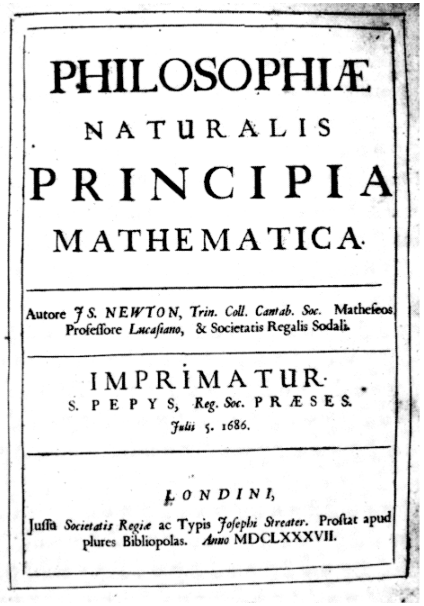
TEMA 2. DINÁMICA DEL PUNTO MATERIAL

Chantal Ferrer Roca 2008


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

1. Leyes de Newton: Enunciado y discusión.
2. Interacciones fundamentales y fuerzas.
3. Ecuaciones del movimiento según el tipo de fuerza y su resolución. Ejemplos
4. Conservación del momento lineal y angular de una partícula.
5. Trabajo, energía cinética y energía potencial. Conservación de la energía mecánica de una partícula. Fuerza conservativa
6. Potencial unidimensional e introducción a pequeñas oscilaciones.

Bibliografía: [Marion], [Kibble], [Rañada], [AFinn], [Mec-Berk], [BarOls], [Golds]

TEMA 2. DINÁMICA DEL PUNTO MATERIAL

NOTA IMPORTANTE:

Los contenidos de este documento representan un esquema de los conceptos fundamentales del tema, por lo que en ningún caso se trata de apuntes completos. Este esquema se complementa con explicaciones, razonamientos, ejemplos y problemas que se desarrollan durante las clases, así como con alguno(s) de los libros que se incluyen en la bibliografía.

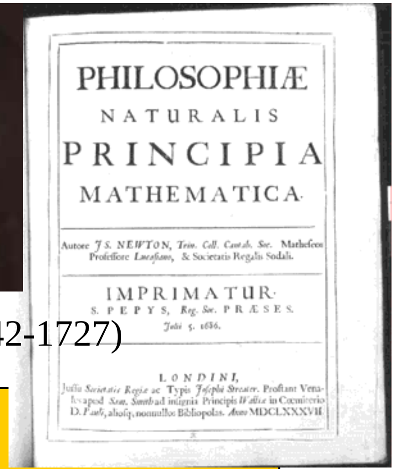
Bibliografía: [Marion], [Kibble], [Rañada], [AFinn], [Mec-Berk], [BarOls], [Golds]

Chantal Ferrer Roca 2008

1. Leyes de Newton, enunciado y discusión

Chantal Ferrer Roca 2008

[Rañada]



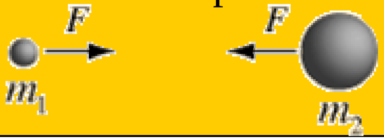
Isaac Newton (1642-1727)

1ª Ley (o Principio de inercia de Galileo):

Todos los cuerpos perseveran en su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme salvo que se vean a forzados a cambiar dicho estado por fuerzas impresas.

2ª Ley o ley fundamental de la dinámica: El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y se hace en la dirección de la línea recta en la que se imprime esa fuerza. (**Definición VIII**: la cantidad de movimiento de una fuerza es la medida de la misma, proporcional al movimiento que genera en un tiempo dado).

3ª Ley o ley de acción y reacción: Para cada acción hay siempre una reacción opuesta e igual. Las acciones recíprocas de los cuerpos entre sí son siempre iguales y dirigidas hacia las partes contrarias.

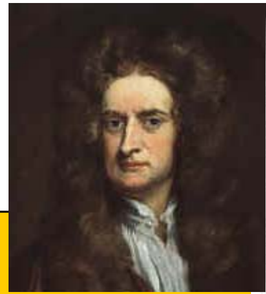


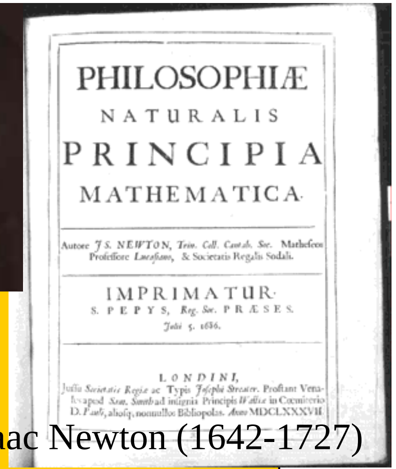
$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

F_{ij} = fuerza del cuerpo i sobre el j, F_{ji} del j sobre el i

1. Leyes de Newton, enunciado y discusión

[Rañada]





Isaac Newton (1642-1727)

1ª Ley (o Principio de inercia de Galileo):

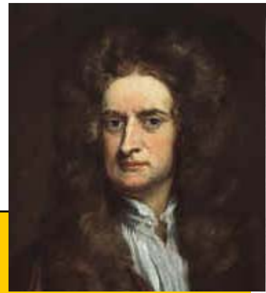
Todos los cuerpos perseveran en su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme salvo que se vean a forzados a cambiar dicho estado por fuerzas impresas.

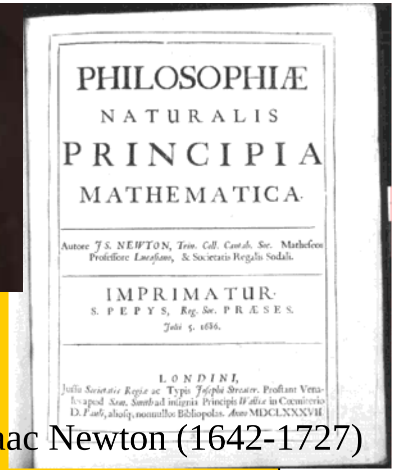
- **Cuerpo** = agregación de partículas. Preferible interpretar "cuerpo" como partícula puntual.
- ¿Qué es **fuerza**?: **Definición IV**: fuerza impresa es una acción de un cuerpo para cambiar su estado, bien sea de reposo o movimiento uniforme rectilíneo. Razonamiento circular.
- **Establece la existencia del movimiento que tiene lugar cuando nada perturba dicho movimiento**. Su comprensión requiere un razonamiento de paso al límite: una progresiva reducción del rozamiento (fuerza) aproxima el comportamiento real a la situación ideal, que solo se verifica en ausencia completa de fuerzas.
  - Ejemplos clásicos: movimiento sobre superficies muy lisas y sin inclinación, movimiento de la piedra que gira sujeta a una cuerda cuando la cuerda se corta.
  - Verificación en estado de ingravidez o caída libre (estaciones espaciales, aviones zero g).

- **Existen sistemas inerciales** reales precisamente porque existen cuerpos que se mueven con velocidad uniforme y rectilínea y que se constituyen en sistemas de referencia (ejemplo de la nave y el objeto que cae desde el mástil).

