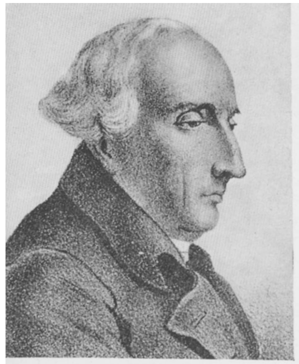
5. Introducción a la Formulación Lagrangiana y Hamiltoniana



Joseph Louis Lagrange.

- Introducción
- Definiciones: coordenadas, momentos y fuerzas generalizados.
- Función Lagrangiana y ecuaciones de Euler-Lagrange. Coordenadas cíclicas. Ejemplos.
- Movimiento con ligaduras. Ecuaciones de Euler-Lagrange en coordenadas generalizadas libres. Ejemplos.
- Obtención de las ligaduras: multiplicadores de Lagrange. Ejemplos.
- Función Hamiltoniana y ecuaciones de Hamilton o ecuaciones canónicas. Ejemplos .
- Principio de mínima acción o principio de Hamilton.

Bibliografía: [Marion], [Kibble], [Hand-Finch], [Rañada], [Goldstein]

5. Introducción a la Formulación Lagrangiana y Hamiltoniana

NOTA IMPORTANTE:

Los contenidos de este documento representan un esquema de los conceptos fundamentales del tema, por lo que en ningún caso se trata de apuntes completos. Este esquema se complementa con explicaciones, razonamientos, ejemplos y problemas que se desarrollan durante las clases, así como con alguno(s) de los libros que se incluyen en la bibliografía.

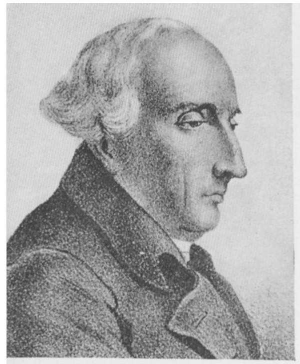
Bibliografía: [Marion], [Kibble], [Hand-Finch], [Rañada], [Goldstein]

Chantal Ferrer Roca 2008

1. Introducción

$$\dot{\vec{p}} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Ecuaciones de Newton



Joseph Louis Lagrange.
(1736-1813)
"Mecanique Analitique", 1788

Ecuaciones de Newton de una partícula de masa m en 2D y en **coordenadas cartesianas**:

$$m\ddot{x} = F_x$$
$$m\ddot{y} = F_y$$

No tienen la misma forma

Ecuaciones de Newton de una partícula de masa m en 2D y en **coordenadas polares**:

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = F_\rho$$
$$m(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) = F_\theta$$

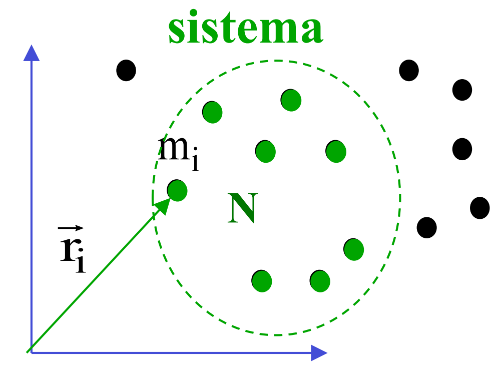
Sin embargo, los principios subyacentes son los mismos: ¿por qué no un formalismo más general que lo haga explícito?

MECÁNICA LAGRANGIANA: Mismos Principios (Galileo, Newton), distinta formulación, más sofisticada:

- Se prescinde de las fuerzas que actúan sobre las diferentes partes del sistema.
- Se prescinde de aquellas ecuaciones que sólo se refieren a las fuerzas de ligadura (tensiones, reacciones etc..) e involucra sólo las fuerzas que dan lugar al movimiento (**Fuerzas activas**)
- Se define una función escalar: **Lagrangiana**, de la que se obtienen las ecuaciones diferenciales del movimiento, tantas como variables físicamente significativas.
- Esto permite escribir las ecuaciones de forma generalizada de manera que formalmente sean iguales.

Chantal Ferrer Roca 2008

2. Definiciones: coordenadas generalizadas



Sistema de N partículas que se mueven en 3 dimensiones:

$$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$$

3N coordenadas cartesianas $\quad x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{3N} \qquad \{x_i\}$

$i, j = 1,2,..,3N$

3N coordenadas generalizadas $\quad q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{3N} \qquad \{q_j\}$

(distancias, ángulos, etc.)

$$x_i = x_i(q_j; t)$$

3N ecuaciones de transformación

Grados de libertad del sistema (las ligaduras los pueden reducir)

Relaciones importantes

[1] $$\dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

[2] $$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

(“REGLA” DE SUPRESIÓN DE PUNTOS)

[3] $$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

2. Definiciones: momentos generalizados

Chantal Ferrer Roca 2008

Energía cinética de un sistema en coordenadas cartesianas

$$T=\sum_{k=1}^{N}T_k=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N}m_i\dot{x}_i^2=\sum_{i=1}^{3N}\frac{p_i^2}{2m_i}$$

Momentos cartesianos

$$p_i=\frac{\partial T(\dot{x}_i)}{\partial \dot{x}_i} \qquad i=1,2,..,3N$$

$$\pi_j=\frac{\partial T(q_j,\dot{q}_j,t)}{\partial \dot{q}_j}$$

Momentos generalizados

Ejemplo: energía cinética de una sistema de dos masas puntuales que se mueven por el eje z

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{z}_2^2$$

$$p_{2z}=\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_2}=m_2\dot{z}_2$$

