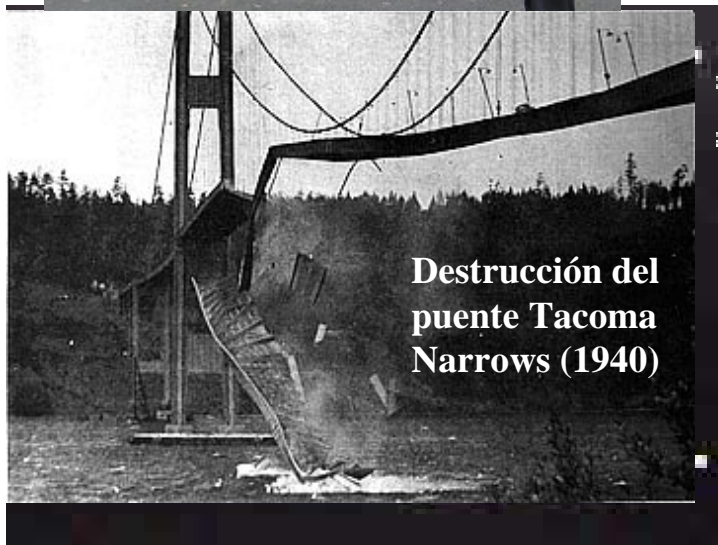
Chantal Ferrer Roca 2008

FISICA de Feynman (23-4):

- Respuesta de la atmósfera a excitaciones externas  $f_r = 10,5$  h. (verificado con explosión de Krakatoa 1883)
- Absorción de radiación infrarroja a través de una película delgada de Na Cl.
- Bombardeo de un átomo de Litio con protones: pico de emisión gamma
- Curva de resonancia del efecto Mössbauer



*Nature* 420, 475 (5 December 2002)  
**Animal communication: Tree-hole frogs exploit resonance effects**



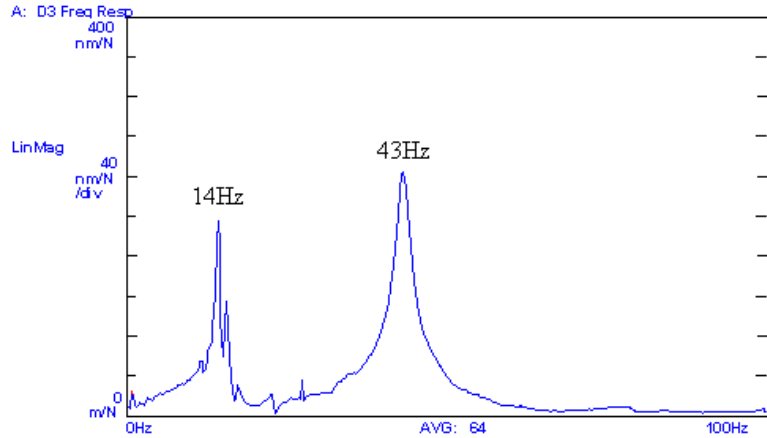
<http://www.uv.es/piefisic/w3demos/castellano/catalogo/demos/demo14/Tacoma2.mpg>

# 6. Resonancia

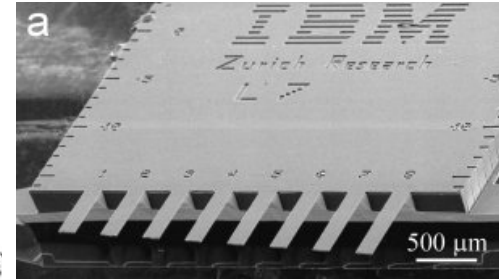
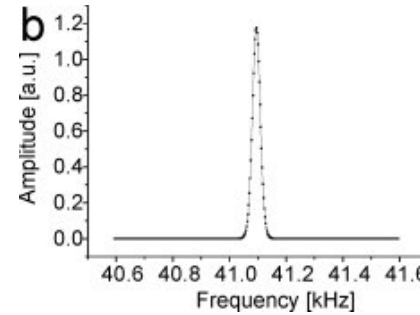
## Osciladores micromecánicos o Sistemas Nanoelectromecánicos

Chantal Ferrer Roca 2008

sensores



Medida de la respuesta a las vibraciones de maquinaria pesada (AMTRI corp.)



