Problemas de Mecánica y Ondas

2^o curso - Licenciatura en Física

Universitat de València

PRIMER CUATRIMESTRE

Profesores:
Gabriela Barenboim (Dep. Física Teórica)
Chantal Ferrer Roca (Dep. Física Aplicada)
Julio Pellicer Porres (Dep. Física Aplicada)
Jose A. Peñarrocha Gantes (Dep. Física Teórica)

Universitat de València OpenCourseWare

Introducción.*

I. a) Sea $\phi = e^{xy^2}$ con $x = t\cos t$ e $y = t\sin t$. Calculad $d\phi/dt$ en $t = \pi/2$.

b) Si $U = z\sin(y/x)$ con $x = 3r^2 + 2s$, $y = 4r - 2s^3$ y $z = 2r^2 - 3s^2$. Calculad $\partial U/\partial r$ y $\partial U/\partial s$.

c) Si $U = x^3 y$ y $x^5 + y = t$, $x^2 + y^3 = t^2$, encontrad $\partial U/\partial t$.

SOL:

a) $-\pi^3/8$

b) $\frac{\partial U}{\partial r} = \left(\frac{4z}{x} - \frac{6ryz}{x^2}\right)\cos(\frac{y}{x}) + 4r\sin(\frac{y}{x})$
$\frac{\partial U}{\partial s} = \left(\frac{6s^2yz}{x} - \frac{2yz}{x^2}\right)\cos(\frac{y}{x}) - 6s\sin(\frac{y}{x})$,

c) $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{9y^3 - 6yt + 10x^5t - 2x^2}{15x^4y^2 - 2x}x^2$

II. a) Si $\vec{r} = (t^3+2t)\vec{i} - 3e^{-2t}\vec{j} + 2\sin(5t)\vec{k}$, encontrad $d\vec{r}/dt$, $|d\vec{r}/dt|$, $d^2\vec{r}/dt^2$ y $|d^2\vec{r}/dt^2|$ en t=0.

b) Sea $\phi = x^2yz$ y $\vec{A} = 3x^2y\vec{i} + yz^2\vec{j} - xz\vec{k}$. Encontrad $\partial^2(\phi\vec{A})/\partial y\partial z$ en el punto $(1, -2, -1)$.

SOL:

a) $\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_0 = 2\vec{i} + 6\vec{j} + 10\vec{k}$, $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_0 = 2\sqrt{35}$, $\left.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_0 = -12\vec{j}$, $\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_0 = 12$

b) $-12\vec{i} - 12\vec{j} + 2\vec{k}$

III. Sea $\vec{A} = (3x^2 + 6y)\vec{i} - 14yz\vec{j} + 20xz^2\vec{k}$. Encontrad $\int_\Gamma \vec{A}\cdot d\vec{r}$ desde $(0,0,0)$ a $(1,1,1)$, a lo largo de las siguientes trayectorias:

a) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

b) La recta que une el punto $(0,0,0)$ y el $(1,1,1)$

c) Las rectas que unen los puntos $(0,0,0)$ con $(1,0,0)$ y el $(1,0,0)$ con el $(1,1,1)$.

SOL: a) 5, b) 13/3, c) 3

1. Cinemática del punto.

1. 1. Dadas las coordenadas cilíndricas ρ, ϕ y z, definidas en los intervalos $0 \le \rho \le \infty$, $0 \le \phi \le 2\pi$ y $-\infty \le z \le \infty$, ligadas con las cartesianas por las relaciones : $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, $z = z$.

a) Hallad los vectores unitarios y la matriz de transformación, mostrando que el nuevo sistema de coordenadas es un sistema de coordenadas ortogonal.

b) Calculad las componentes cilíndricas del vector $\vec{v} \equiv (1, -1, 0)$, aplicado en el punto P(1,1,0), expresados ambos en coordenadas cartesianas.

SOL: : a) *Esquemas de sistemas coordenados*; b) $\vec{v} = -\sqrt{2}\vec{u}_\phi$

*Los problemas I al III están destinados a aquellas personas que necesiten repasar algunos aspectos del cálculo diferencial e integral

1. 2. Dadas las coordenadas esféricas ρ, θ y ϕ, definidas en los intervalos de variación $0 \leq \rho \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$, ligadas con las cartesianas por las relaciones: $x = \rho \sin\theta \cos\phi$, $y = \rho \sin\theta \sin\phi$, $z = \rho \cos\theta$.

   a) Hallad los vectores unitarios y la matriz de transformación, mostrando que el nuevo sistema de coordenadas es un sistema de coordenadas ortogonal.

   b) Sea el punto P de coordenadas esféricas $\rho = 3$, $\theta = \pi/4$, $\phi = \pi/2$. Escribid el vector $\vec{j}$ en la base local del punto P.

   SOL: : a) *Esquemas de sistemas coordenados*; b) $\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{u}_r + \vec{u}_\theta)$.

1. 3. Hallad los elementos de arco, superficie y volumen en a) coordenadas cilíndricas, b) coordenadas esféricas.
   SOL: : *Esquemas de sistemas coordenados*

1. 4. Un punto se mueve en el plano XY, de forma que se cumple $v_x = 4t^3 + 4t$; $v_y = 4t$. Si para t=0 la posición del punto es (1,2), se pide:

   a) Encontrad x=x(t), y=y(t) y la ecuación de la trayectoria y=y(x).

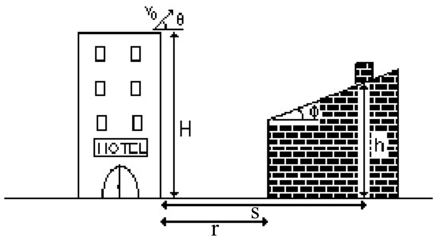
   b) Hallad la aceleración tangencial y normal en t=0.

   SOL: : $x = (t^2+1)^2$; $y = 2(t^2+1)$; $y = 2\sqrt{x}$; $a_t = 4\sqrt{2}\ m/s^2$; $a_n = 0$.

1. 5. Evaluad las derivadas temporales de los vectores base en coordenadas cilíndricas y esféricas. Expresad los vectores posición, velocidad y aceleración en ambos sistemas.
   SOL: : *Esquemas de sistemas coordenados.*

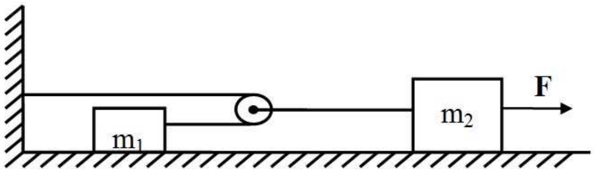
1. 6. Durante una tormenta, las trayectorias de las gotas de agua sobre la ventana de un tren forman un ángulo respecto a la vertical $\alpha_1 = 30^o$ cuando el tren se desplaza a una velocidad $u_1 = 45\ km/h$, mientras que forman un ángulo $\alpha_2 = 45^o$ cuando su velocidad es $u_2 = 90\ km/h$. Calculad la velocidad y el ángulo de las gotas de agua observadas desde el exterior del tren.
   SOL: $v = 108\ km/h$, $\alpha = 9^o$).