Componente z del momento lineal de la partícula 2

Ejemplo: energía cinética de un sistema de dos masas puntuales que se mueven sobre una circunferencia de radio a

$$T=\frac{1}{2}m_1a^2\dot{\phi}_1^2+\frac{1}{2}m_2a^2\dot{\phi}_2^2$$

$$\pi_{1\phi}=\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1}=ma^2\dot{\phi}_1$$

como la variable es un ángulo, el momento generalizado es un momento angular

Relación con los momentos cartesianos:

$$\pi_j=\sum_{i=1}^{3N}p_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

$$\pi_j=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}=\sum_{i=1}^{3N}p_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}=\sum_{i=1}^{3N}p_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

$$\pi_j=\sum_{k=1}^{N}\vec{p}_k\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$$

$$T(q_j,\dot{q}_j,t)=T(x_i(q_j,\dot{q}_j,t))$$

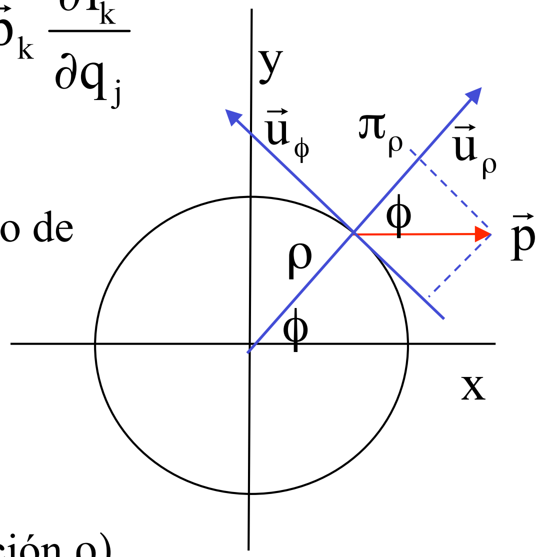
[3] $$\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial x_k}{\partial q_j}$$

$$(h_k\vec{u}_k)_j$$

2. Definiciones: momentos generalizados

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{3N} p_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \qquad \pi_j = \sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$$

EJEMPLO 1



Escribir los momentos generalizados π_ρ y π_ϕ correspondientes al movimiento de una partícula cuyo momento lineal es (p,0,0), con p constante.

$$\pi_\rho = \vec{p}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \vec{p}\cdot\vec{u}_\rho = (p,0,0)(\cos\phi, \sin\phi, 0) = p\cos\phi$$

$h_\rho = 1$, luego tiene dimensiones de momento lineal (en dirección ρ). Es el "momento conjugado" de la coordenada generalizada ρ y coincide con la proyección p sobre la dirección ρ

$$\pi_\phi = \vec{p}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \vec{p}\cdot h_\phi \vec{u}_\phi = (p,0,0)(-\rho\sin\phi, \rho\cos\phi, 0) = -p\,\rho\sin\phi$$

$h_\phi = \rho$, Luego el momento generalizado **no es** simplemente la proyección de p sobre la dirección ϕ. El momento generalizado π_ϕ tiene dimensiones de momento angular. Es el "momento conjugado" correspondiente a la coordenada ϕ. (lo que habitualmente llamaríamos ℓ_z)

$$\pi_z = p_z = 0$$

2. Definiciones: fuerzas generalizadas

Fuerzas conservativas en coordenadas cartesianas

$$F_i = -\frac{\partial V(x_i)}{\partial x_i}$$

$V(x_i)$

$i, j = 1,\ldots,3N$

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

en coordenadas generalizadas

$$V(q_j, t) = V(x_i(q_j, t))$$

Relación entre ambas:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = -\sum_k \left(\frac{\partial V}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial z_k}\frac{\partial z_k}{\partial q_j}\right) = \sum_k \vec{F}_k \underbrace{\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}}_{(h_k \vec{u}_k)_j}$$

$k = 1,\ldots,N$ partículas

Son las proyecciones de las fuerzas sobre las direcciones de los vectores unitarios pero multiplicadas por factor h_k, por lo que dimensionalmente pueden representar otra magnitud relacionada con la fuerza

$$\delta W = \sum_i F_i \delta x_i = \sum_j Q_j \delta q_j = -\delta V$$

La misma expresión para el trabajo virtual

$$\delta W = \sum_i F_i \delta x_i = \sum_j Q_j \delta q_j$$

Idem para fuerzas no conservativas (demostrar)

Fuerzas Generalizadas

Para cualquier tipo de fuerzas (conservativas y no conservativas)

$$\boxed{Q_j = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}}$$

$i, j = 1,\ldots,3N$ Coordenadas generalizdas

NOTA: es habitual que en el contexto de la mecánica analítica, se utilice V en lugar de U para indicar la energía potencial

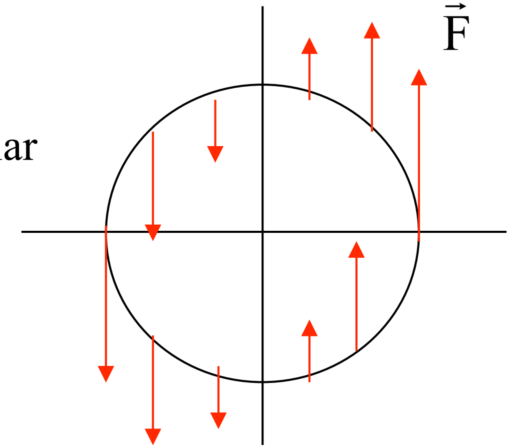
2. Definiciones: coordenadas, momentos y fuerzas generalizados

FUERZAS GENERALIZADAS

$$Q_j = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \qquad Q_j = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}$$

EJEMPLO 2

Masa puntual obligada a moverse sobre una circunferencia y sometida a la fuerza (0,x,0). Calcular las fuerzas generalizadas Q_ρ, Q_ϕ, Q_z



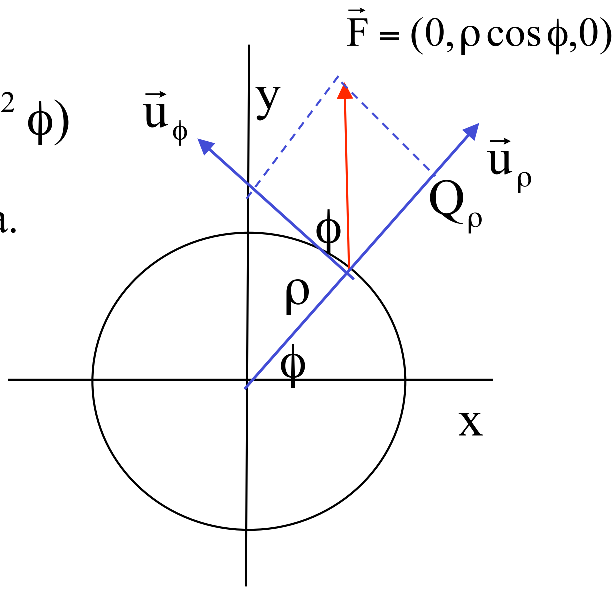
$$Q_\rho = \vec{F}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \vec{F}\cdot\vec{u}_\rho = (0,\rho\cos\phi,0)(\cos\phi,\sin\phi,0) = \rho\cos\phi\sin\phi$$

h_ρ =1, luego tiene dimensiones de fuerza (componente ρ de la fuerza)

$$Q_\phi = \vec{F}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \vec{F}\cdot h_\phi \vec{u}_\phi = (0,\rho\cos\phi,0)(-\rho\sin\phi,\rho\cos\phi,0) = \rho(\rho\cos^2\phi)$$

h_ϕ =ρ, luego Q_ϕ tiene dimensiones de momento de fuerza. Es la "fuerza generalizada" correspondiente a la coordenada ϕ

$$Q_z = \vec{F}\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{F}\cdot\vec{u}_z = (0,\rho\cos\phi,0)(0,0,1) = 0$$