1. Leyes de Newton, enunciado y discusión

[Rañada]



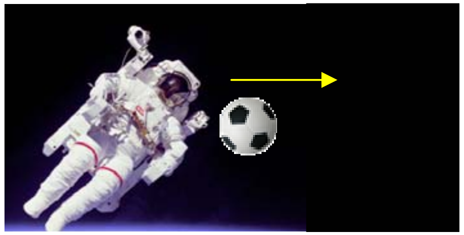


Isaac Newton (1642-1727)

1ª Ley (o Principio de inercia de Galileo):

Todos los cuerpos perseveran en su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme salvo que se vean a forzados a cambiar dicho estado por fuerzas impresas.

Los motores de un petrolero de detienen a 25 km de distancia antes de llegar a puerto

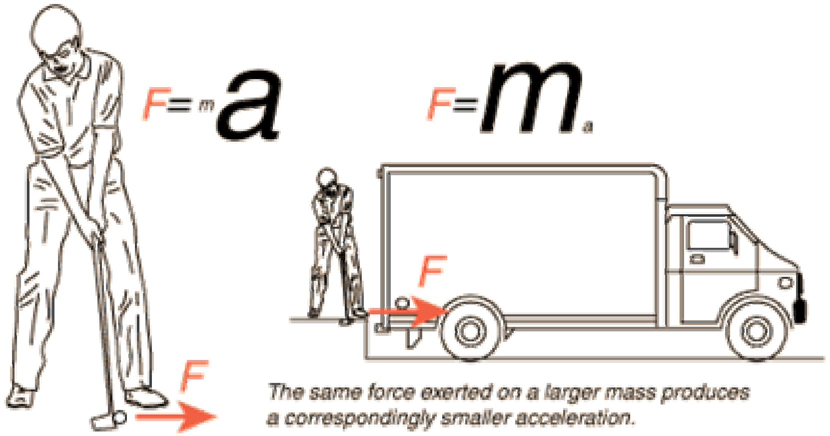


Nada frena la pelota lanzada

Chantal Ferrer Roca 2008

1. Leyes de Newton, enunciado y discusión

2ª Ley o ley fundamental de la dinámica: El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y se hace en la dirección de la línea recta en la que se imprime esa fuerza. (**Definición VIII**: la cantidad de movimiento de una fuerza es la medida de la misma, proporcional al movimiento que genera en un tiempo dado).



http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/HFrame.html

Euler: interpreta como ecuación diferencial

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} \qquad \vec{p} = m\vec{v}$$ cantidad de movimiento o momento lineal

$$\vec{F} = m\vec{a}$$ Válida sólo si m no varía

• Esta ley solo adquiere pleno significado si se define la masa. La **Definición I** de los *Principia* **(“**la cantidad de materia es la medida de la misma, surgida de su densidad y magnitud conjuntamente ... que en lo sucesivo menciono bajo el nombre de masa o cuerpo”) no ayuda, ya que no se definen densidad –menos fundamental que masa- y volumen. Es necesaria una definición que permita su medida (introducido por Ernst Mach 1838-1916).

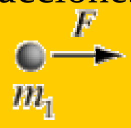
• Sólo gracias a la interpretación de Euler, como ecuación diferencial que relaciona la fuerza con la segunda derivada de la posición, la segunda ley se convierte en la base de de la dinámica clásica. En el marco de esta interpretación, la primera ley es un caso particular de la segunda: cuando F=0, p y v son constantes.

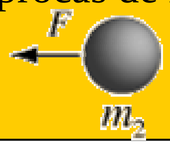
Chantal Ferrer Roca 2008

1. Leyes de Newton, enunciado y discusión

La ley más interesante y verdadera contribución de Newton:

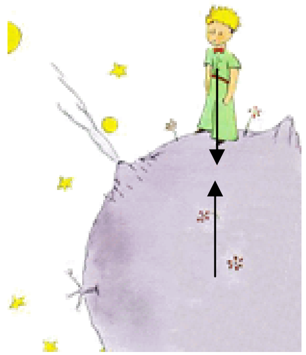
3ª Ley o ley de acción y reacción: Para cada acción hay siempre una reacción opuesta e igual. Las acciones recíprocas de los cuerpos entre sí son siempre iguales y dirigidas hacia las partes contrarias.

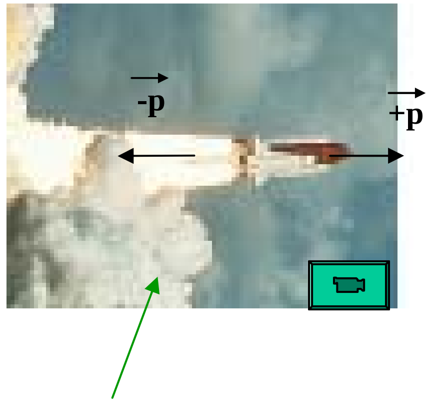




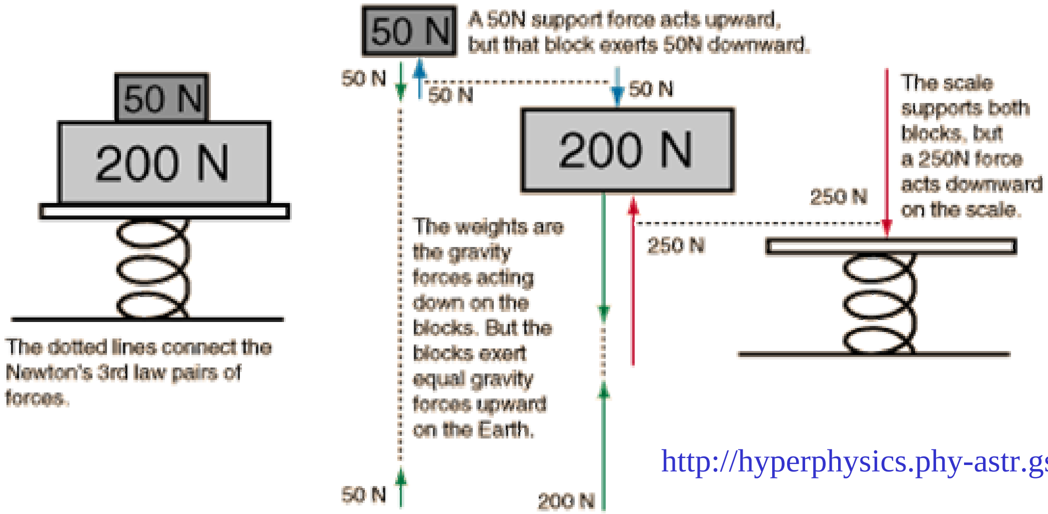
$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

F_{ij} = fuerza del cuerpo i sobre el j, F_{ji} del j sobre el i





¡Atención con los verdaderos pares de fuerzas!



• consecuencia importante : conservación del momento lineal total de un sistema de partículas. Se deduce inmediatamente lo que sucede para dos partículas (ejemplo: cohete)

$$0 = \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = \dot{\vec{p}}_j + \dot{\vec{p}}_i = 0 \longrightarrow \vec{p}_i + \vec{p}_j = cte$$

http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/HFrame.html

Chantal Ferrer Roca 2008

1. Leyes de Newton, enunciado y discusión

La ley más interesante y verdadera contribución de Newton:

3ª Ley o ley de acción y reacción: Para cada acción hay siempre una reacción opuesta e igual. Las acciones recíprocas de los cuerpos entre sí son siempre iguales y dirigidas hacia las partes contrarias.