1. 7. Mario Tijeras, apodado *El gato*, acaba de robar en un prestigioso hotel e intenta escapar por la terraza del mismo, que está situada a una altura H de 15 m. Su única opción es saltar sobre una casa que se encuentra a $r = 2\ m$ del hotel y cuyo tejado está inclinado un ángulo $\phi = 30^o$. En este tejado existe una chimenea cuya base se encuentra a una altura h de 12 m sobre el suelo y a una distancia s del hotel de 4 m. *El gato* piensa que si inicia el salto con una velocidad $v_0 = 3\ m/s$, formando un ángulo de $\theta = 72^o$, caerá sobre el tejado. Comprueba si el gato tiene razón, calculando la posición de caída.
   SOL: *El gato* caería sobre el tejado si el tejado comenzase más cerca del hotel, a $r = 1.2\ m$.



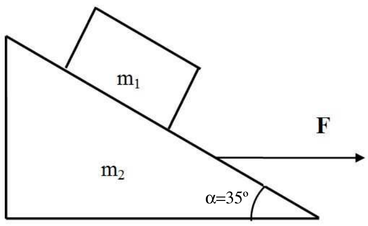
2. Dinámica del punto.

2. 1. En el sistema de la figura el rozamiento y la masa de la polea son despreciables. Encontrad la aceleración de m_2 si $m_1 = 300\ g$, $m_2 = 500\ g$ y $F = 1.5\ N$.



Sol: $a = 0.882\ m/s^2$.

2. 2. Un bloque de masa m_1 descansa sobre la superficie inclinada de una cuña de masa m_2, como muestra la figura. Sobre la cuña actúa una fuerza horizontal F, que la hace deslizar sobre una superficie sin rozamiento. El coeficiente de rozamiento estático entre la cuña y el bloque es μ. Determinad los valores mínimo y máximo de F para los que el bloque no desliza sobre la cuña. Aplicación numérica: $m_1 = 0.5\ kg$, $m_2 = 2\ kg$, $\mu = 0.4$.



Sol: $F_{min} = (m_1 + m_2)g\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = 6.49\ N$, $F_{max} = (m_1 + m_2)g\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = 6.49\ N$

2. 3. La carga eléctrica de un electrón y de un protón es de $Q_p = Q_e = 1.6 \cdot 10^{-19}\ C$. Si sus masas son $m_p = 1836\ m_e$, $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\ kg$, a) calculad el cociente entre las fuerzas gravitatoria y eléctrica que ejercen entre sí las dos partículas. b) Comparad la fuerza eléctrica anterior, considerando una distancia protón-electrón igual al radio de Bohr ($a_0 = h^2\epsilon_0/\pi m_e e^2$), con la fuerza gravitatoria ejercida entre los sistemas Tierra-Sol ($m_T = 6 \cdot 10^{24}\ kg$, $m_S = 2 \cdot 10^{30}\ kg$, $d_{T-S} = 1.5 \cdot 10^{11}\ m$) y Tierra-Luna ($m_L = 7.4 \cdot 10^{22}\ kg$, $d_{T-L} = 3.8 \cdot 10^8\ m$).

c) Estima el radio de Bohr que se obtendría si la única fuerza de atracción entre el electrón y el protón fuese la gravitatoria.
SOL: a) $F_g/F_e \sim 10^{-40}$, b) $F_g(T-S) \sim 10^{22}\ N$, $F_g(T-L) \sim 10^{20}\ N$, $F_e \sim 10^{-8}\ N$, c) $a'_0 \sim 10^{30}\ m$.

2. 4. Un cuerpo se deja caer libremente en el aire. Si la fuerza de rozamiento se puede considerar proporcional a la velocidad, $F_r = b \cdot v$, a) comprobad que el cuerpo alcanza una velocidad límite, b) encontrad la ecuación de la velocidad en función del tiempo, supuesta conocida la velocidad límite. Si el cuerpo es una bolita pequeña y la velocidad no es muy elevada, la constante b está dada por la *ley de Stokes*, $b = 6\pi R\eta$, siendo R el radio de la bolita y η la viscosidad del aire. c) Calcula la velocidad límite de caída de una gota de agua de 1 mm de diámetro, con $\eta = 1.81 \cdot 10^{-5}\ Pa \cdot s$, así como el orden de magnitud del tiempo que tarda en alcanzar dicha velocidad límite.
SOL: a) $v_L = mg/b$, b)$v = v_L\left[1 - e^{-gt/v_L}\right]$, c) $30\ m/s$, $3.1\ s$

2. 5. Determinad cuáles de las siguientes fuerzas son conservativas y encontrad la energía potencial correspondiente:

   a) $\vec{F} = (6abz^3y - 20bx^3y^2)\vec{i} + (6abxz^3 - 10bx^4y)\vec{j} + 18abxyz^2\vec{k}$
   b) $\vec{F} = (18abz^3y - 20bx^3y^2)\vec{i} + (18abxz^3 - 10bx^4y)\vec{j} + 6abxyz^2\vec{k}$
   c) $\vec{F} = \frac{3x^2-y^2}{x^2}\vec{i} + \frac{2y}{x}\vec{j}$

   SOL: a) $U = -6abxyz^3 + 5bx^4y^2 + C$; b) No conservativa; c) $U = -3x - \frac{y^2}{x} + C$, Ec. líneas de campo: $y^3 + k(y^2 - x^2) = 0$.

2. 6. Encontrad el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F} = xy\vec{i} + z^2\vec{j} + xyz\vec{k}$ cuando mueve una partícula desde el punto $A(1, 0, 2)$ hasta el $B(3, -2, -1)$ a lo largo de:

   a) La curva dada por $x = 1 + 2t$, $y = -2t^2$, $z = 2 - 3t$
   b) La recta AB.

   SOL: a)$-\frac{181}{30}$, b) $-\frac{23}{3}$

2. 7. ¿ Desde qué altura mínima debe caer un cuerpo de masa m para hacer « el rizo de la muerte» de radio R sin caerse?. Despreciad el rozamiento.
SOL: $h = \frac{5}{2}R$.