3. Ecuaciones de Euler-Lagrange y Función Lagrangiana

Ecuaciones de Newton

Coordenadas cartesianas $\dot{p}_i = F_i$

Coordenadas generalizadas

$$\pi_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{3N} p_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

Derivando respecto del tiempo:

$$\dot{\pi}_j = \sum_i \dot{p}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \underbrace{\sum_i p_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}}, \qquad p_i \rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \underbrace{\sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}}_{Q_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

$j = 1,\ldots,3N$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j}$$

Ecuaciones de Newton "generalizadas"

Sólo es necesario conocer la energía cinética del sistema y las fuerza generalizadas
Tantas ecuaciones como coordenadas libres del sistema

3. Función Lagrangiana y ecuaciones de Euler-Lagrange.

Ecuaciones de Newton generalizadas

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \underbrace{Q_j}_{-\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{NC}} \qquad j = 1,\ldots,3N$$

fuerzas conservativas y no conservativas

Lagrangiana

$$\boldsymbol{L}(q_j, \dot{q}_j; t) = \boldsymbol{T}(q_j, \dot{q}_j; t) - \boldsymbol{V}(q_j; t)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^{NC}} \qquad j = 1,\ldots,3N$$

Notar que:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange

(ecuaciones de Newton generalizadas para fuerzas conservativas)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$$

Válidas en sistemas inerciales (como las ec. de Newton)

EJEMPLO 3 ecuación del movimiento de un cuerpo que es lanzado en el campo gravitatorio terrestre.

$$q_1 = x \qquad q_2 = y$$

$$\boldsymbol{L}(x, y; t) = \boldsymbol{T} - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) \qquad \boxed{\ddot{x} = 0} \qquad x(t) = x_0 + v_{x0}t$$

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt}(m\dot{y}) + mg = m\ddot{y} + mg \qquad \boxed{\ddot{y} = -g} \qquad y(t) = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Darse cuenta: la lagrangiana no depende de x, porque la energía potencial no depende de x, luego su momento conjugado se conserva (x es una coordenada cíclica)

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = \frac{dp_x}{dt} = 0$$

Implícitamente, visto por un observador inercial (sistema de referencia inercial)
¿Y visto por un observador sobre un ascensor que sube acelerando (sistema no inercial)?

$$\boldsymbol{L}(y; t) = \boldsymbol{T} - V = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy \qquad y = \tilde{y} + \frac{1}{2}at$$

La ecuación de Euler Lagrange es la misma pero hay que considerar las variables no inerciales.

EJEMPLO 4 ecuaciones del movimiento de una partícula sometida al potencial V(ρ)=c/ρ en 2D usando coordenadas polares

$$q_1 = \rho \qquad q_2 = \phi$$

$$\boldsymbol{L}(\rho,\phi;t) = \boldsymbol{T} - V = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - V = \frac{1}{2}m(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\phi^2) - V(\rho)$$

ρ
$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\rho} - \frac{\partial L}{\partial \rho} = \frac{d}{dt}(m\dot\rho) - (m\rho\dot\phi^2 - \frac{\partial V}{\partial \rho})$$

ϕ
$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \boxed{\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot\phi)} = m\rho^2\ddot\phi + 2m\rho\dot\rho\dot\phi \rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} m\ddot\rho - m\rho\dot\phi^2 = \dfrac{c}{\rho^2} \\ \rho\ddot\phi + 2\dot\rho\dot\phi = 0 \end{array}}$$

$$\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot\phi) = 0 \rightarrow \pi_\phi = m\rho^2\dot\phi = cte$$

(es el momento angular dirigido según el eje z o eje perpendicular al plano xy)

En general, si las fuerzas son conservativas y L no depende de una determinada coordenada, el MOMENTO CONJUGADO de dicha coordenada SE CONSERVA.

otro ejemplo, similar al anterior: masa puntual sometida a la fuerza elástica de un muelle V(ρ)= -kρ

Coordenadas cíclicas (o “ignorables”)

Sea un sistema de partículas cuyas coordenadas generalizadas sean $\{q_j\} \quad j = 1,2,..,3N$

Una coordenada q_c es **cíclica** si la lagrangiana no depende de ella, es decir, si $\dfrac{\partial L}{\partial q_c} = 0$

La ecuación de Euler-Lagrange para esa coordenada (solo fuerzas conservativas):

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_c} - \underbrace{\cancel{\frac{\partial L}{\partial q_c}}}_{0} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_c} \qquad \pi_c = cte$$

TEOREMA DE CONSERVACIÓN: Si una coordenada $\mathbf{q_c}$ **es cíclica**, su momento conjugado $\boldsymbol{\pi_c}$ **se conserva** (es constante del movimiento, no cambia con el tiempo)

PROBLEMA 5.1 del boletín

EJERCICIOS del cuestionario 46, 47, 49

Chantal Ferrer Roca 2008

Resumen

Formulación NEWTONIANA		Formulación LAGRANGIANA
coordenadas cartesianas $\{x_i\}$	Hay 3N ecuaciones de transformación $x_i = x_i(q_j; t) \qquad i, j = 1,2,..,3N$ $\boxed{\dfrac{\partial \dot{\vec{r}}_k}{\partial \dot{q}_j} = \dfrac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j}}$	Coordenadas generalizadas $\{q_j\}$
Momentos cartesianos $p_i = \dfrac{\partial T(\dot{x}_i)}{\partial \dot{x}_i}$	$\pi_j = \sum_{i=1}^{3N} p_i \dfrac{\partial x_i}{\partial q_j}$	momentos generalizados $\pi_j = \dfrac{\partial T(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_j}$
Fuerzas (cartesianas) F_i	$Q_j = \sum_{i=1}^{3N} F_i \dfrac{\partial x_i}{\partial q_j}$	Fuerzas generalizadas Q_j
Ec de la dinámica (general) $\dot{p}_i = F_i$		Ec. Gen. del movimiento $\dot{\pi}_j - \dfrac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$
Ec de la dinámica (algunas F conservativas) $\dot{p}_i = F_i^{nc} - \dfrac{\partial V}{\partial x_i}$		**Lagrangiana** $L = T - V$ **Ec. Euler-Lagrange** $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j$

VNIVERSITAT DE VALÈNCIA OpenCourseWare

Chantal Ferrer Roca 2008

4. Movimiento con ligaduras

Ligaduras: Constricciones al movimiento del sistema. La resolución de problemas en mecánica newtoniana exige conocer **TODAS** las fuerzas, incluidas las de ligadura . EJEMPLOS:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

- cuerpo que se desplaza sobre una superficie plana sometida a la fuerza de gravedad. La fuerza de ligadura es la normal N a la superficie (= mg). Sencilla.
- bolita insertada en un alambre de forma arbitraria y que se mueve por él. ¿?