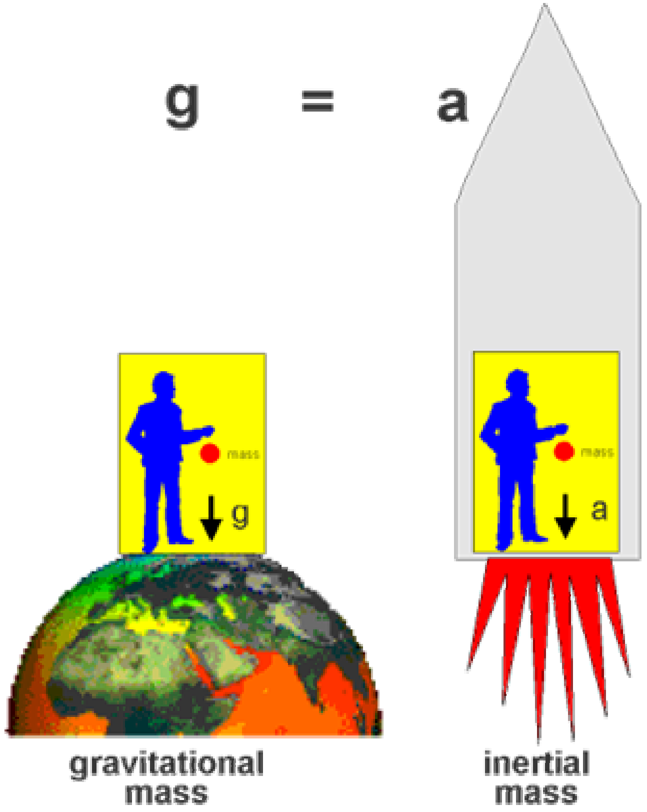
$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

F_{ij} = fuerza del cuerpo i sobre el j, F_{ji} del j sobre el i

• Permite definir la **MASA INERCIAL** eligiendo una masa unidad y midiendo aceleraciones (E. Mach)

Si se tienen dos cuerpos $\vec{F}_{ij} = m_j \vec{a}_j = m_i(-\vec{a}_i) = -\vec{F}_{ji}$

$$\longrightarrow \frac{m_j}{m_i} = -\frac{a_i}{a_j}$$



• La MASA GRAVITATORIA (la que se obtiene pesando los cuerpos) no tendría por qué coincidir con la masa inercial. Eötvös (1848-1919) y Dicke (1954) demostraron experimentalmente que ambas masas coinciden (PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA, importante en relatividad general).

Chantal Ferrer Roca 2008

1. Leyes de Newton, enunciado y discusión

ESPACIO ABSOLUTO DE NEWTON Y PRINCIPIO DE RELATIVIDAD DE GALILEO

• Para Newton (imbuido de la filosofía aristotélica) el tiempo y el espacio son absolutos, es decir, no dependen de la velocidad del observador. Y sus leyes sólo son válidas en un sistema de referencia en reposo con el espacio absoluto. (¿Contradicción con el principio de relatividad de Galileo?).

• Newton identificaba dicho sistema fijo privilegiado coincidente con las estrellas "fijas". Sabemos desde tiempos de Halley (1656-1742) que las supuestas estrellas fijas no lo son, y no existe nada fijo en el universo: el espacio absoluto es una entelequia que se mantuvo desde Newton y en el s. XIX se identificó con el éter, medio en el que supuestamente se debían transmitir las ondas electromagnéticas. El concepto de éter desapareció junto con el de espacio absoluto en **1905** con la teoría de la relatividad restringida de Einstein.

• L. Lange propone en **1885** que la validez de las **leyes de Newton** se amplíe a los **sistemas inerciales**: las transformaciones de Galileo (formalización matemática del principio de relatividad galileano) indican que las aceleraciones, y por lo tanto las fuerzas, son las mismas en todos los sistemas inerciales. De hecho, un sistema inercial se define a veces como aquel en el que son válidas las leyes de Newton, en comparación con los no inerciales, donde dichas leyes no son válidas.

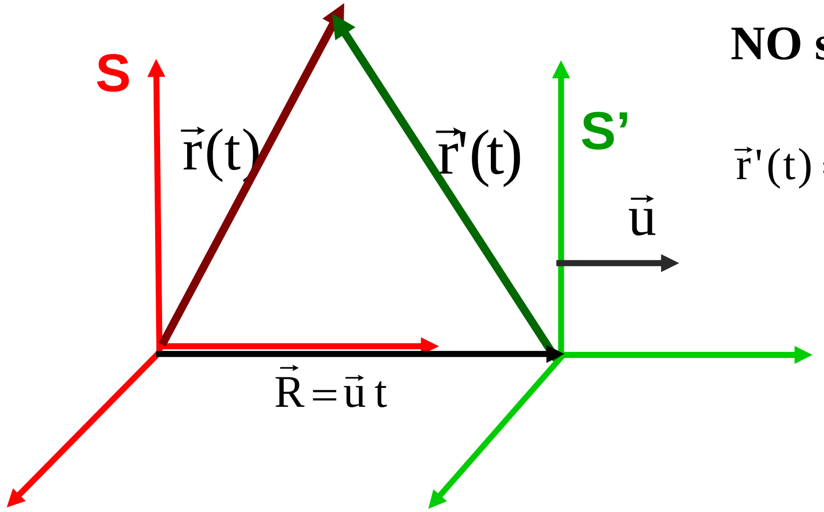
• Lo dicho en el punto anterior significa que, desde el punto de vista mecánico, **todos los sistemas inerciales son equivalentes y no existe ningún sistema privilegiado**. Matemáticamente se formula de la siguiente forma :

Principio de invariancia galileana: las leyes básicas de la mecánica son invariantes bajo las transformaciones de Galileo.

Chantal Ferrer Roca 2008

1. Leyes de Newton, enunciado y discusión

Principio de invariancia galileana: las leyes básicas de la mecánica son invariantes bajo las transformaciones de Galileo



NO son invariantes:

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{R}(t) \quad \begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{u} \quad \begin{cases} v_x' = v_x - u \\ v_y' = v_y \\ v_z' = v_z \end{cases}$$

SÍ son invariantes (carácter absoluto):

$$\begin{cases} |\Delta\vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = |\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1| = |\Delta\vec{r}'| \\ \Delta t = \Delta t' \end{cases}$$

También **invariante** $\vec{a}'(t) = \vec{a}(t)$

m=m' (invariante)

$$\boxed{\begin{matrix} m\vec{a} = \vec{F} \quad y \quad \vec{F}_{jk} = -\vec{F}_{kj} \\ m\vec{a}' = \vec{F}' \quad y \quad \vec{F}'_{jk} = -\vec{F}'_{kj} \end{matrix}}$$

Leyes de Newton invariantes

LIMITACIONES DE LA MECÁNICA NEWTONIANA) [Marion], [Rañada]