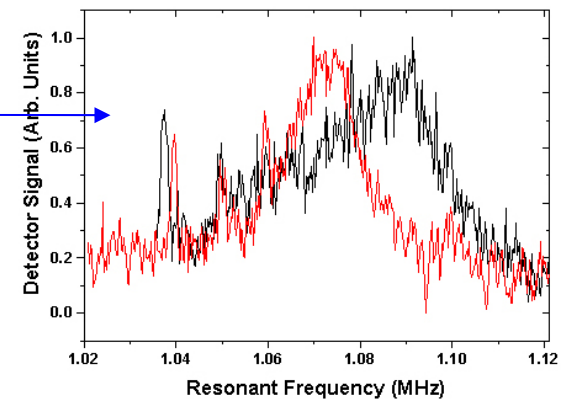
Célula de *Escherichia coli*

<http://www.news.cornell.edu/releases/April04/attograms.ws.html>



Curva de resonancia de un piezoeléctrico

Curva de resonancia del trampolín **con** y sin E.Coli permite determinar su masa



# 6. Amplitud de absorción y elástica

**Ecuación**  $\ddot{\Psi} + 2\beta\dot{\Psi} + \omega_0^2\Psi = A \cos \omega_F t$

**Solución estacionaria**

$\Psi_p(t) = D(\omega_F) \cos(\omega_F t + \delta)$

$$C = \frac{A}{((\omega_0^2 - \omega_F^2) + i2\omega_F\beta)} = \frac{A}{Y} = \frac{A}{|Y|e^{-\delta}} = De^{\delta}$$

**Otra forma de escribir la solución:**

$C = D(\cos \delta + i \sin \delta) = C_R - iC_i$

$\psi_p(t) = \text{Re}(Ce^{i\omega_F t}) = C_R \cos \omega_F t + C_i \sin \omega_F t$

$(C_R - iC_i)(\cos \omega_F t + i \sin \omega_F t)$  desfasada 90° respecto a la fuerza

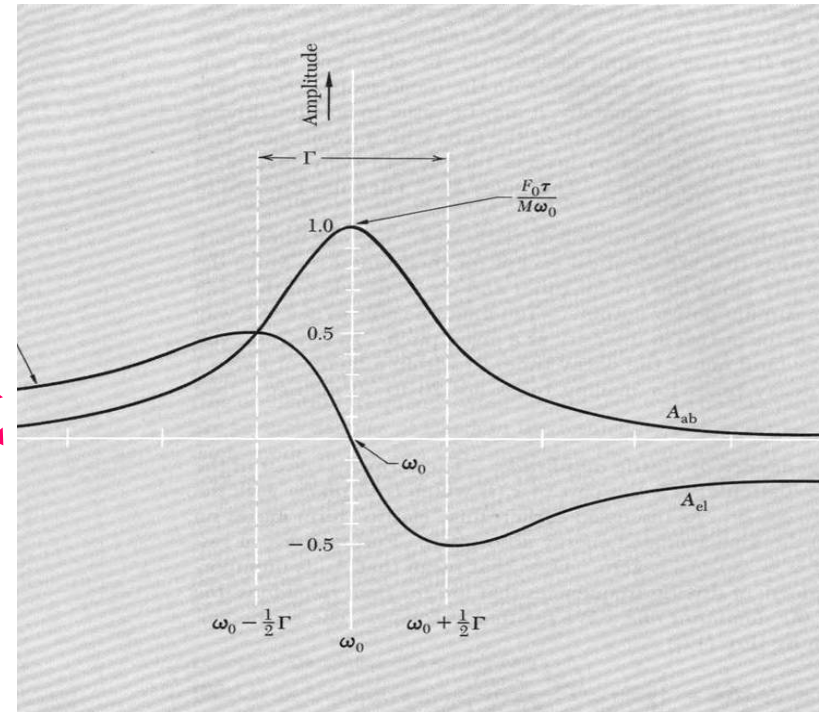
$C_R = D \cos \delta = \frac{A(\omega_0^2 - \omega_F^2)}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\omega_F\beta)^2}$