2. 8. Una partícula de masa m está sometida a una fuerza :

$$F = B\left(\frac{a^2}{x^2} - 28\frac{a^5}{x^5} + 27\frac{a^8}{x^8}\right) \quad B > 0, \quad a > 0$$

   a) Encontrad y representad la energía potencial V(x)
   b) Describid los tipos de movimientos posibles. Localizad los puntos de equilibrio y determinad la frecuencia de las oscilaciones pequeñas alrededor de los que sean estables.
   c) Una partícula parte de $x_0 = 3a/2$ con una velocidad $v = -v_0 < 0$. ¿ Cuál es el valor mínimo de v_0 para el que la partícula acabará escapándose lejos del origen?. Describid el movimiento en este caso. ¿ Cuál es la velocidad máxima que tendrá la partícula? ¿ Qué velocidad tendrá cuando se halle muy alejada del punto de partida?.

SOL: a) $V(x) = B\frac{a^2}{x^7}(x^6 - 7a^3x^3 + \frac{27}{7}a^6)$, ceros: $1.86a$ y $0.84a$, máximo: $3a$, mínimo: a, $\lim_{x\to\pm\infty} V(x) = 0$; $\lim_{x\to\pm 0} V(x) = \pm\infty$; b) Si $x > 0$: $V(a) < E < 0$ acotado, $V(3a) > E > 0$ acotado o no según x, $V(3a) < E$ no acotado. Si $x < 0$: $E > 0$ no acotado, $E < 0$ acotado, $\omega = \sqrt{\frac{78B}{ma}}$; c) $v_0 > \sqrt{\frac{1.48Ba}{m}}$, $v_{max} = \sqrt{\frac{4.78Ba}{m}}$, $v)(\infty) = \sqrt{\frac{0.5Ba}{m}}$

3. Oscilaciones simples.

3. 1. Encontrad la ecuación del movimiento resultante de la superposición de dos movimientos armónicos simples paralelos cuyas ecuaciones son $x_1 = 6\,\mathrm{sen}(2t)$ y $x_2 = 8\,\mathrm{sen}(2t+\phi)$, si $\phi = 0, \pi/2$ y π. Haced un gráfico de cada movimiento y del movimiento resultante en cada caso.
SOL: $x = x_1 + x_2 = A\sin(2t+\theta)$; $\theta = \arctan[8\sin\phi/(6+8\cos\phi)]$; $A = (100 + 96\cos\phi)^{1/2}$.

3. 2. Encontrad la ecuación de la trayectoria de una partícula cuyo movimiento resulta de la combinación de dos movimientos armónicos simples perpendiculares cuyas ecuaciones son $x = 4\,\mathrm{sen}\,\omega t$ e $y = 3\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$ en los casos en que a) $\phi = 0$, b) $\phi = \pi/2$ y c) $\phi = \pi$. Haced un gráfico de la trayectoria para cada caso y señalar el sentido en el que viaja la partícula.
SOL: a) $y = 3x/4$ polarización rectilínea, b) $x^2/16 + y^2/9 = 1$, polarización elíptica), c) $y = -3x/4$ polarización rectilínea;.

3. 3. Una masa m cae desde una altura h sobre una plataforma de masa despreciable que está montada sobre un muelle de constante elástica k y que está provista de un dispositivo de amortiguamiento crítico. Encontrad la máxima altura desde la que debe soltarse la masa m para que la plataforma no descienda por debajo de la posición de equilibrio.
SOL: $h < \frac{g}{2\omega^2} = -x_{eq}/2$.

3. 4. a) Estudiad la evolución temporal de la energía de un péndulo simple teniendo en cuenta la fricción con el aire. Si los datos del péndulo son $m = 100\ g$, $l = 1\ m$, y las condiciones iniciales $\phi_0 = 5^o$ y $v_0 = 0$, b) ¿ Cuál es el factor de amortiguamiento si después de 100 períodos la amplitud es el 10 % del valor inicial?. c) ¿ Cuál es el valor de la energía media en ese instante?.
SOL:
a) $E = \frac{1}{2}ml^2\phi_0^2 e^{-2\beta t}\left\{\omega_0^2 + \beta^2\cos[2(\omega' t+\varphi)] + \beta\omega'\sin[2(\omega' t + \varphi)]\right\}$, $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, b) $\beta = 0.011\ s^{-1}$, c) $< E >= 0.01E_o$.

3. 5. a) Hállese, utilizando el principio de superposición, el movimiento de un oscilador armónico inframortiguado ($\beta = \omega_0/3$), inicialmente en reposo y sometido a partir de $t = 0$ a una fuerza $F = A\sin(\omega_0 t) + B\sin(3\omega_0 t)$, donde ω_o es la frecuencia natural del oscilador. b) ¿ Qué valor ha de tener la razón B/A para que la oscilación forzada de frecuencia $3\omega_0$ adquiera la misma amplitud que la de frecuencia ω_0?.
SOL:
a) $x = Ce^{-\frac{\omega_0}{3}t}\sin(\frac{\sqrt{8}}{3}\omega_0 t + \varphi) + \frac{3A}{2m\omega_0^2}\sin(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) + \frac{B}{2\sqrt{17}m\omega_0^2}\sin(3\omega_0 t - 0.92\pi)$, $C = \frac{3}{136m\omega_0^2}\sqrt{5202A + 1020AB + 306B^2}$, $\tan\varphi = \frac{\sqrt{8}(51A+B)}{51A+37B}$; b) $B/A = 3\sqrt{17}$.

3. 6. Un oscilador armónico no amortiguado de masa m y frecuencia ω_o está inicialmente en reposo. En el instante $t_0 = 0$ recibe un impulso, por lo que parte de $x_0 = 0$ con una velocidad v_0, oscilando libremente hasta $t_1 = \frac{3\pi}{2\omega_0}$. A partir de ese momento se le aplica una fuerza $F = B\cos(\omega t + \theta)$. Hállese la posición de la masa en función del tiempo para $t > t_1$.
Sol: $x = A'\cos(\omega_0 t + \phi') + K\cos(\omega t + \theta)$,
con $A' = \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0} K\sin\delta\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0} + K\cos\delta\right)^2}$, $K = \frac{B}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$, $\delta = \theta + \frac{3\pi}{2}\frac{\omega}{\omega_0}$, $\tan\phi' = -\left[\frac{\frac{v_0}{\omega_0} + K\cos\delta}{\frac{\omega}{\omega_0}K\sin\delta}\right]$

3. 7. Encontrad la respuesta estacionaria de un oscilador armónico forzado a la función de onda cuadrada definida como:

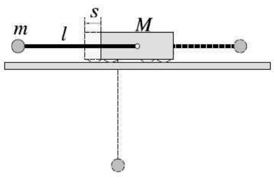
$$f(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & -\tau \leq t < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 < t \leq \tau \end{cases}$$

utilizando el desarrollo en serie de Fourier. Describe cualitativamente el movimiento si la frecuencia natural del oscilador es de $\omega_0 = 101\ rad/s$, el factor de amortiguamiento vale $\beta = 0.1\ s^{-1}$ y $\tau = \pi\ s$.
sol $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_k^2)^2 + 4\beta^2\omega_k^2}} \sin(\omega_k t + \phi_k)$, $\tan\phi_k = -\frac{2\beta\omega_k}{\omega_0^2 - \omega_k^2}$, $\omega_k = (2k+1)\frac{\pi}{\tau}$.