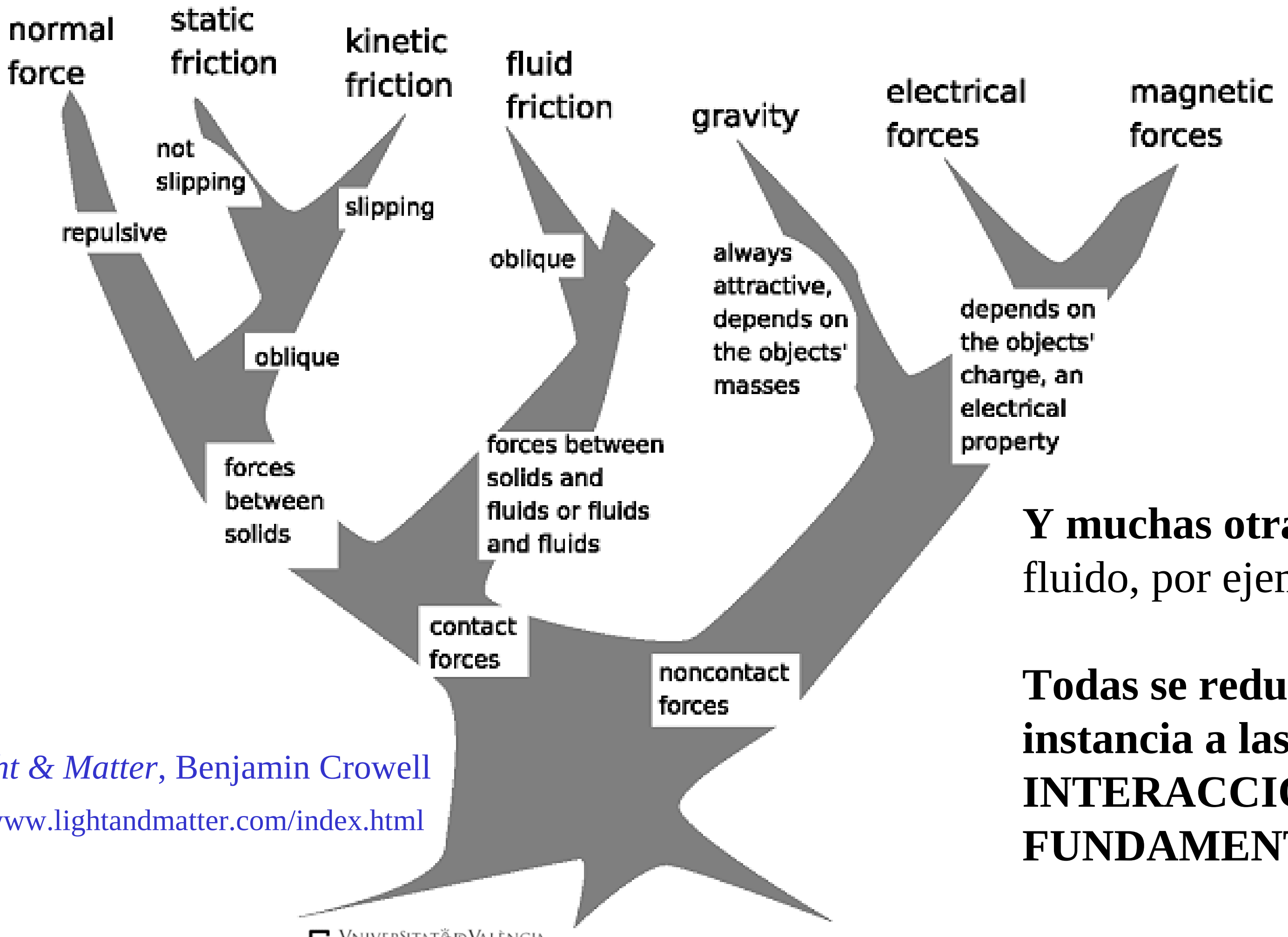
- La tercera ley: no se cumple si las fuerzas no son centrales (p. Ej.: dependientes de la velocidad)
- La tercera ley: presupone interacción instantánea a distancia. Necesaria teoría de campos (p y E)
- No es aplicable cuando v/c~1 (relatividad restringida)
- Tampoco cuando los campos gravitatorios son muy intensos (relatividad general)
- No realiza predicciones correctas cuando las acciones son comparables con la constante de Plank (Et ~h) (Mecánica cuántica, imposibilidad de determinar simultaneamente p y x ó E y t).

Chantal Ferrer Roca 2008

Formulación de Euler de la 2ª ley de Newton o ley fundamental de la mecánica

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}}}$$

Fuerzas: diferentes tipos



Light & Matter, Benjamin Crowell

http://www.lightandmatter.com/index.html

Y muchas otras… (empuje en un fluido, por ejemplo)

Todas se reducen en última instancia a las INTERACCIONES FUNDAMENTALES

2. Interacciones fundamentales y fuerzas

Chantal Ferrer Roca 2008

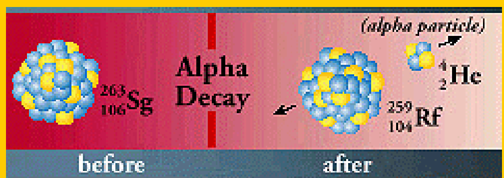
Formulación de Euler de la 2ª ley de Newton o ley fundamental de la mecánica

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}}}$$

Fuerzas : interacciones a distancia

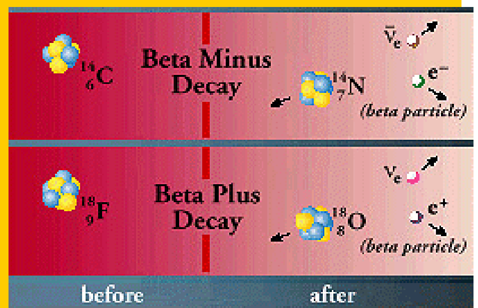
INTERACCIONES FUNDAMENTALES: tienen su origen en la materia elemental y son las últimas responsables de todas las fuerzas de la naturaleza. Las de largo alcance producen efectos macroscópicos. Por orden decreciente de intensidad:

1. **Fuerte**: entre nucleones (hadrones, p y n). Los mantienen unidos en el núcleo. Intensas y de corto alcance.



2. **Electromagnética**: entre cargas eléctricas en reposo o movimiento**.** De largo alcance.

3. **Débil**: entre leptones (e^- y μ) y hadrones.