**Amplitud elástica o "dispersiva"**

$C_i = D \sin \delta = \frac{A(2\omega_F\beta)}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + (2\omega_F\beta)^2}$

**Amplitud de absorción**

Figura del libro "Waves . Berkeley Physics Course" de Kittel-Knight-Ruderman. Ed Reverté, 1999.



Ejemplo: modelo resonante de absorción de luz en la materia, constante dieléctrica compleja: la parte real (la amplitud elástica) depende del índice de refracción y la imaginaria (amplitud de absorción) depende del coeficiente de absorción del material.

# 6. Resonancia e Impedancia

Chantal Ferrer Roca 2008

Supongamos masa + muelle

**Ecuación**  $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = A \sin \omega_F t$

**Solución estacionaria**

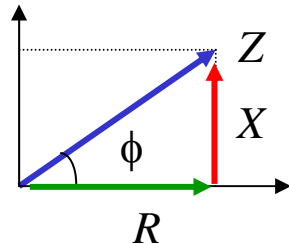
$x_p(t) = D(\omega_F) \sin(\omega_F t + \delta)$

$\rightarrow \dot{x}_p(t) = v = \underbrace{\omega_F D(\omega_F)}_{v_{\max}} \underbrace{\cos(\omega_F t + \delta)}_{\sin(\omega_F t + \delta + \frac{\pi}{2}) = \sin(\omega_F t + \phi)}$

$$v_{\max} = \frac{\omega_F A}{\sqrt{(\omega_F^2 - \omega_0^2)^2 + (2\omega_F \beta)^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{(m\omega_F - \frac{k}{\omega_F})^2 + b^2}} = \frac{F_0}{|Z|}$$

## Impedancia mecánica Z: R resistencia, X reactancia

(recordáis los circuitos de alterna?) igual para una masa con resorte u otro sistema físico forzado



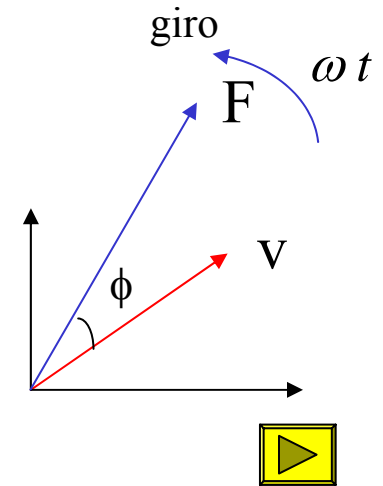
$$\text{tg } \phi = \frac{X}{R} = -\text{ctg } \delta = \frac{m\omega_F - \frac{k}{\omega_F}}{b}$$

$$\cos \phi = \frac{R}{|Z|}$$

$$Z = |Z| e^{i\phi}$$

$$Z = R + iX = b + i(m\omega_F - \frac{k}{\omega_F})$$

$$\dot{x}_p(t) = v = \frac{F_0}{|Z|} \sin(\omega_F t - \phi)$$

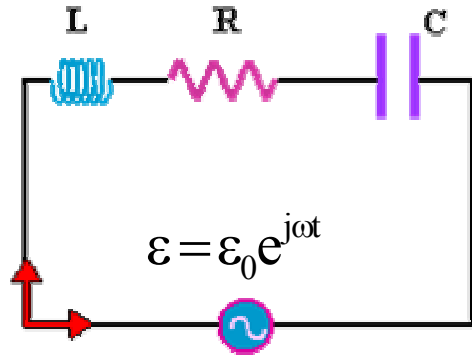


- $\phi > 0$  Velocidad retrasada respecto a la fuerza
- $\phi = 0$  **Resonancia** velocidad y fuerza colineales
- $\phi < 0$  Velocidad adelantada respecto a la fuerza