Conocer todas las fuerzas de ligadura puede ser complicado, si no imposible.

Por otro lado, no suelen ser el objetivo del problema resolver, ¿Por qué no evitarlas a priori?

4. Movimiento con ligaduras. Ecuaciones de Euler-Lagrange en coordenadas generalizadas libres. Ejemplos

Sistema de partículas de cordenadas generalizadas $\{q_j\} \quad j = 1,2,..,3N$

Lagrangiana sin aplicar ligaduras: $\boldsymbol{L}(q_j, \dot{q}_j; t)$

Imponemos **m** ecuaciones de ligadura (se pueden dar de dos formas):

$$q_\alpha = q_\alpha(\{q_j\} t) \quad \alpha = 1,2,..,m \quad j = 1,2,..,3N$$

$$f_\alpha(\{q_j\} t) = cte \quad \alpha = 1,2,..,m \quad j = 1,2,..,3N$$

ejemplo: masa puntual que se mueve sobre una superficie

$$y = h = cte$$

$$f(y) = y - h = 0$$

Coordenadas Generalizadas Libres $\boxed{\{q_j\} \quad j = 1,\ldots,s \quad s = 3N - m}$

Lagrangiana Libre $\boldsymbol{L'}(q_j, \dot{q}_j; t), \quad j = 1,\ldots,s$

Ec. de Euler-Lagrange con coordenadas generalizadas libres

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = Q_j^{NC}}$$

$q_j(t)$ De las ec. Euler-Lagrange

$q_\alpha(t)$ De las ec. de ligadura

El número de coordenadas generalizadas y de ecuaciones del movimiento se reduce

Chantal Ferrer Roca 2008

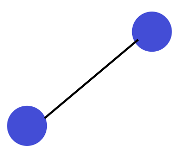
4. Movimiento con ligaduras. Ecuaciones de Euler-Lagrange en coordenadas generalizadas libres. Ejemplos

Coordenadas Generalizadas Libres $\boxed{\{q_j\} \quad j = 1,\ldots,s \quad s = 3N - m}$

Ejemplos : - una partícula puntual apoyada sobre una mesa: dos grados de libertad (x,y) o (ρ,ϕ)
- un sólido rígido apoyado sobre una mesa: 3 grados de libertad (2 de trasl. y 1 de rotación)

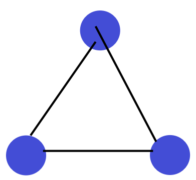
Ejemplos : ¿Grados de libertad de los siguientes sistemas? ¿coordenadas generalizadas?

Masas puntuales

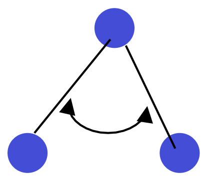


2 masas x 3 = 6
1 ec. Ligadura
5 coord gen. Libres

(3 tras. CM + 2 rot)



(3 masas x 3)
-3 ec. Lig.= 6 coord gen. libres
(3 tras.. CM + 3 rot.)

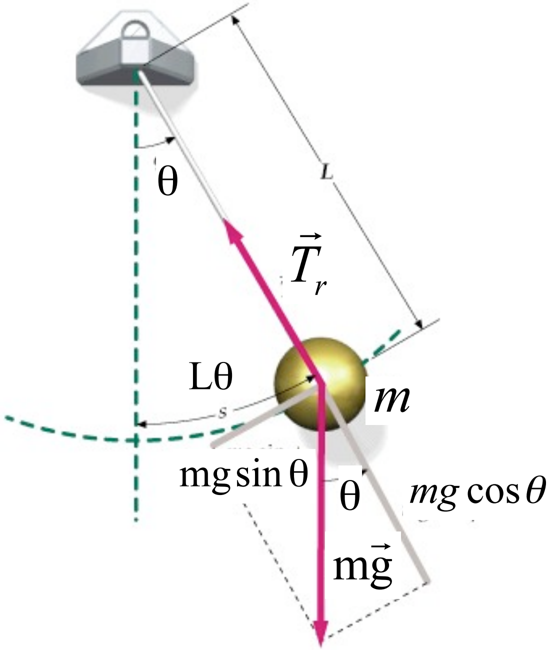


3 masas x 3 = 9
2 ec. Ligadura
7 coord gen. Libres

(3 tras. CM+3 rot +ángulo int.)

4. Movimiento con ligaduras. Ecuaciones de Euler-Lagrange en coordenadas generalizadas libres. Ejemplos

EJEMPLO 5: $\rho = \ell = \sqrt{x^2 + y^2}$ Para mantener esta ligadura hace falta una fuerza Q_{lig}



$$\begin{array}{ccc} T & - & V \end{array}$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) - (-mg\rho\cos\phi)$$

$\boxed{\rho = \ell = \text{cte}}$

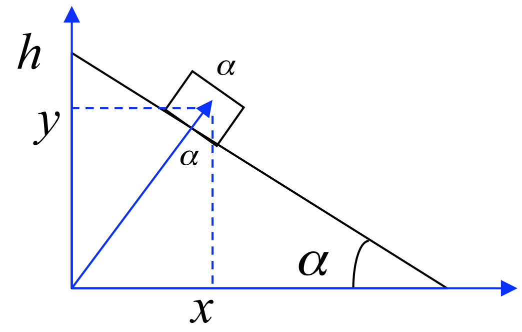
$$L' = \frac{1}{2}m(\ell^2\dot{\phi}^2) + mg\ell\cos\phi$$