4. **Gravitatoria**: entre masas. Muy débil

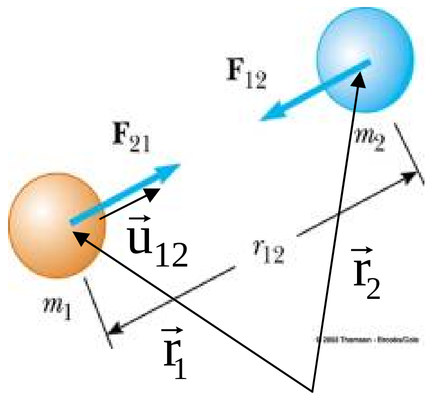
acción a distancia ➡ teoría de campos

Chantal Ferrer Roca 2008

FUERZAS **Problema 2.3**

Gravitatoria (Newton) entre masas puntuales

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{12}$$



$$G = 6.67\times10^{-11}\ Nm^2/kg^2$$ Atractiva siempre (m>0)

Electrostática (Coulomb) entre cargas puntuales

$$\vec{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\vec{u}_{12}$$

$e = 1.6\times10^{-19}\,C$

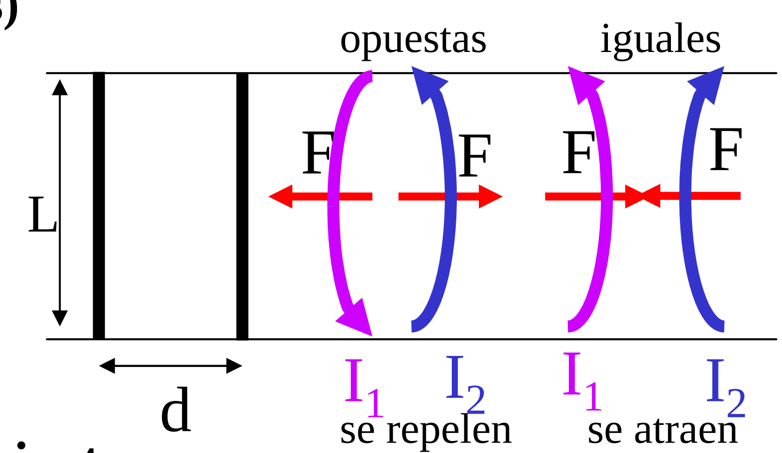
Atractiva o repulsiva

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9\ Nm^2/C^2$$

Fuerza de Van der Waals (entre átomos neutros)

Magnética entre corrientes filiformes rectilíneas

$$\frac{\vec{F}_{12}}{L} = -2K\frac{I_1 I_2}{d}\vec{u}_x \qquad K = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\ N/A^2$$



Magnética sobre cargas puntuales en movimiento

(Ciclotrón, espectrómetro de masas)

$$\vec{F} = q\,\vec{v}\times\vec{B}$$

Chantal Ferrer Roca 2008

FUERZAS **MACROSCÓPICAS**

“DE CONTACTO”: en general, de origen electromagnético a nivel atómico

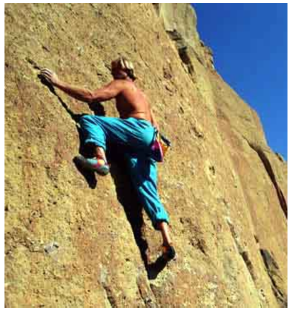
- fuerza **normal** : normal a la superficie de contacto.
- fuerzas de **recuperación**: ley de Hooke, F = -kr, (muelles y similares).
- fuerzas de **tensión**: cuerdas (sin alargamiento)

- fuerzas de **rozamiento**: Resistencia al movimiento por interacción del móvil con el medio externo (sólido o fluido). Opuestas al movimiento.

Problema 2.2, cuestión 12

- **En sólidos:** rugosidad de superficies de contacto + fuerzas electrostáticas

$$\left|\vec{F}\right| \leq \mu_e \left|\vec{N}\right|$$



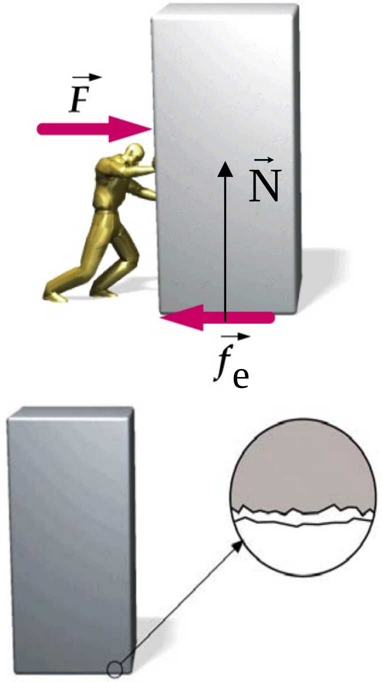


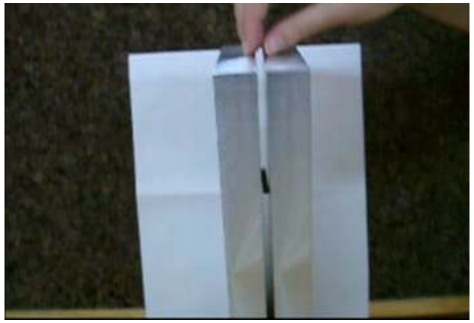
Fig. del libro “Física” de P.A.Tipler y G. Mosca, Ed. Reverté, 2005

μ_e coeficiente estático: De F mínima necesaria para poner en movimiento relativo dos cuerpos en contacto desde el reposo

μ_d coeficiente dinámico: De F necesaria para mantener dos cuerpos en mov. uniforme relativo

➢fuerzas de **rozamiento**: Resistencia al movimiento por interacción del móvil con el medio externo (sólido o fluido). Opuestas al movimiento.

• **En fluidos** (fuerzas de arrastre o viscosas) depende de
- forma del objeto
- propiedades del fluido
- velocidad del objeto



Régimen laminar $\vec{F} = -b\vec{v} \quad b = K\eta$

K dependiente de la forma ($K_{esfera} = 6\pi R$)

η viscosidad, disminuye con aumento de T en los líquidos

Caida de un imán NIB entre dos bloques de aluminio: la caída del imán induce corrientes de Foucault en el aluminio y un campo B que da lugar a una fuerza opuesta a la gravitatoria. Desde el punto de vista dinámico se puede modelizar como una fuerza de tipo viscoso. Cuando ésta se equilibra con la gravitatoria, el imán cae con velocidad uniforme.

Régimen turbulento $\vec{F} = -cv^2\vec{\tau}$

$c \equiv CS\rho/2$

$\rho \equiv$ densidad del fluido, S=sección

$C \equiv$ coeficiente aerodinámico (depende de la forma, 0.5 para esferas)

DEMO en clase: caída de una moneda y un trozo de *styrofoam* en aire y en vacío parcial. Caída de un trozo de papel sólo y con un libro debajo.