4. Sistemas de partículas.

4. 1. Un pez se mueve gracias a los impulsos que genera gracias a su aleta caudal. Por simplificar suponemos que la masa M de agua que desplaza adquiere una velocidad V. Demuestra que la energía necesaria para que el pez se mueva, que proporciona su metabolismo, se aprovecha mejor cuanto más grande es M, es decir, cuanto más grande sea la cola.

4. 2. Un bloque de masa M desliza sin fricción sobre una guía horizontal. En el centro del bloque está suspendida una masa pendular m, de pequeñas dimensiones, unida a una varilla rígida y ligera. Se abandona la masa pendular desde la posición horizontal, como se indica en la figura. a) Determinad el desplazamiento horizontal, s, que experimentará el bloque cuando la varilla alcance la posición horizontal al otro lado del bloque. b) Calculad las velocidades del bloque y de la masa pendular cuando ésta pasa por la posición más baja.



Sol: a)$s = -\frac{2m}{M+m}l$, b) $v = \sqrt{\frac{2M}{M+m}gl}$, $V = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2M}{M+m}gl}$

4. 3. Sea un sistema de dos masas m_1 y m_2, con $m_2 > m_1$, colgadas cada una de un lado de una polea de radio R. La masa de la polea y del cable se considera despreciable. En el instante inicial las dos masas están a la misma altura. Se pide:

   a) Calcular la posición, velocidad y aceleración del centro de masas.
   b) Comprobar explícitamente la relación entre la fuerza total aplicada y la aceleración del centro de masas.
   c) Calcular la energía cinética total en el sistema del laboratorio, comprobando la relación que existe con la expresión de la energía cinética en el sistema de referencia centro de masas.
   d) Calcular el momento angular total en el sistema del laboratorio, comprobando la relación que existe con la expresión del momento angular en el sistema de referencia centro de masas.
   e) Comprobar explícitamente que la variación del momento angular total es igual al momento externo aplicado.

   SOL: a) $\vec{r}_{CM} = \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\left(R\vec{j} - \frac{1}{2}\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}gt^2\vec{k}\right)$, c) $E_c = \frac{1}{2}\frac{(m_2-m_1)^2}{m_1+m_2}g^2t^2$, d) $\vec{L} = -(m_2-m_1)Rgt\vec{i}$

4. 4. Un cohete de combustión de dos fases se encuentra en una zona del espacio donde el campo gravitatorio es despreciable. La masa útil del cohete (masa de la cápsula) es m. La masa de la segunda fase más la de la cápsula es n_2m y la masa de la primera y segunda fases más la de la cápsula es n_1m. En cada una de las fases la masa del contenedor respecto a la suma de éste más el combustible es r. La velocidad de expulsión de los gases es v_0.

   a) Demostrad que la velocidad después de ser consumida la primera fase es $v(t_1) = v_0 \ln\left(\frac{n_1}{n_1r+n_2(1-r)}\right)$.
   b) Obtened v_2 al final de la segunda fase.
   c) Considerando n_1 y r constantes, obtened el valor de n_2 para el que v_2 es máxima. Demostrad que el caso v_2 máxima corresponde a un aumento de velocidad que es el mismo en cada fase.
   d) Obtened la velocidad de un cohete de una sola fase con n_1, r, y v_0 idénticos al cohete de dos fases. ¿ Qué es más útil, un cohete de una o varias fases?.
   e) Considerad un cohete con masa inicial total de 3000 ton, masa final de 2700 ton, velocidad de escape de los gases de 55000 m/s y la velocidad con que se consume el combustible de 1290 kg/s. Comparad la velocidad final con la que se obtendría al considerar un campo gravitatorio constante con $g = 9.81$ m/s^2.

   SOL: b) $v(t_2) = v(t_1) + v_0\ln\left(\frac{n_2}{n_2r+(1-r)}\right)$; c) $n_2 = \sqrt{n_1}$; d) Mayor v final con dos fases; e) 5800 m/s, 3500 m/s

4. 5. Una cinta transportadora está cargando material a un ritmo constante dm/dt. La cinta se mueve a una velocidad v bajo la acción de una fuerza aplicada F (ambas constantes). Calculad:

   a) El trabajo que realiza por unidad de tiempo la fuerza F.

b) El incremento de energía cinética T por unidad de tiempo. ¿Dónde está la energía que falta?

c) Verificad que si la masa m de un sistema con velocidad $\vec{v}$ varía porque recibe un aporte de masa dm/dt con velocidad $\vec{u}$, la energía cinética del sistema varía según:

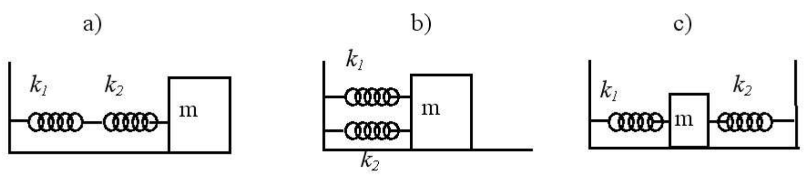
$$\frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} + \frac{1}{2}\frac{dM}{dt}u^2 - \frac{1}{2}\frac{dM}{dt}(\vec{u} - \vec{v})^2$$

Interpretad los términos de la fórmula y aplicadla al caso de la cinta transportadora.

SOL: a) $\frac{dW}{dt} = \frac{dm}{dt}v^2$, b) $\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dm}{dt}v^2$

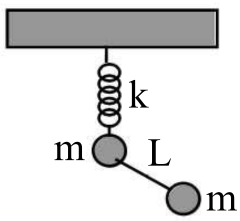
5. INTRODUCCIÓN A LA FORMULACIÓN LAGRANGIANA Y HAMILTONIANA.