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial L'}{\partial\phi} = \frac{d}{dt}(m\ell^2\dot{\phi}) + mg\ell\sin\phi \quad = m\ell^2\ddot{\phi} + mg\ell\sin\phi$$

$$\boxed{\ddot{\phi} + \frac{g}{\ell}\sin\phi = 0}$$

4. Movimiento con ligaduras. Ecuaciones de Euler-Lagrange en coordenadas generalizadas libres. Ejemplos

EJEMPLO 6: Movimiento en un plano de un cuerpo: 2 coordenadas



Lagrangiana sin ligaduras: $$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{T} - \boldsymbol{V} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

Ligadura: $y = h - x\,tg\alpha$ queda 1 coord. libre

Lagrangiana libre: $$\boldsymbol{L'} = \boldsymbol{T} - \boldsymbol{V} = \frac{1}{2}m\underbrace{(\dot{x}^2 + \dot{x}^2 tg^2\alpha)}_{\frac{\dot{x}^2}{\cos^2\alpha}} - mg(h - x\,tg\alpha)$$

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L'}{\partial x} = \quad m\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\cos^2\alpha}\right) - mg\,tg\alpha \qquad \frac{\ddot{x}}{\cos^2\alpha} - g\,tg\alpha = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} = g\sin\alpha\cos\alpha} \qquad \boxed{\ddot{s} = g\sin\alpha}$$

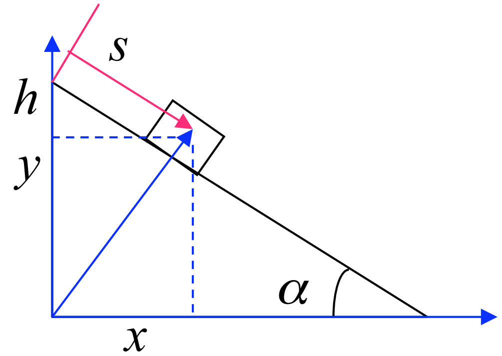
Con condiciones iniciales x(0)=0, y(0)=h, v(0)=0

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= (g\sin\alpha\cos\alpha)\frac{t^2}{2} \\ y(t) &= h - (g\sin\alpha\cos\alpha)\frac{t^2}{2}tg\alpha = h - (g\sin^2\alpha)\frac{t^2}{2} \end{aligned}\right\} \quad s(t) = \sqrt{x^2 + (h-y)^2} = g\sin\alpha\frac{t^2}{2}$$

4. Movimiento con ligaduras. Ecuaciones de Euler-Lagrange en coordenadas generalizadas libres. Ejemplos

EJEMPLO 6: Movimiento en un plano de un cuerpo: 2 coordenadas

2 coordenadas - 1 Ligadura: 1 coordenada libre



Desde el principio se podría haber elegido una coordenada libre: s(t)

$$\boldsymbol{L = T - V} = \frac{1}{2} m\dot{s}^2 - mg(h - s\sin\alpha)$$

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} = m\ddot{s} - mg\sin\alpha \qquad \boxed{\ddot{s} = g\sin\alpha}$$

Con condiciones iniciales s(0)=0, v(0)=0: $s(t) = g\sin\alpha\,\frac{t^2}{2}$

PROBLEMAS del boletín 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10, 5.11

EJERCICIOS del cuestionario 48, 50, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 59, 60

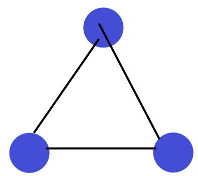
4. Movimiento con ligaduras. Ecuaciones de Euler-Lagrange en coordenadas generalizadas libres. Ejemplos

• **<u>Ligadura holónoma</u>**: no depende de las velocidades y se puede escribir como una relación funcional entre las coordenadas

$$f_i(\{q_j\}, t) \qquad j = 1,2,..,s \qquad i = 1,2,..,3N$$

El problema se resuelve definiendo las coordenadas generalizadas libres s = 3N-m

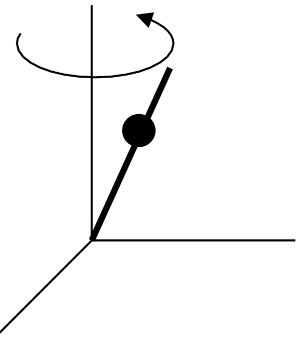
a) escleronómas: no dependen explícitamente del tiempo



Ejemplos: - sólido rígido: distancias mutuas constantes $\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right| = d_{ij}$

- Partícula obligada a moverse sobre la superfície de una esfera (r =cte)

b) reónomas: dependen explícitamente del tiempo



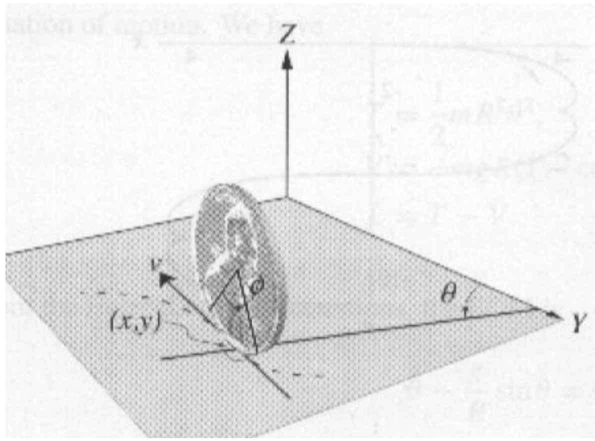
Ejemplos: - partícula que se mueve sobre la superfície de una esfera cuyo radio cambia explícitamente con el tiempo.

- partícula insertada en un alambre que gira con una ω impuesta desde fuera (un motor, etc,)

problemas 5.6 y 5.15 del boletín en el caso de que ω se imponga desde fuera
Ejercicios del cuestionario : 55

4. Movimiento con ligaduras. Ecuaciones de Euler-Lagrange en coordenadas generalizadas libres. Ejemplos

• **<u>Ligadura no holónoma</u>**: no se puede escribir como relación funcional de las coordenadas (por ejemplo, depende de las velocidades).



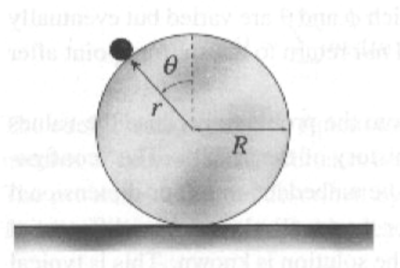
Ejemplos: - moneda que rueda en 2D: condición de rodadura no holónoma (en 1D, Rϕ=x , si es holónoma)

$$v = a\dot{\phi} \qquad \dot{x} = -v\cos\theta,\ \dot{y} = -v\sin\theta$$

- péndulo con cuerda que no siempre está tensa.