Chantal Ferrer Roca 2008

$$\boxed{\vec{F} = \dot{\vec{p}}} \longrightarrow \begin{array}{l} F_x = \dot{p}_x = m\ddot{x} \\ F_y = \dot{p}_y = m\ddot{y} \\ F_z = \dot{p}_z = m\ddot{z} \end{array}$$

Ecuaciones diferenciales

$$F_i = \dot{p}_i = m\ddot{x}_i \quad i = 1,2,3$$

CASOS:

De condiciones iniciales

- La fuerza depende del tiempo $F_i(t) = \dot{p}_i = m\dfrac{dv_i}{dt}$

$$v_i(t) = \dot{x}_i = \int \frac{F_i(t)}{m} dt + C_1$$

$$x_i(t) = \int v_i(t) dt + C_2$$

- La fuerza depende de la velocidad (1D) $F(v) = m\dfrac{dv}{dt}$

cuestiones 13,14,15,16

$$t = m\int \frac{dv}{F(v)} + C_1 \rightarrow v(t)$$

- La fuerza depende de la misma variable que se integra (1D) $F(x) = m\ddot{x} = mv\dfrac{dv}{dx}$

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{m}\int F(x)dx + C_1} \qquad t = \int \frac{dx}{v(x)} + C_2 \rightarrow x(t)$$

3. Ecuaciones del movimiento y su resolución. Ejemplos.

Chantal Ferrer Roca 2008

$$\boxed{\vec{F} = \dot{\vec{p}}} \longrightarrow \begin{array}{l} F_x = \dot{p}_x = m\ddot{x} \\ F_y = \dot{p}_y = m\ddot{y} \\ F_z = \dot{p}_z = m\ddot{z} \end{array}$$

Ecuaciones diferenciales

$$F_i = \dot{p}_i = m\ddot{x}_i \quad i = 1,2,3$$

CASOS:

• GENERAL: Cada componente de la fuerza depende del tiempo y de todas las componentes de la posición y la velocidad

$$F_i(x_j, \dot{x}_j, t) = \dot{p}_i = m\ddot{x}_i$$

Ecuaciones acopladas, Métodos numéricos

Ec. Fund. dinámica → Ecuación diferencial → v(t) x(t) → Instantes particulares del movimiento

F concretas

Integrales + Cond. Iniciales

En cualquier instante

Ejercicio: cuestión 13 un objeto de masa 2 kg se impulsa sobre una superficie horizontal con velocidad inicial v0=3 m/s. Sabiendo que la fuerza de rozamiento con la superficie es de 0.5/v N, donde v es la velocidad del objeto, a) obtener el tiempo que el objeto tarda en pararse, b) la distancia que recorre.

3. Ecuaciones del movimiento y su resolución. Ejemplos.

Chantal Ferrer Roca 2008

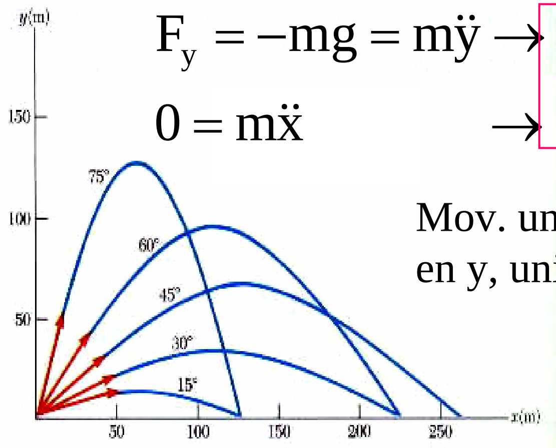
Ejemplos clásicos sencillos

Figuras de la web: http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/default.htm

Mov. de un proyectil sin rozamiento

$$F_y = -mg = m\ddot{y} \rightarrow \boxed{\ddot{y} = -g}$$

$$0 = m\ddot{x} \rightarrow \boxed{\ddot{x} = 0}$$



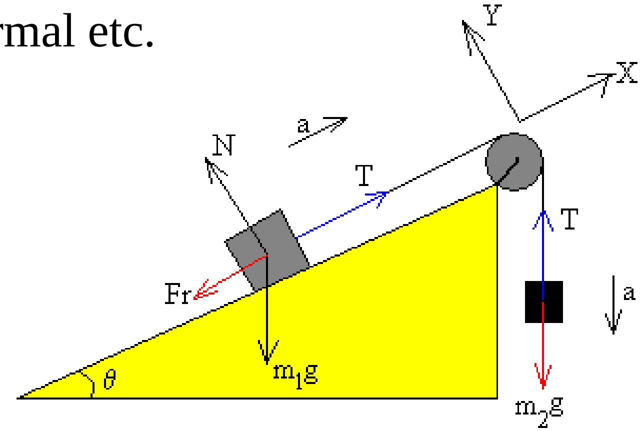
Mov. unif. acelerado en y, uniforme en x

Figura del libro "Physics" for scientists and engineers" de R. A. Serway, Ed. Saunders Golden, 1990

Plano inclinado

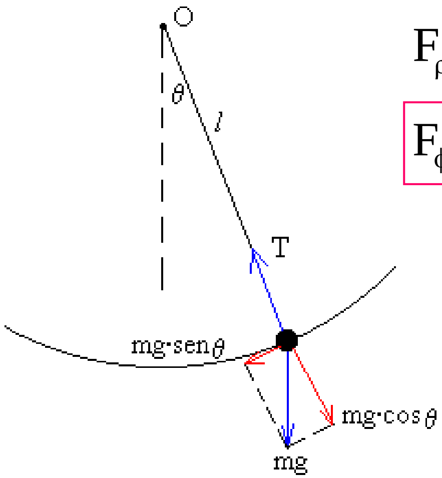
con rozamiento, tensiones, fuerza normal etc.

$$\ddot{x} = -\lambda g$$



Problemas 2.1, 2.2

Péndulo simple



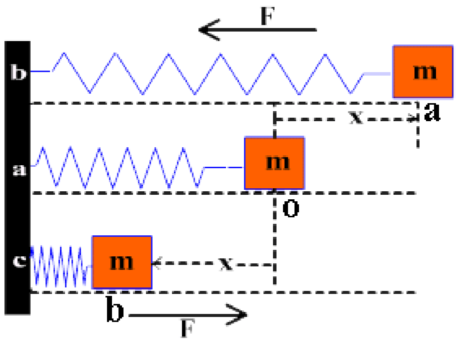
$$F_\rho = T - mg\cdot\cos\phi = ma_\rho = m\frac{v^2}{L}$$

$$\boxed{F_\phi = -mg\cdot\sin\phi = ma_\phi = mL\ddot{\phi}}$$

$$\boxed{\ddot{\phi} + \frac{g}{L}\sin\phi = 0}$$

Mov. Arm Simple para ángulos pequeños- Tema 3

Masa + muelle



$$F = -kx = m\ddot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

Mov. Arm Simple- Tema 3

Otros ejemplos: medida de la viscosidad de un fluido

Caida de una partícula en un fluido viscoso en reg. Laminar (f. de Stokes)