5. 1. Sean dos muelles de constantes de recuperación k_1 y k_2. Determinad el período de oscilación de una masa m para los tres casos de la figura.



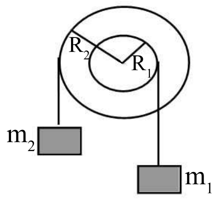
SOL: $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$ con a) $k_{eq}^{-1} = k_1^{-1} + k_2^{-1}$, b) $k_{eq} = k_1 + k_2$, c) $k_{eq} = k_1 + k_2$.

5. 2. Hallad las ecuaciones del movimiento del sistema de la figura siguiendo el método de las ecuaciones de Lagrange. Considerad que el muelle oscila sin balancearse y que todo el movimiento ocurre en el plano vertical.



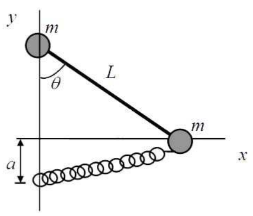
SOL: $\begin{cases} \ddot{y} - \frac{L}{2}(\sin\theta\ddot{\theta} + \cos\theta\dot{\theta}^2) + \frac{k}{2m}y = g \\ L\ddot{\theta} + \sin\theta(g - L\ddot{y}) = 0 \end{cases}$

5. 3. Hallad las ecuaciones del movimiento de las masas m_1 y m_2 de la figura mediante las ecuaciones de Lagrange, suponiendo hilos y poleas sin masa y ausencia de rozamiento.



SOL: $\ddot{\theta} = g\frac{m_2R_2 - m_1R_1}{m_1R_1^2 + m_2R_2^2}$

5\. 4. El dispositivo de la figura consta de dos masas iguales unidas por una varilla rígida de longitud L. En el sistema de coordenadas de la figura la gravedad viene dada por $\vec{g} = -g\vec{j}$. Sabiendo que las masas no pueden abandonar los ejes en los que originalmente se encuentran, calculad las ecuaciones del movimiento de Lagrange. Por simplificar, despreciad la longitud del muelle sin estirar. Estudiad las oscilaciones alrededor de las posiciones de equilibrio.



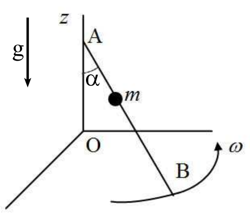
SOL: $\ddot{\theta} - \frac{g}{L}\cos\theta + \frac{k}{m}\cos\theta\sin\theta = 0$

5\. 5. Una cadena homogénea de longitud L está apoyada en el borde de una mesa sobre la que puede deslizar sin rozamiento. Calculad el movimiento sabiendo que en el instante en que la soltamos 1/5 de su longitud está fuera de la mesa.

SOL:

$$\begin{cases} y = y_0\cosh\sqrt{\frac{g}{L}}t & t < t_1 \\ y = L + \sqrt{Lg}t + \frac{1}{2}gt^2 & t \geq t_1 \end{cases} \quad \text{donde } t_1 = \sqrt{\frac{L}{g}}\ln\left(\frac{L + \sqrt{L^2 - 4y_0^2}}{2y_0}\right)$$

5\. 6. La barra AB de la figura gira con velocidad angular ω en torno al eje OZ con el punto A fijo. Si la longitud de la barra es L y por ella desliza sin rozamiento una bola de masa m, ¿ cuánto tardará en salir de la barra si partió del reposo en el punto A?.

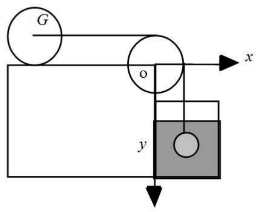


SOL: $\ddot{s} - \omega^2\sin^2\alpha\ s = g\cos\alpha$, $s = \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}\left[\cosh(\sin\alpha\ \omega t) - 1\right]$

5. 7. Considerad una partícula forzada a moverse sobre la superficie de un cilindro (de radio R y con el eje central según el eje z) y sometida a una fuerza del tipo $\vec{F} = -k\vec{r}$. Obtened y resolved las ecuaciones del movimiento utilizando coordenadas cilíndricas.
Sol: $\begin{cases} \phi = \frac{p_\phi}{mR^2}t + \phi_0 \\ z = A\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi) \end{cases}$

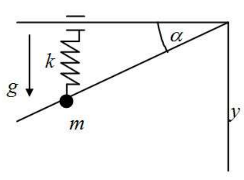
5. 8. Hallad las ecuaciones de Lagrange de una partícula puntual m sometida a la fuerza $\vec{F} = (0, 0, xy)$ y que está restringida a moverse en una superficie esférica de radio R.
Sol: $\begin{cases} m\ddot{\theta} - m\dot{\phi}^2\cos\theta\sin\theta = -R\sin^3\theta\cos\phi\sin\phi \\ p_\phi = cte \end{cases}$

5. 9. Un disco de masa M y radio R gira sin deslizar sobre una guía situada en el eje x. Un hilo de masa despreciable enganchado en el punto G pasa por una polea de masa M y radio R. De la extremidad del hilo cuelga un cuerpo de masa m que se encuentra en el seno de un líquido viscoso. Encontrad las ecuaciones del movimiento del sistema. Considerad la fuerza viscosa proporcional a la velocidad $F_{vis} = bv$ y despreciad el empuje.



Sol: $\ddot{y} + \frac{b}{2M+m}\dot{y} = \frac{mg}{2M+m}$.
Con $y(0) = y_0$ e $\dot{y}(0) = 0$ resulta $y = y_0 + \frac{mg(2M+m)}{b^2}\left(e^{-\frac{b}{2M+m}t} - 1\right) + \frac{mg}{b}t$

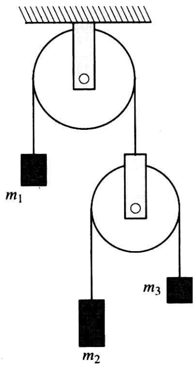
5. 10. Estudiad, mediante el formalismo lagrangiano, el movimiento de una masa m, inicialmente en reposo a una distancia r_0 del origen, que está forzada a moverse sin rozamiento sobre una varilla contenida en el plano vertical y que forma un ángulo α con la horizontal. La masa está unida a un muelle de longitud inicial l, constante k y masa despreciable que se mueve con ella permaneciendo siempre vertical.