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/oscilaciones/forzadas/forzadas.htm>

# 6. Fuerza de tipo armónico. Resonancia e Impedancia

## EJEMPLO: circuito RLC



Con fuente de alimentación  $\varepsilon$  en alterna

$$V_L + V_C + V_R = L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri = \varepsilon = \boxed{\varepsilon_0 \cos \omega t} \quad \text{Re}(\varepsilon_0 e^{j\omega t})$$

derivar la ecuación de nuevo:

$$\boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{\varepsilon_0 \omega}{L} j e^{j\omega t}}$$

$$i = i_0 e^{j\omega t}$$

**Solución particular**

$$i = \frac{\varepsilon}{R + jX} = \frac{\varepsilon}{|Z| e^{j\phi}} = \frac{\varepsilon_0}{|Z|} e^{j(\omega t - \phi)} = i_0 e^{j(\omega t - \phi)}$$

Impedancia Z del circuito

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$$

$$\text{tg}\phi = \frac{X}{R} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

$$i_0 = \frac{\varepsilon_0}{|Z|}$$

$$\boxed{i = i_0 \cos(\omega t - \phi)}$$

- $\phi > 0$  Corriente retrasada respecto a la tensión
- $\phi = 0$  **Resonancia**, corriente en fase con la tensión
- $\phi < 0$  Corriente adelantada con respecto a la tensión

Potencia  $P(t) = \text{Re}(i) \text{Re}(V)$

Potencia disipada en la resistencia  $\langle P(t) \rangle = \langle \text{Re}(i) \text{Re}(V) \rangle = \langle (i_0 \cos(\omega t - \phi))(V_0 \cos \omega t) \rangle = \frac{1}{2} V_0 i_0 \cos \phi = \frac{1}{2} R i_0^2 \cos \phi$

Potencia generador  $\langle P_{\text{gen}}(t) \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 i_0 \cos \phi$

**IGUALES**

Chantal Ferrer Roca 2008



## 6. Resonancia y potencia absorbida

$$P_{\text{abs}}(t) = F_{\text{ext}} \cdot \dot{x} = (F_0 \sin \omega_F t) \left( \frac{F_0}{|Z|} \sin(\omega_F t - \phi) \right)$$

Potencia absorbida o reactiva (transferida al oscilador por la fuerza impulsora)

$$|Z|^2 = \left(m\omega_F - \frac{k}{\omega_F}\right)^2 + b^2$$

$$\langle P_{\text{abs}}(t) \rangle = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{|Z|} \cos \phi = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{|Z|^2} R$$

**Potencia absorbida promedio.**

Suponiendo amortiguamiento pequeño:

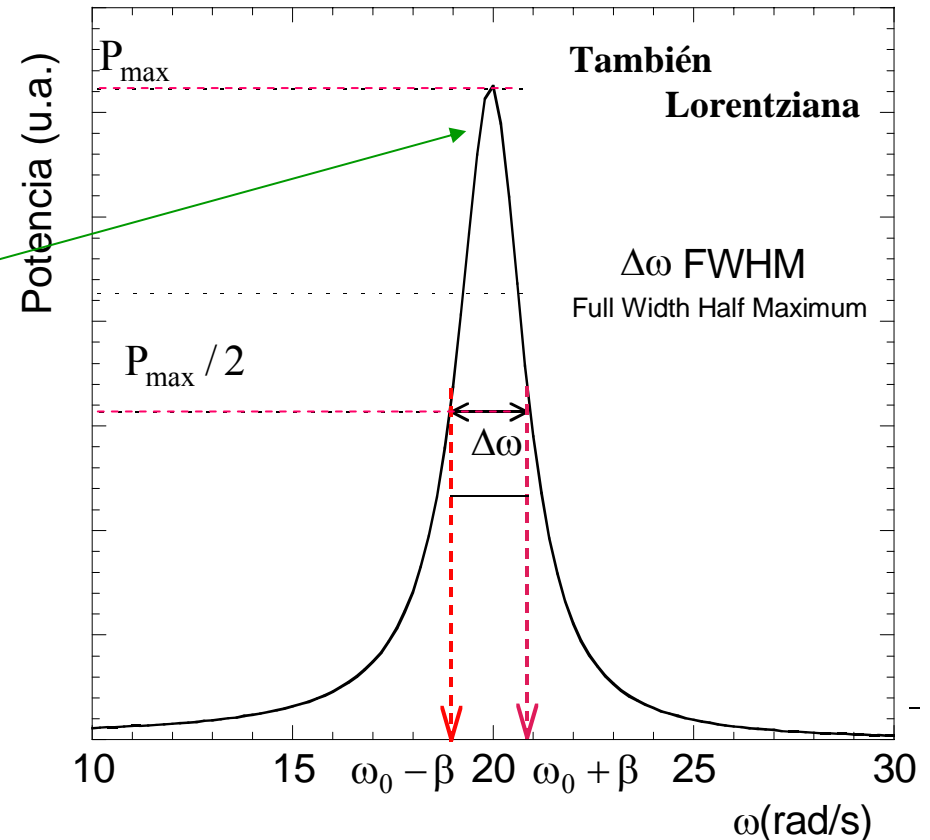
Máxima potencia absorbida: en la resonancia  $Z = R = b$   $\phi = 0$

$v_{\text{max}}$

$$P_{\text{max}} = P_{\text{abs}}(\omega_0) = \frac{1}{2} \frac{F_0^2}{R}$$

$$\frac{\langle P_{\text{abs}}(t) \rangle}{P_{\text{max}}} = \frac{b^2}{\left(m\omega_F - \frac{k}{\omega_F}\right)^2 + b^2}$$

**También Lorentziana**



Chantal Ferrer Roca 2008

## 7. Fuerza periódica. Principio de superposición

$$\ddot{\Psi} + 2\beta\dot{\Psi} + \omega_0^2\Psi = \frac{F_{ext}}{m}$$

$F_{ext}$  es Combinación lineal de otras fuerzas

$$F_{ext} = \sum_i c_i F_i(t)$$

**PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN:** si  $\Psi_i$  es solución de  $F_i$ , la solución general es la combinación lineal de soluciones  $\Psi_i$

$$\Psi_p(t) = \sum_i c_i \Psi_{p_i}(t)$$

definiendo el operador lineal  $L(\Psi) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + a\frac{d}{dt} + b\right) \cdot \Psi$

$$L(\Psi_p) = L\left(\sum_i c_i \Psi_i\right) = \sum_i c_i L(\Psi_i) = \sum_i c_i F_i(t) = F_{ext}$$

**Ejemplo: problema 3.6**



## 7. Fuerza periódica. Principio de superposición y Teorema de Fourier.

$$\ddot{\Psi} + 2\beta\dot{\Psi} + \omega_0^2\Psi = \frac{F_{ext}}{m}$$

$F_{ext}$  es Combinación lineal de otras fuerzas

$$F_{ext} = \sum_i c_i F_i(t)$$

$F_{ext}$  es función periódica,  $F(t+T) = F(t)$

**TEOREMA DE FOURIER:** Una función periódica  $f(t)$  de período  $T$  se puede escribir como la suma de sus componentes armónicas (senos o cosenos de frecuencia múltiplo de la frecuencia fundamental)

$$f(t) = a_0 + C_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + C_2 \sin(2\omega_1 t + \phi_2) + \dots + C_n \sin(n\omega_1 t + \phi_3) \quad \omega_1 = 2\pi/T \text{ frecuencia fundamental}$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \omega_n t + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \omega_n t$$

$$\omega_n = n\omega_1 \quad \text{armónicos}$$

$$\frac{a_0}{2} = \langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega t) dt$$