- partícula que se mueve encima de la superficie de una esfera (no constreñida a ella)

- partícula pegada a una esfera y que se mueve s[…]e en algún momento (no está ligada a su borde). **Problema 5.12**



El problema se resuelve mediante los multiplicadores de Lagrange siempre que exista una relación entre las diferenciales de las coordenadas.

4. Movimiento con ligaduras. Ecuaciones de Euler-Lagrange en coordenadas generalizadas libres. Ejemplos

$$\delta W = \sum_i F_i \delta x_i$$ Trabajo virtual $\qquad F_i = \dot{p}_i$

$$\delta W = \sum_i (F_i - \dot{p}_i)\delta x_i = 0$$ $\qquad F_i = F_i^a + F_i^{lig}$ $\qquad$ Fuerzas activas y fuerzas de Ligadura

$$\boxed{\delta W = \sum_i (F_i^a - \dot{p}_i)\delta x_i} + \underbrace{\sum_i F_i^{lig}\delta x_i}_{0} \boxed{= 0}$$

Principio de D'Alembert

En realidad consideraremos fuerzas de ligadura perpendiculares a los desplazamientos virtuales posibles.

El hecho de que sea posible prescindir de unas fuerzas de ligadura que son desconocidas a priori se debe a que **nos limitamos a problemas en los que el trabajo de las fuerzas de ligadura es nulo**. Esto también se cumple en coordenadas generalizadas, ya que:

$$\delta W = \sum_j (Q_j^a - \dot{\pi}_j)\delta q_i = \sum_i (Q_j^a - \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right])\delta q_i = 0$$

$$\delta W = \sum_i Q_j^{lig}\delta q_i = 0$$

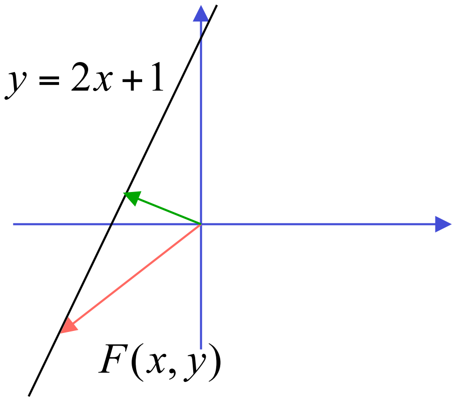
Partiendo del Principio de D'Alembert, se deduce la ecuación de Euler-Lagrange

5. Multiplicadores de Lagrange. Ejemplos.

Ejemplo matemático: Buscar la distancia mínima del origen a una recta

$$F(x,y) = x^2 + y^2$$ Función sujeta a la ligadura $y = 2x + 1$

$$F'(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(y - 2x - 1)$$



Es la distancia de los puntos de la recta al origen

Cuando se minimiza F, también se minimiza F' ya que lo que hay en el paréntesis es nulo

$$0 = \frac{\partial F'}{\partial x} = 2x - 2\lambda$$

$$0 = \frac{\partial F'}{\partial y} = 2y + \lambda$$

$$0 = \frac{\partial F'}{\partial \lambda} = y - 2x - 1$$

3 ecuaciones y 3 incógnitas

$$y = 2x + 1$$

SOLUCIÓN: $x = -\frac{2}{5}$ $y = \frac{1}{5}$ $\lambda = x = -\frac{2}{5}$

$$F_{min} = \frac{1}{5}$$

5. Multiplicadores de Lagrange. Ejemplos

Vamos a formalizar el cálculo de las ligaduras : Supongamos un sistema que tiene un conjunto de coordenadas generalizadas que no son todas ellas libres

$$\{q_j\} \quad j = 1,2,..,3N$$

Y que haya m ecuaciones de ligadura

$$f_\alpha(\{q_j\}t) = 0 \quad \alpha = 1,2,..,m \quad \text{o también:}$$

$$f_\alpha(\{q_j\}t) = cte \quad \alpha = 1,2,..,m$$

Las coordenadas se pueden tratar como libres con la condición de que se introduzcan unas coordenadas $\boldsymbol{\lambda}_\alpha$, (**multiplicadores de Lagrange**), que, incluidas en la lagrangiana, proporcionan las ligaduras como ecuaciones del movimiento:

$$\boldsymbol{L}_\lambda(q_j,\dot{q}_j,\lambda_\alpha;t) = \boldsymbol{L}(q_j,\dot{q}_j;t) + \sum_\alpha \lambda_\alpha \underbrace{f_\alpha(q_j,t)}_{=0 \text{ o cte}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L_\lambda}{\partial q_j} = 0 \longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{\lambda}_\alpha} - \frac{\partial L_\lambda}{\partial \lambda_\alpha} = 0 \longrightarrow f_\alpha(\{q_j\}t) = 0 \quad \alpha = 1,2,..,m$$

3N+m ecuaciones e incógnitas

Se resuelven para obtener las coordenadas y las fuerzas generalizadas de ligadura:

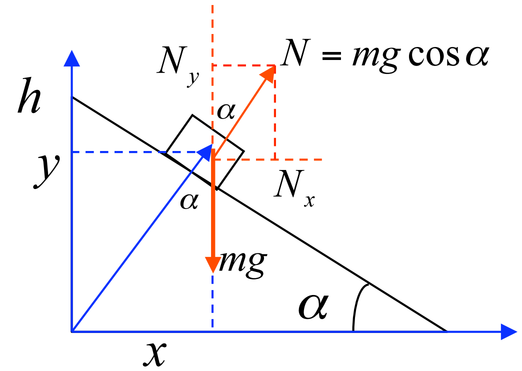
$$Q_j^{lig} = \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_j}$$

Dimensionalmente, fuerzas o momentos de fuerzas

Como debe ser, se verifica que $\quad \delta W = \sum_i Q_j^{lig}\delta q_i = \sum_\alpha \lambda_\alpha \partial f_\alpha = 0$

5. Multiplicadores de Lagrange. Ejemplos.

EJEMPLO 7 : Movimiento en un plano de un cuerpo: 2 coordenadas



Lagrangiana : $$\boldsymbol{L = T - V} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