Sol: $\ddot{r} + \left(\frac{k}{m}\sin^2\alpha\right)r - \left(g + \frac{kl}{m}\right)\sin\alpha = 0$, $r = (r_0 - r_e)\cos(\omega t) + r_e$,
$r_e = \frac{1}{\sin\alpha}\left(\frac{mg}{k} + l\right)$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\sin\alpha$, $N = [mg - k(r\sin\alpha - l)]\cos\alpha$

5. 11. Estudiad, mediante el formalismo lagrangiano, la máquina de Atwood doble. Despreciad las masas y el rozamiento de las poleas. Obtened

también las tensiones de las cuerdas.



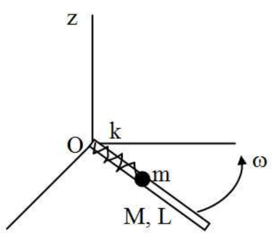
SOL: $\begin{cases} \ddot{z}_1 = \frac{g}{D}[m_1(m_2+m_3) - 4m_3m_2] \\ \ddot{z}_2 = \frac{g}{D}(m_1m_2 - 3m_1m_3 + 4m_2m_3) \\ \ddot{z}_3 = -\frac{g}{D}(3m_1m_2 - m_1m_3 - 4m_2m_3) \end{cases}$, $\begin{cases} F_1 = \frac{g}{D}(8m_1m_2m_3) \\ F_2 = \frac{g}{D}(4m_1m_2m_3) \end{cases}$
con $D = m_1(m_2+m_3) + 4m_2m_3$

5\. 12. Un punto material se desliza sin rozamiento por la superficie de una esfera, partiendo del reposo desde el punto más alto de la misma. Demostrad que el punto material se separa de la esfera después de haber descrito un ángulo polar de valor $\arccos(2/3)$.

5\. 13. Hallad las ecuaciones del movimiento de Hamilton para una masa m que cae bajo la acción de la gravedad por una hélice cilíndrica cuyo paso es κ.
SOL: $\dot{z} = \frac{\kappa^2}{\kappa^2+4\pi R^2}\frac{p_z}{m}$, $\dot{p}_z = -mg$

5\. 14. Hallad las ecuaciones diferenciales de Hamilton para un péndulo constituido por una partícula de masa m que cuelga de un muelle de constante elástica k.
SOL: $\begin{cases} \dot{r} = \frac{p_r}{m} & \dot{p}_r = mg\cos\theta - k(r-l_0) - \frac{p_\theta^2}{mr^3} \\ \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} & \dot{p}_\theta = -mgr\sin\theta \end{cases}$

5\. 15. Una barra de longitud L y masa M gira en un plano horizontal alrededor de un eje vertical. Por la barra puede moverse una masa m sujeta por un muelle de constante de recuperación k, como se ve en la figura. Calculad: a) Las ecuaciones de Hamilton, b) las coordenadas cíclicas, c)¿ es H una constante del movimiento?, d) ¿ coincide H con la energía?.



SOL: $\begin{cases} \dot{r} = \frac{p_r}{m} & \dot{p}_r = \frac{mrp_\phi^2}{(mr^2+I)^2} - k(r-l_0) \\ \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{I+mr^2} & \dot{p}_\phi = 0 \end{cases}$

6. Campos y movimiento en campos centrales.

6. 1. Dada la función $f(x, y) = y - x^2$:

a) Representa en papel milímetrado (o al menos cuadriculado) las curvas de nivel $y - x^2 = K$, donde K es el valor de f en la curva de nivel. Dibuja tres curvas con K=0, 2 y 4.

b) Calcula $\vec{\nabla} f$. Represéntalo en los puntos A(0,0), B(0,4) y C(1,1). ¿ Qué orientación tiene el vector gradiente respecto de las curvas de nivel?

c) ¿ Cuánto cambia la función f al pasar del punto A al C? Comprueba que puedes obtener dicho cambio usando $\int_A^C \vec{\nabla} f d\vec{l}$. Para calcular la integral utiliza dos caminos:
Camino I. De A a D(1,0) y de D a C.
Camino II. De A a C siguiendo la recta y=x.

6. 2. Demostrad que $\vec{F} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$ es a la vez solenoidal ($\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$) e irrotacional ($\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$). Calculad la circulación $C = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ entre los puntos $A(1, 0, -2)$ y $B(2, 1, 3)$.
SOL: $C = 6$

6. 3. Demostrad que:

a) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = 0$

b) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0$

c) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \cdot \vec{E}$

6. 4. Encontrad $\int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$, donde $\vec{A} = z\vec{i} + x\vec{j} + 3y^2z\vec{k}$ y S es la superficie del primer octante de un cilindro con $x^2 + y^2 = 16$ y z comprendido entre 0 y 5. Repetid el cálculo en coordenadas cilíndricas.
SOL: 90.

6. 5. Calculad la integral $\int_V (x^2 + y^2 + z^2) dV$, donde V es el volumen de una esfera centrada en el origen y de radio a.
SOL: $4\pi a^5/5$

6. 6. Deducid las expresiones de los operadores gradiente, divergencia y rotacional en coordenadas curvilíneas ortogonales. Particularizad para coordenadas esféricas y cilíndricas.
SOL: *Esquemas de sistemas coordenados.*

6. 7. Calcula la divergencia de los siguientes campos vectoriales:

a) $\vec{v} = \frac{1}{r^2}\vec{u}_r$ (en esféricas)

b) $\vec{v} = r\vec{u}_r$ (en esféricas)

c) $\vec{v} = \frac{1}{r}\vec{u}_\phi$ (en cilíndricas)

d) $\vec{v} = r\vec{u}_\phi$ (en cilíndricas)

En cada apartado haz un esquema del campo vectorial e interpreta el resultado obtenido en el cálculo de la divergencia.

6. 8. Calcula el rotacional de los siguientes campos vectoriales:

a) $\vec{v} = \frac{1}{r^2}\vec{u}_r$ (en esféricas)
b) $\vec{v} = r\vec{u}_r$ (en esféricas)
c) $\vec{v} = \frac{1}{r}\vec{u}_\phi$ (en cilíndricas)
d) $\vec{v} = r\vec{u}_\phi$ (en cilíndricas)

En cada apartado haz un esquema del campo vectorial e interpreta el resultado obtenido en el cálculo del rotacional.

6. 9. Demostrad que el vector $\vec{F} = \frac{z}{\rho}\vec{u}_\phi + \phi\vec{u}_z$, expresado en coordenadas cilíndricas, es irrotacional y solenoidal.