Las funciones  $\sin(n\omega t)$ ,  $\cos(n\omega t)$  son una base ortogonal ya que se cumple que:  $(n,k=1,2,3,\dots)$

$$\int_0^T \sin(n\omega t) \sin(k\omega t) dt = \int_0^T \cos(n\omega t) \cos(k\omega t) dt = \frac{\pi}{\omega} \delta_{nk} \quad \text{y} \quad \int_0^T \sin(n\omega t) \cos(k\omega t) dt = 0$$

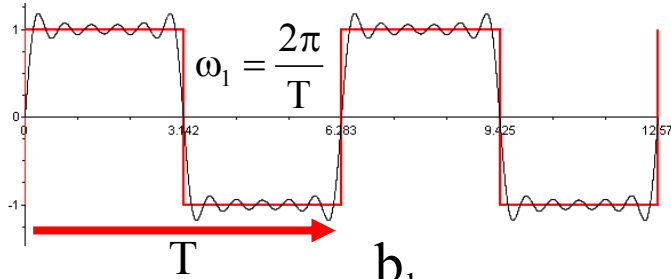
**Ejemplo: problema 3.7**

Chantal Ferrer Roca 2008

# 7. Fuerza periódica. Principio de superposición y Teorema de Fourier.

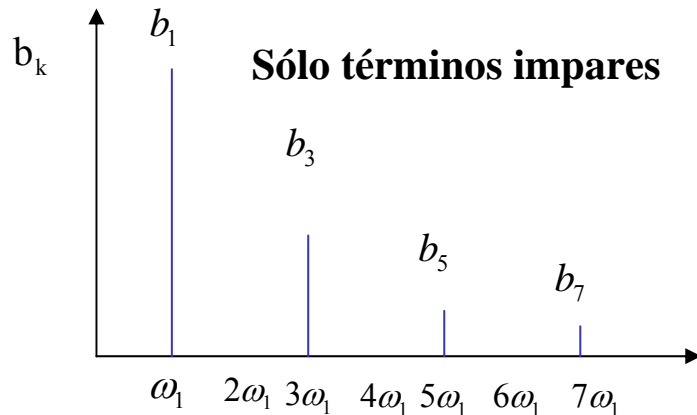
## Ejemplo: problema 3.7

$F_{\text{ext}}$  es función periódica,  $F(t+T) = F(t)$

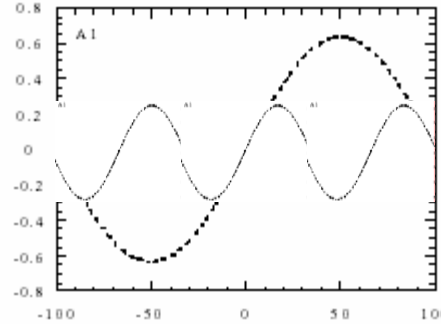


$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin \omega_k t$$

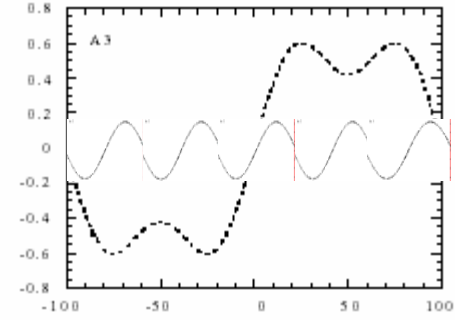
$$\omega_k = (2k+1)\omega_1$$



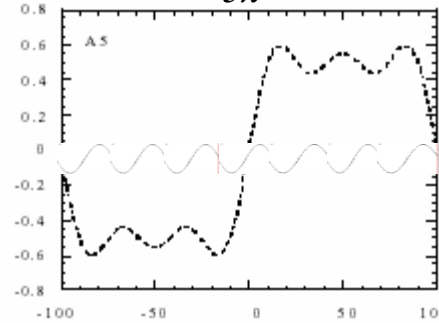
$$F_1 = \frac{2}{\pi} \sin \omega_1 t$$



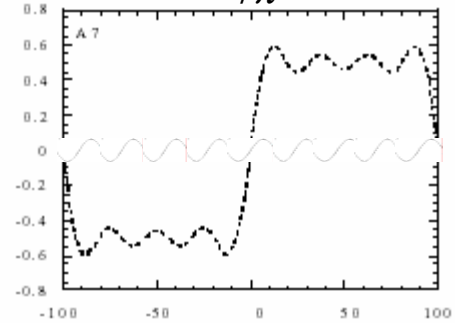
$$F_3 = F_1 + \frac{2}{3\pi} \sin 3\omega_1 t$$



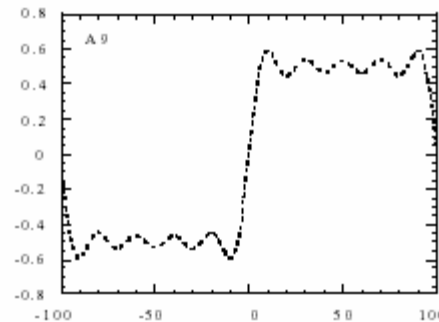
$$F_5 = F_3 + \frac{2}{5\pi} \sin 5\omega_1 t$$



$$F_7 = F_5 + \frac{2}{7\pi} \sin 7\omega_1 t$$



$$F_9 = F_7 + \frac{2}{9\pi} \sin 9\omega_1 t$$



$$F_{2k+1} = F_{2k-1} + \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin(2k+1)\omega_1 t$$