Ligadura: $y = h - x\,tg\alpha$ $\qquad f(x,y) = y - h + x\,tg\alpha$

nulo

Lagrangiana con multiplicadores: $$\boldsymbol{L}_\lambda = \boldsymbol{L} + \lambda f(x,y) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy + \lambda(y + xtg\alpha - h)$$

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L_\lambda}{\partial x} = \quad m\ddot{x} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = \quad m\ddot{x} - \lambda\,tg\alpha$$

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L_\lambda}{\partial y} = m\ddot{y} + mg - \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = m\ddot{y} + mg - \lambda$$

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial \mathrm{L}_\lambda}{\partial \dot{\lambda}} - \frac{\partial \mathrm{L}_\lambda}{\partial \lambda} = \mathrm{y} + \mathrm{xtg}\alpha - \mathrm{h}$$

(Ligadura)

$$\ddot{x} = g\frac{tg\alpha}{1 + tg^2\alpha} = g\sin\alpha\cos\alpha$$

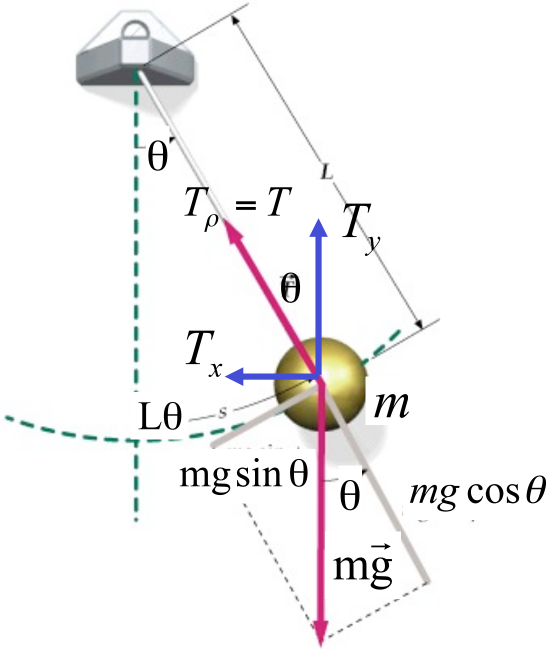
$$\lambda = mg\cos^2\alpha$$

$$\lambda = \frac{\mathrm{m}\ddot{\mathrm{x}}}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{\mathrm{mg}\sin\alpha\cos\alpha}{\mathrm{tg}\alpha} = \mathrm{mg}\cos^2\alpha = \mathrm{N_y} \qquad = Q_y^{lig} = \lambda\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\lambda\,tg\alpha = mg\cos^2\alpha\,tg\alpha = mg\cos\alpha\sin\alpha = N_x \qquad = Q_x^{lig} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}$$

5. Multiplicadores de Lagrange. Ejemplos.

EJEMPLO 8: $\rho = l = \sqrt{x^2 + y^2}$ Ligadura $f(x,y) = \sqrt{y^2 + x^2} = l = cte$



$$\boldsymbol{L}_\lambda = L - \lambda f = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy - \lambda\sqrt{y^2 + x^2}$$

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L_\lambda}{\partial x} = m\ddot{x} + \lambda\frac{x}{l}$$

$$f(x,y) = \sqrt{y^2 + x^2} = l = cte$$

$$0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L_\lambda}{\partial y} = m\ddot{y} - mg + \lambda\frac{y}{l}$$

$$m\ddot{x} = -\lambda\sin\theta = Q_x^{lig} = T_x$$

$$m\ddot{y} - mg = -\lambda\cos\theta = Q_y^{lig} = T_y$$

λ = Tensión T (radial)

Si se hubiera escogido otra forma de escribir la ligadura, la relación entre el multiplicador y la tensión habría sido otra, pero siempre proporcional a la tensión. Por ej. :

$$g(x,y) = y^2 + x^2 = l^2 = cte$$

PROBLEMAS 5.11, 5.12 del boletín
Ejercicios del cuestionario : 51

6. **Función Hamiltoniana** y ecuaciones de Hamilton o ecuaciones canónicas.

Función Hamiltoniana $\boxed{H = \sum_j \pi_j \dot{q}_j - L}$ Veamos que en ciertas circustancias se conserva

$$\frac{dH}{dt} = \sum_j \pi_j \ddot{q}_j + \dot{\pi}_j \dot{q}_j - \frac{dL}{dt} \longrightarrow \sum_j \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j}}_{\dot{\pi}_j} \dot{q}_j + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{\pi_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

(Ec. de Euler-Lagrange)

$$\boxed{\frac{dH}{dt}} = \sum_j (\pi_j \ddot{q}_j + \dot{\pi}_j \dot{q}_j) - \sum_j (\dot{\pi}_j \dot{q}_j + \pi_j \ddot{q}_j) - \frac{\partial L}{\partial t} = \boxed{-\frac{\partial L}{\partial t}}$$

Si el tiempo no aparece explícitamente en la Lagrangiana, H=cte (se conserva) (queda implícito que se cumplen las ecuaciones de Euler-Lagrange y que las fuerzas son conservativas).

Además:

Para ligaduras esclerónomas o relaciones estáticas entre coordenadas $x_k = x_k(q_j)$

$$2T = \sum_k p_k \dot{x}_k = \sum_k p_k \left(\sum_j \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_k}{\partial t}\right) = \sum_j \pi_j \dot{q}_j + \sum_k p_k \cancel{\frac{\partial x_k}{\partial t}} \rightarrow 0$$

$$\boxed{H} = \sum_j \pi_j \dot{q}_j - L = 2T - (T - V) = \boxed{T + V = E}$$

Si las ligaduras son esclerónomas, la Hamiltoniana coincide con la energía del sistema

6. **Función Hamiltoniana** y ecuaciones de Hamilton o ecuaciones canónicas.

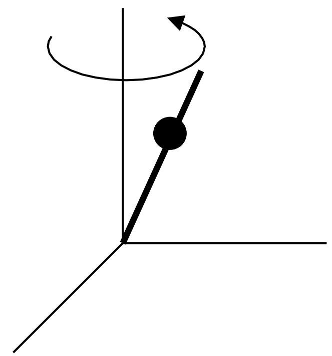
Consecuencias:

- **sistema con ligaduras escleránomas:** la lagrangiana no tiene dependencia explícita con el tiempo, luego H=cte. Además, H = E, luego la energía total se conserva.