6. 10. Analizando el comportamiento para valores de r pequeños del potencial central $U(r) = -\alpha r^n$, con $\alpha > 0$, determinad los valores de n que hacen posible que una partícula pueda caer hacia el origen. Considerad el caso no trivial en el que el momento angular es diferente de cero.
SOL: $n \leq -2$

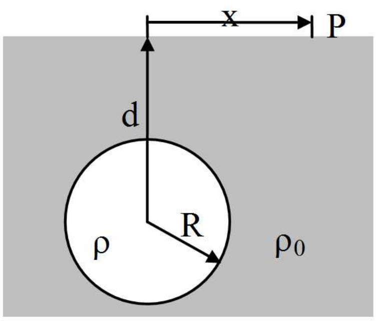
6. 11. Considerad una partícula sometida al potencial $U(r) = kr^4$, con $k > 0$. a) Determinad para qué valores de la energía y del momento angular la órbita descrita por la partícula es circular. b) ¿ Cuánto vale el tiempo τ que la partícula emplea en completar una circunferencia? c) Si se perturba ligeramente el movimiento circular de la partícula, ¿ cuál será el periodo de las oscilaciones radiales alrededor de r_0?
SOL:
a) $E = \frac{3}{2}\left(\frac{kL^4}{2m^2}\right)^{1/3}$, $r_0 = \left(\frac{L^2}{4mk}\right)^{1/6}$; b) $\tau = \pi\left(\frac{2m^2}{kl}\right)^{1/3}$; c) $T = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{m^2}{\sqrt{2}kl}\right)^{1/3}$

6. 12. Discutid el comportamiento de una partícula de masa m en un potencial de Yukawa, $U(r) = -\frac{k}{r}e^{-\frac{r}{r_0}}$, donde k y r_0 son constantes positivas.
SOL:
Al estudiar el potencial efectivo se concluye las órbitas son abiertas a no ser que el momento angular sea lo suficientemente pequeño ($l < \sqrt{0.84\ r_0 mk}$). En ese caso el potencial efectivo tiene un mínimo (r_1, E_1) y un máximo (r_2, E_2) que posibilita la existencia de órbitas acotadas si $E_1 < E < E_2$ y $r < r_2$.

6. 13. Considerad una esfera hueca de densidad uniforme, radio exterior a e interior b. Calculad el potencial y el campo gravitatorio en cualquier punto del espacio (realizad el cálculo directo y también utilizando el teorema de Gauss). Calculad así mismo la energía potencial almacenada en esta distribución de masa.
SOL:
$$V = \begin{cases} -\frac{3}{2}GM\frac{a^2-b^2}{a^3-b^3} & 0 \leq r \leq b \\ -\frac{3}{2}\frac{GM}{r}\frac{1}{a^3-b^3}\left[-\frac{r^3}{3} + ra^2 - \frac{2}{3}b^3\right] & b \leq r \leq a \\ -\frac{GM}{r} & r \geq a \end{cases}$$
$$U = -\frac{3}{10}\frac{2a^5-5b^3a^2+3b^5}{(a^3-b^3)^2}GM^2$$

6. 14. Encontrad el potencial y el campo eléctrico en el eje de un disco circular plano de radio a y cargado de forma uniforme con una carga q. Calcula el campo a distancias muy grandes y muy pequeñas del disco.
SOL: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\vec{u}_z$, $V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 z}$. Si $z \gg a$, $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{z^2}\vec{u}_z$; si $z \ll a$, $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u}_z$.

6. 15. En el interior de la Tierra hay una cavidad esférica de radio R, cuyo centro está a una profundidad d. La cavidad está llena de un material de densidad ρ, distinta del valor normal para los materiales de la zona, ρ_0.



Demostrad que en el punto P sobre la superficie, la diferencia entre la componente vertical de la aceleración de la gravedad y el valor normal g_0 vale:

$$\Delta g = -\frac{4}{3}\pi G R^3(\rho_0 - \rho)\frac{d}{(d^2+x^2)^{3/2}}$$

Medidas realizadas en superficie a lo largo de 300 m en línea recta indican que Δg varía entre un mínimo de 10^{-4} m/s^2 en los extremos del trayecto, y un máximo de $1.4 \cdot 10^{-4}$ m/s^2 en el punto medio. Si estas anomalías son debidas a una cavidad esférica llena de petróleo ($\rho = 0.9$ g/cm^3), determinad d y R (tomad $\rho_0 = 2.8$ g/cm^3).
SOL: $d = 299$ m, $R = 287$ m.

6. 16. Consideremos un sistema de dos cuerpos, esféricos y uniformes, con masas $m_1 = 5$ kg y $m_2 = 10$ kg, que interaccionan debido a la gravedad. Inicialmente sus posiciones son $\vec{r}_{10} = (40, 0)$ cm , $\vec{r}_{20} = (-20, 0)$ cm, con velocidades $\vec{v}_{10} = (0, 8)$ cm/h y $\vec{v}_{20} = (0, -4)$ cm/h.

a) Calcula las coordenadas y la velocidad del centro de masas, así como la masa reducida del sistema.
b) Obtén el momento angular y la energía total (cinética mas potencial) del sistema.
c) Calcula la distancia apsidal mínima (pericentro) del movimiento relativo y la distancia apsidal máxima (apocentro), en caso de que exista.
d) Calcula el periodo del movimiento y las posiciones de m_1 y m_2 al cabo de un semiperiodo.

6. 17. Calculad el tiempo que tardaría la Luna en caer sobre la Tierra si la primera se parara de repente (suponed que la Tierra está en reposo). Repetid el cálculo para la Tierra respecto al Sol.

SOL: : $T = \frac{\pi}{2}\frac{d_0^{3/2}}{\sqrt{2GM_T}}$, donde d_0 es la distancia tierra-luna o tierra-sol.

6. 18. Considerad el sistema Tierra-Luna.

a) Obtened el potencial gravitatorio al que están sometidos los puntos de la superficie terrestre debido a la presencia de la Luna haciendo un desarrollo en serie de potencias de r/a hasta el orden $(r/a)^2$, donde a es la distancia Tierra-Luna y r es la distancia del centro de la Tierra a un punto de su superficie. Explicad por qué el término de orden $(r/a)^2$ tiene que ser el responsable de las mareas.

b) Probad que el campo gravitatorio generado por este término es: $G_r = \frac{Gmr}{a^3}(3\cos^2\theta - 1)$, $G_\theta = \frac{Gmr}{a^3}\cos\theta\sin\theta$

c) Comparad su orden de magnitud para la Luna y el Sol.

d) Equilibrando el potencial encontrado y el terrestre, estimad el orden de magnitud de la altura de las mareas.

