APÉNDICE: ECUACIONES DIFERENCIALES

con coeficientes constantes

1. Definiciones

La forma más general de este tipo de ecuaciones es:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = Q(x)$$

• El **ORDEN de una ecuación diferencial es el de la derivada superior que aparece en ella.**

• Una ecuación diferencial es **LINEAL cuando no existen términos de grado superior al primero en lo que respecta a la variable dependiente y a sus derivadas.**

• Se dice que la ecuación es **HOMOGÉNEA si** $Q(x)=0$.

•Las soluciones de estas ecuaciones se basan en los siguientes teoremas:

Chantal Ferrer Roca 2008

Ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes

2. Teoremas

TEOREMA 1

Si $y=y_1(x)$ es una solución cualquiera de una ecuación diferencial lineal homogénea y C una constante arbitraria, entonces $y=Cy_1(x)$ es también una solución.

TEOREMA 2

Si $y=y_1(x)$ e $y=y_2(x)$ son soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea entonces $y=y_1(x)+y_2(x)$ es también una solución.

TEOREMA 3

Si $y=y_p(x)$ es una solución cualquiera de una ecuación diferencial lineal no homogénea e $y_h(x)$ es una solución de la correspondiente ecuación homogénea, entonces $y=y_p(x)+y_h(x)$ es también una solución de la ecuación no homogénea.

Ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes

3. Ecuaciones homogéneas

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$$

• Se demuestra que la solución general de cualquier ecuación diferencial de segundo orden depende de dos constantes arbitrarias. Por ello podemos escribir la solución de la forma $y=y(x, C_1, C_2)$. A estas constantes habrá que atribuirles valores apropiados que satisfagan las condiciones iniciales del problema físico.

• El problema de obtener la solución general de esta ecuación se reduce al de hallar dos soluciones independientes cualesquiera $y_1(x)$ e $y_2(x)$, pues en virtud de los teoremas I y II

$$y=C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

es también solución y contiene dos constantes, por lo que ha de ser la solución general.

Chantal Ferrer Roca 2008

Ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes

3. Ecuaciones homogéneas

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$$

• Tomando una solución del tipo $y = e^{rx}$ y sustituyéndola en la ecuación se obtiene la *ecuación característica:*

$$(r^2+ar+b)\, e^{rx}=0$$

Raíces de la ecuación característica	**forma de y_h**
raíces reales y distintas ($r_1 \neq r_2$)	$C_1e^{rx}+ C_2e^{rx}$
raíces reales e iguales ($r_1=r_2=r$)	$(C_1+C_2x)e^{rx}$
Imaginarias ($a \pm ib$)	$e^{ax} (C_1\cos bx+C_2\, \mathrm{sen}\, bx)$ o bien $\mu e^{ax}\, \mathrm{sen}\, (bx+d)$

EJEMPLOS

a) $y'' + y' = 0$

Sol.: $y = A + Be^{-x}$

b) $y'' - 2y' + 5y = 0$

Sol.: $y = e^{x}(A\sin 2x + B\cos 2x)$

Chantal Ferrer Roca 2008

Ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes

3. Ecuaciones inhomogéneas

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = Q(x)$$

• Como establece el teorema 3, la solución está formada por la suma de la solución de la ecuación homogénea (ver caso anterior) más una solución particular de la ec. no homogénea. El cálculo de la solución particular se puede realizar por inspección siguiendo la tabla 2:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Q(x)	Raíces de la ecuación característica	forma de yp
$P_m(x)$	r=0 no es raíz r=0 es raíz con multiplicidad s	$P'_m(x)$ $x^s P'_m(x)$
$e^{ax} P_m(x)$	r=a no es raíz r=a es raíz con multiplicidad s	$e^{ax} P'_m(x)$ $x^s e^{ax} P'_m(x)$
$e^{ax} P_m(x) \{sen\ bx,\ cos\ bx\}$	r =a±ib no son raíces r =a±ib son raíces con mult. s	$e^{ax}(A_m(x) sen\ bx + B_m(x) cos bx)$ $x^s e^{ax}(A_m(x) sen\ bx + B_m(x) cos bx)$

Donde $P_m(x)$ es un polinomio de grado m, y $P'_m(x)$ un polinomio de grado m que tiene el mismo número de coeficientes que $P_m(x)$, que se obtienen sustituyendo en la ecuación diferencial.

Chantal Ferrer Roca 2008

Ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes

3. Ecuaciones inhomogéneas

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = Q(x)$$

EJEMPLOS

$$c)\; y'' + y' = 3x^2 - x$$

$$\text{Sol.}: y = (A + Be^{-x}) + (7 - 7x/2 + x^2)\,x$$

$$d)\; y'' - 2y' + 5y = 3x^2 - x$$

$$\text{Sol.}: y = \left[e^x (A\sin 2x + B\cos 2x)\right] + \left[\frac{-16}{125} + \frac{7}{25}x + \frac{3}{5}x^2\right]$$

$$e)\; y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(x+2)$$

$$\text{Sol.}: y = \left[e^x (A\sin 2x + B\cos 2x)\right] + e^{2x}\left[\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right]$$

$$f)\; y'' + y = \sin x$$

$$\text{Sol.}: y = \left[A\sin x + B\cos x\right] - \frac{1}{2}x\cos x$$

$$g)\; y'' = x\cos x + \sin x$$

$$\text{Sol.}: y = \left[C_1 + C_2 x\right] + (\sin x - x\cos x)$$

$$h)\; y'' - 2y = e^x \sin x$$

$$\text{Sol.}: y = \left[C_1 + C_2 e^{2x}\right] - \left(\frac{e^x}{2}\sin x\right)$$

•En todos los casos, los coeficientes que quedan indeterminados (y que en problemas de mecánica se pueden determinar fijando condiciones iniciales) son los de la solución general.