- **sistema con ligaduras reónomas:** las coordenadas dependen explícitamente del tiempo, luego H no coincide con E.

a) Si $L = L(t)$ la lagrangiana depende explícitamente del tiempo: la H no es constante.
b) Si $L \neq L(t)$ la lagrangiana no depende explícitamente del tiempo: la H es constante.

Ejemplo: el sistema de la figura es obligado a girar con velocidad angular constante (por ejemplo, por un motor): las coordenadas dependen explícitamente del tiempo, luego la Hamiltoniana no coincide con la energía. Sin embargo $L \neq L(t)$, luego la Hamiltoniana se conserva y es una constante del movimiento. Pero la energía no se conserva (de hecho, hay una fuente externa de energía que obliga a ese giro).



Problema 5.12

6. Función Hamiltoniana y ecuaciones de Hamilton o ecuaciones canónicas.

$$H = \sum_j \pi_j \dot{q}_j - L$$

Se anulan mutuamente

$$dH = \sum_j \left(\pi_j d\dot{q}_j + \dot{q}_j d\pi_j - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j}}_{\dot{\pi}_j} dq_j - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{\pi_j} d\dot{q}_j\right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Por otro lado:

$$H = H(q_j, \pi_j, t) \qquad dH = \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial \pi_j} d\pi_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j\right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Ecuaciones Canónicas o de Hamilton

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial \pi_j} \qquad \dot{\pi}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

2s ecuaciones de 1[er] orden

- Son simétricas
- Si una coordenada es cíclica, explícitamente su momento conjugado se conserva

$$H \neq H(q_c), \quad \dot{\pi}_c = 0$$

$$\boxed{\dot{\pi}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}}$$

Ecuaciones de Lagrange, s ecuaciones de 2º orden

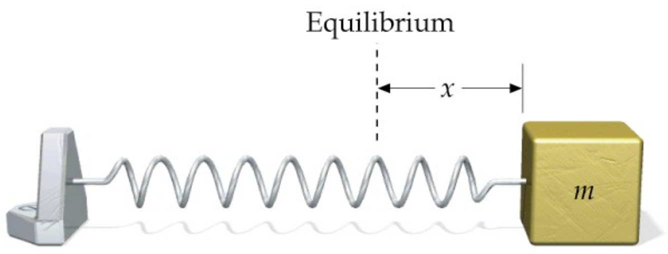
Respecto a la lagrangiana, la Hamiltoniana depende de otras variables

$$(q_j, \dot{q}_j, t) \rightarrow (q_j, \pi_j, t)$$

$$L = L(q_j, \dot{q}_j, t) \qquad H = H(q_j, \pi_j, t)$$

6. Función Hamiltoniana y ecuaciones de Hamilton o ecuaciones canónicas.

EJEMPLO 9: masa sujeta a muelle (1D)



$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \qquad p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

$$H = \sum_j \pi_j \dot{q}_j - L = p_x\dot{x} - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{p_x{}^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

O bien, teniendo en cuenta que se trata de un sistema con ligaduras esclerónomas, en este caso:

$$H = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{p_x{}^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$$

$$\ddot{x} = \frac{\dot{p}_x}{m} = -kx \qquad \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

PROBLEMAS del boletín 5.14, 5.15 y todos los anteriores, abordados por ec. de Hamilton
Ejercicios del cuestionario : todos, abordados por ec. de Hamilton

Chantal Ferrer Roca 2008

7. Principio de mínima acción o principio de Hamilton.

Para cualquier trayectoria con coordenadas q_j y velocidades $\dot{q}_j$, es posible definir una función denominada **Acción** :

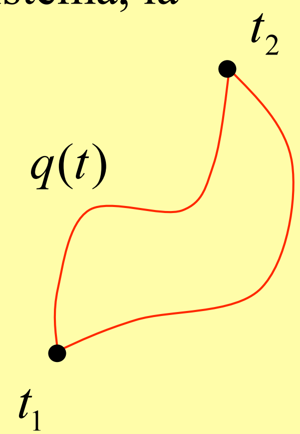
$$A = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j; t)\,dt$$

PRINCIPIO VARIACIONAL O PRINCIPIO DE HAMILTON:

De todas las trayectorias geométricamente posibles o imaginables de un sistema, la trayectoria **física** es aquella que minimiza la acción.

Variación arbitraria de la acción.

$$\boxed{\delta A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$$



La dinámica puede tener el principio de Hamilton como postulado básico (en lugar de las ec. de Newton).
Ventajas:

- Es invariante respecto a las coordenadas concretas elegidas para expresar la Lagrangiana
- Permite abordar dentro de la mecánica problemas que en principio no pertenecen a este ámbito. Por ejemplo, la teoría de campos.

7. Principio de mínima acción o principio de Hamilton.

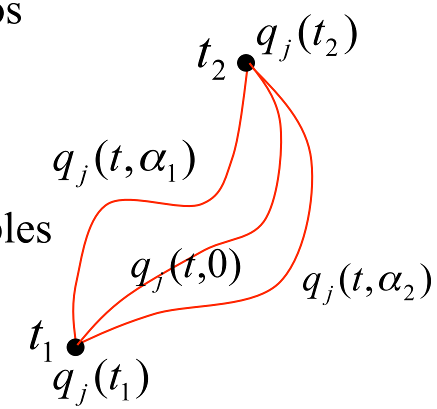
DEMOSTRACIÓN: $\boldsymbol{q_j}$ $\quad j = 1,\ldots,s$ Conjunto de s variables independientes

Construimos $q_j(t,\alpha) = q_j(t,0) + \alpha\eta_j(t)$ $\quad\alpha$ parametriza las trayectorias posibles

Se anula en los extremos

$$\delta A = \left.\frac{\partial A}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \delta\alpha$$

valor concreto de α para el que se tiene un mínimo de la acción, por ejemplo 0.



Trayectorias posibles (distintas α)

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L\big(q_j(t,\alpha), \dot{q}_j(t,\alpha); t\big)dt$$

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \alpha} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \alpha}\right)dt$$

Integración por partes

0 en los extremos

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \alpha} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial^2 q_j}{\partial t \partial \alpha} dt = \cancel{\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial q_j}{\partial \alpha}\right|_{t_1}^{t_2}} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial q_j}{\partial \alpha} dt$$

$$\boxed{0 =}\ \delta A = \left.\frac{\partial A}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} \delta\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \left\{\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right\}\left(\frac{\partial q_j}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} \delta\alpha dt = \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \left\{\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right\}\delta q_j dt}$$

$$\boxed{\delta A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0}$$

Chantal Ferrer Roca 2008