SOL: a) $V(r) \approx -GM_L\frac{1}{R} - GM_L\frac{\vec{r}\cdot\vec{R}}{R^3} - GM_L\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{R})^2 - r^2R^2}{2R^4}$ con $\vec{R} = a\vec{i}$, b) $E_{G,luna} \approx 2E_{G,sol}$.

7. Colisiones y dispersión.

7. 1. Calculad el valor del incremento de energía cinética $Q = \Delta T$ para un choque completamente inelástico.
SOL: $Q = -\frac{1}{2}\mu v^2$

7. 2. Un coche de masa $m_1 = 2000\ kg$ viaja hacia el sur y choca, en el centro de un cruce, con un camión de masa $m_2 = 6000\ kg$, que viajaba hacia el Oeste. Los dos vehículos se deslizan entrelazados exactamente en la dirección Sur-Oeste. a) ¿ Es razonable pensar que el camión circulaba a una velocidad $v_2 = 100\ km/h$?. b) ¿ Qué parte de la energía cinética inicial se ha transformado en otros tipos de energía durante el choque ?.

SOL: a) No, $v_2 = v_1\rho$ con $\rho = \frac{m_1}{m_2}$; b) $\frac{\Delta E_c}{E_c} = -\frac{1+\rho^2}{(1+\rho)^2} = -0.625$.

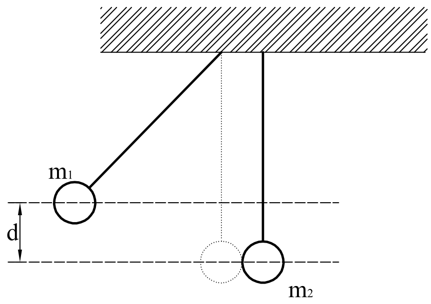
7. 3. Se deja caer una pelota sobre una mesa desde una altura h. Suponiendo que el coeficiente de restitución e es el mismo en cada rebote, calculad el tiempo que tardará la pelota en pararse.
SOL: $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{1+e}{1-e}$

7. 4. Considérese el sistema de la figura, donde $m_1 = 0.1\ kg$, $m_2 = 0.2\ kg$ y $d = 0.2\ m$. Hallad la altura que alcanza cada bola después de la colisión si ésta es:

a) Elástica. Estudiad también el caso con $m_1 = m_2$.

b) Inelástica con coeficiente de restitución $e = 0.9$

c) Completamente inelástica.



SOLUCIÓN GENERAL: $h_1 = \left(\frac{m_1 - e m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 d$, $h_2 = \left(\frac{m_1(1+e)}{m_1+m_2}\right)^2 d$

7. 5. Una partícula de 5 kg de masa, moviéndose a 2 m/s, choca contra otra partícula de 8 kg, inicialmente en reposo. Si el choque es elástico y la primera partícula se ha desviado 50^o de la dirección original del movimiento, calculad la velocidad de cada partícula después del choque.
SOL: $v_1 = 1.57\ m/s$, $\alpha_1 = 50^o$, $v_2 = 0.97\ m/s$, $\alpha_2 = -50.7^o$

7. 6. Dos esferas con radio 5 cm, masas $m_1 = 1\ kg$ y $m_2 = 2\ kg$ y con velocidades $v_1 = 3.5\ m/s$ y $v_2 = 0\ m/s$ chocan entre sí con un parámetro de impacto $b = 4\ cm$, teniendo el choque un coeficiente de restitución $e = 0.9$. Calculad las velocidades finales de las partículas y la energía perdida en la colisión.
SOL: $v_1' = 1.64\ m/s$, $\alpha_1 = 97.8^0$, $v_2' = 2.03\ m/s$, $\alpha_2 = 23.6^0$

7. 7. Demostrad que en una colisión elástica entre dos partículas de masas m_1 y m_2 (en reposo), el ángulo α que forman las dos partículas finales en el sistema LAB (laboratorio) verifica que:

$$\tan\alpha = \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2}\cot\frac{\theta}{2}$$

siendo θ el ángulo de dispersión en el sistema centro de masas (CM).

7. 8. Una partícula choca elásticamente con un blanco en reposo. Demostrad que se verifica que:

$$\frac{E_f}{E_i} = \frac{1 + 2\rho\cos\theta + \rho^2}{(1+\rho)^2}$$

donde θ es el ángulo de dispersión en el CM, E_i y E_f son las energías cinéticas inicial y final, respectivamente, de la partícula incidente en el sistema LAB y $\rho = m_1/m_2$. Considerando la dispersión isótropa en el sistema CM, ¿ cuál será el moderador óptimo para reducir rápidamente la velocidad de los neutrones en un reactor nuclear?.
SOL: De minimizar el promedio angular $< E_f/E_i >$ se obtiene que $m_1 = m_2$, luego el moderador óptimo será una sustancia rica en hidrógeno.

7. 9. Demostrad que el máximo valor del ángulo Φ de dispersión elástica de una partícula respecto a su velocidad en el sistema LAB viene dado por:

$$\operatorname{tg}\Phi = \left(\rho^2 - 1\right)^{-1/2}$$

Estudiad el caso $\rho = m_1/m_2 > 1$ y aplicad el resultado para obtener una estimación de la masa de la partícula α con relación a la masa del hidrógeno, si sabemos que el máximo valor de Φ medido en colisiones de partículas α sobre un blanco de hidrógeno es de $\approx 16^o$.
SOL: $\rho \approx 3.6$

7. 10. Calculad la sección eficaz de dispersión por un potencial $V = \frac{k}{r^2}$.
SOL: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k}{E}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\pi^2(\pi-\theta)}{\theta^2(2\pi-\theta)^2}$

7. 11. La fuerza de interacción entre dos partículas de carga Ze y $Z'e$ viene dada en el sistema MKSA por: $\vec{F} = \frac{k}{r^2}\vec{u}_r$ con $k = \frac{ZZ'e^2}{4\pi\epsilon_0}$. Un haz de partículas α (con carga 2e) y de intensidad I y energía E, incide sobre una lámina de oro (con carga 79e).

a) Utilizando las expresiones de la dispersión de Rutherford, encontrad el número de partículas (por blanco y por unidad de tiempo) que salen dispersadas con un ángulo θ_0 o mayor.
b) Demostrad que el número de partículas que salen por unidad de tiempo (y por blanco) con un ángulo de dispersión en el intervalo $[\pi/3, \pi/2]$ es el doble de las que salen con un ángulo de dispersión mayor que $\pi/2$.

SOL: a) $\sigma(>\theta_0) = \pi\left(\frac{ZZ'e^2}{8\pi\epsilon_0 E}\right)^2\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} - 1\right]$.