[Marion],[Afinn], **Problema 2.4 del boletín**

$$\boxed{\vec{F} = -b\vec{v} \quad b = K\eta}$$

K - f. forma ($K_{esfera} = 6\pi R$)
η viscosidad

$$m\vec{a} = \vec{F}_g + \vec{F}_e + \vec{F}_r$$

$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = m'g - bv}$$

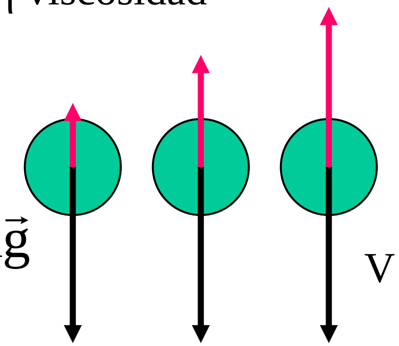
$$m' = m - m_{flu-des}$$

Si v=cte,

$$\boxed{v_L = \frac{m'g}{b}}$$

no depende de la velocidad inicial

$\vec{F} = m\vec{g}$

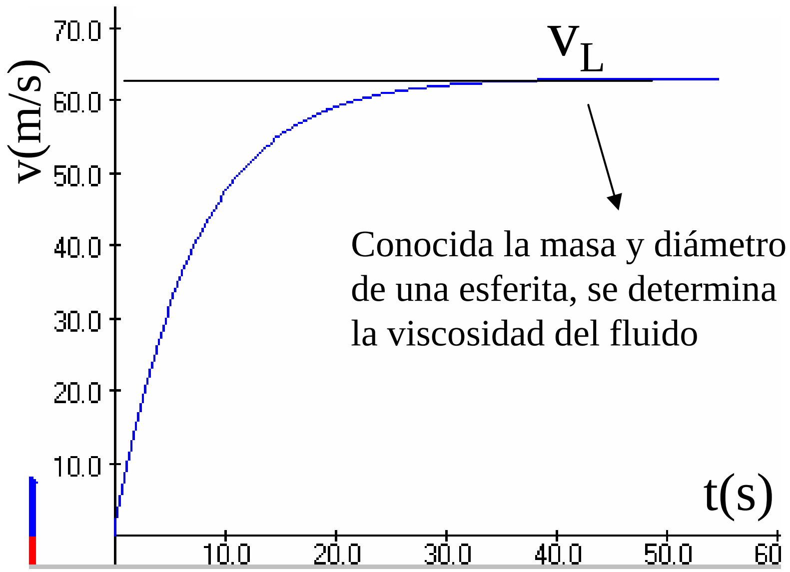


V limite

$$\boxed{v(t) = v_L + (v_0 - v_L)e^{-\frac{g}{v_L}t}}$$

$$\boxed{v(t) = v_L(1 - e^{-\frac{g}{v_L}t})}$$

si $v_0 = 0$



Conocida la masa y diámetro de una esferita, se determina la viscosidad del fluido

Se puede calcular $x(t)$

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/viscosidad/viscosidad.html
http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/viscosidad1/viscosidad1.htm

3. Ecuaciones del movimiento y su resolución. Ejemplos.

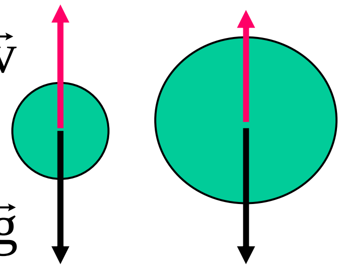
Chantal Ferrer Roca 2008

Cuestión 14

Ejemplo Supongamos dos bolas de igual masa y radios distintos, $r_2 > r_1$ $\quad b = \alpha r$

Si v=cte, $\boxed{v_L = \frac{m'g}{b}}$

$\vec{F} = \alpha r \vec{v}$

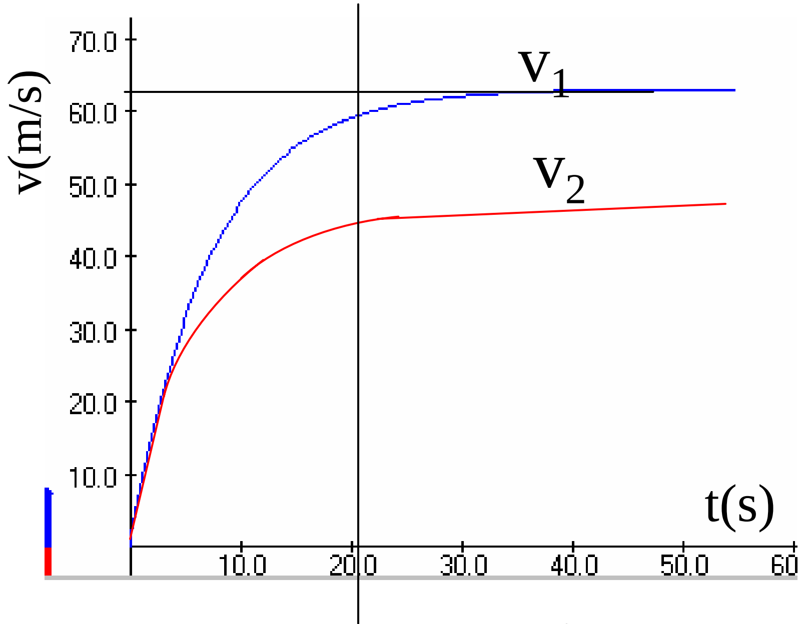


$\vec{F} = m\vec{g}$

Como las masas son iguales, el peso también, luego la fuerza viscosa necesaria para compensar el peso será la misma, pero eso conduce a v limite distintas

$$v_2 = \frac{m'g}{\alpha r_2} < v_1$$

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/stokes/stokes.html



$$\boxed{v(t) = v_L\left(1 - e^{-\frac{g}{v_L}t}\right)}$$

La masa 2 alcanza antes la velocidad límite

Para t<< mov. Uniformemente acelerado $v = gt$

Calcular el tiempo que tardan ambas en alcanzar el 95 % de la velocidad límite

¿Cuál llega antes al suelo?

3. Ecuaciones del movimiento y su resolución. Ejemplos.

Chantal Ferrer Roca 2008

Otros ejemplos: paracaidismo deportivo

<u>Caida de una partícula en un fluido en reg. turbulento</u>

$$\boxed{\vec{F} = -cv^2\vec{\tau}}$$

[BargOlson]

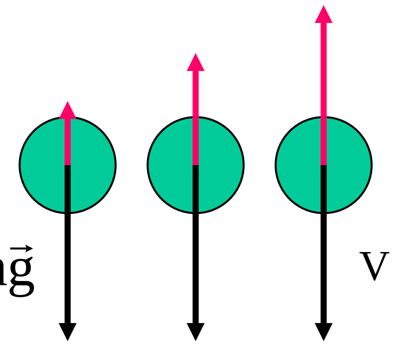
$c \equiv CS\rho/2$
$\rho \equiv$ densidad del fluido, S=sección
$C \equiv$ coeficiente aerodinámico (depende de forma, 0.5 para esfera)

$$m\vec{a} = \vec{F}_g + \vec{F}_e + \vec{F}_r$$

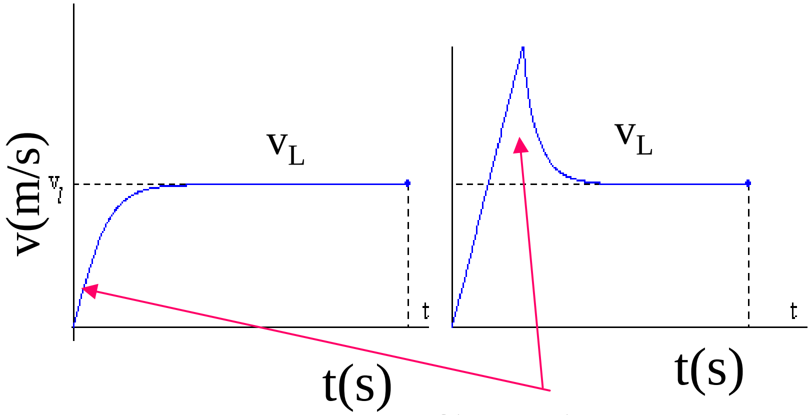
$$\boxed{m\frac{dv}{dt} = m'g - cv^2}$$

Si v=cte, $\boxed{v_L = \sqrt{\frac{m'g}{c}}}$

$\vec{F} = m\vec{g}$



V limite



$$t \gg \frac{v_L}{2g}$$

Si a un cierto punto se abre el paracaidas

$$\boxed{v(t) = v_L \frac{1 - e^{-\frac{2g}{v_L}t}}{1 + e^{-\frac{2g}{v_L}t}}}$$

$\longrightarrow$ Se puede calcular $x(t)$

http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/paracaidista/paracaidista.html

http://www.greenharbor.com/fffolder/ffresearch.html

Práctica Lab. Mecánica- máquina de Atwood y viscosidad (¿Newton o Stokes?)