## 8. Otros aspectos de los osciladores (mención)

Chantal Ferrer Roca 2008

**Osciladores no lineales o anarmónicos**  $F(\Psi) \propto a\Psi + b\Psi^2 + c\Psi^3 + \dots$

$$\ddot{\Psi} + (a\Psi + b\Psi^2 + c\Psi^3 + \dots) = 0$$

**EJEMPLO-** OIDO HUMANO que oye dos sonidos = oscilador no lineal sometido a dos fuerzas de diferente  $\omega$ :

solución  $x(t) \propto \begin{cases} \cos \omega_1 t, \cos \omega_2 t \\ \cos 2\omega_1 t, \cos 2\omega_2 t \\ \cos(\omega_1 + \omega_2)t, \cos(\omega_1 - \omega_2)t \end{cases}$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + bx^2 = A \cos \omega_1 t + A \cos \omega_2 t$$

es un sonido más grave que se distingue claramente de los originales (Tercer sonido de Tartini).

## Osciladores paramétricos

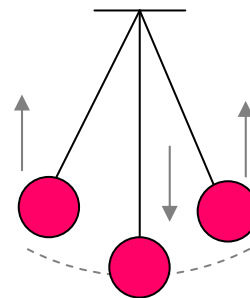
**EJEMPLO:** Un péndulo que cambie de longitud con el tiempo: cambia  $\omega$



Física en Acción 2003 (Terrasa, Barcelona)

$$\ddot{\Psi} + a(t)\Psi = 0$$

**MÉTODO** para poner en oscilación el botafumeiro de la catedral de Santiago de Compostela



**OTRO EJEMPLO:** un péndulo que cambie el momento de inercia con el tiempo (péndulo físico que cambia la longitud efectiva: cambia  $\omega$ ): es como nos columpiamos todos partiendo del reposo.