Chantal Ferrer Roca 2008

Otros ejemplos: el golf

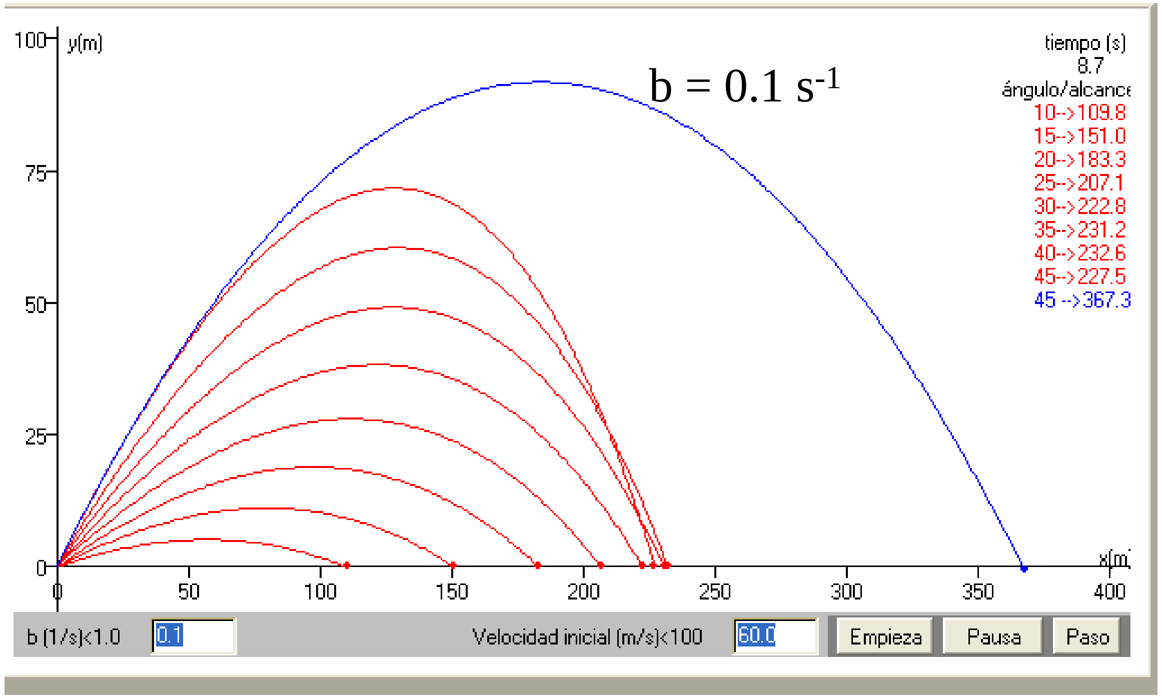
Movimiento parabólico de un proyectil en un medio resistente

$$\vec{F} = -k\vec{v} = -bm\vec{v}$$

[Marion]

$$m\vec{a} = \vec{F}_g + \vec{F}_r \quad \begin{cases} m\ddot{x} = -bm\dot{x} \\ m\ddot{y} = -mg - bm\dot{y} \end{cases}$$

El alcance máximo no se produce a 45 º

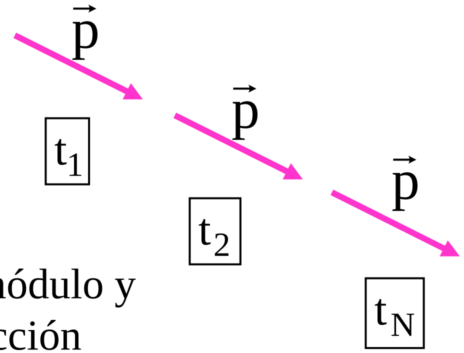


http://scsx01.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/stokes2/stokes2.htm

4. Conservación del momento lineal y angular de una partícula.

Conservación del momento lineal

Ley de inercia de Galileo



en módulo y dirección

2ª Ley de Newton $\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ si $\boxed{\vec{F} = \dot{\vec{p}} = 0, \quad \vec{p} = cte}$

Conservación del momento angular

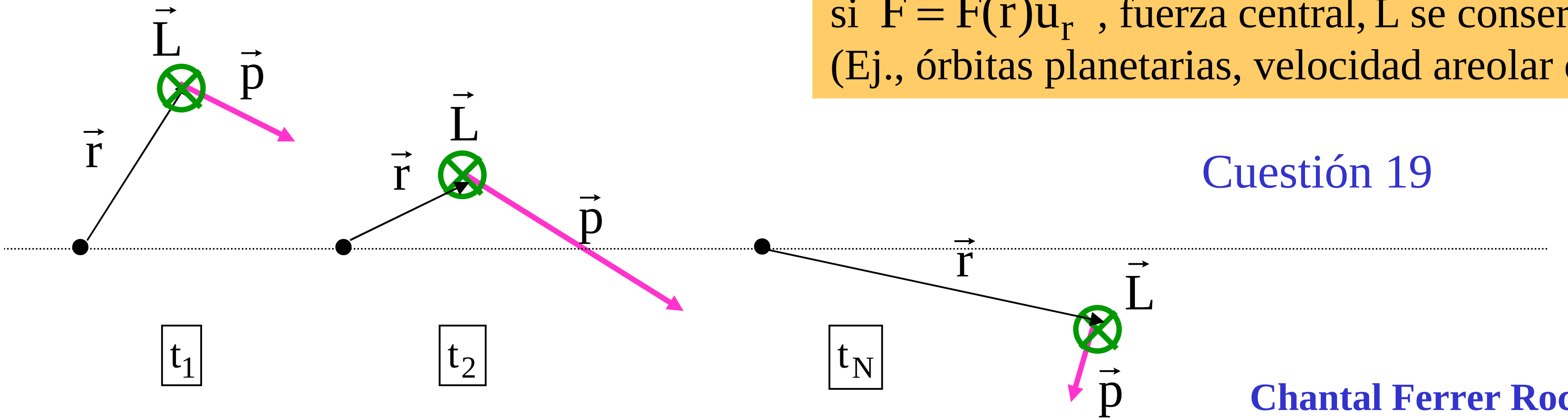
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ momento angular

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ momento de fuerzas

$$\boxed{\vec{M} = \dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

$$\boxed{\vec{M} = \dot{\vec{L}} = 0, \quad \vec{L} = cte}$$

si $\vec{F} = F(r)\vec{u}_r$, fuerza central, $\vec{L}$ se conserva
(Ej., órbitas planetarias, velocidad areolar cte.)



Cuestión 19

Chantal Ferrer Roca 2008

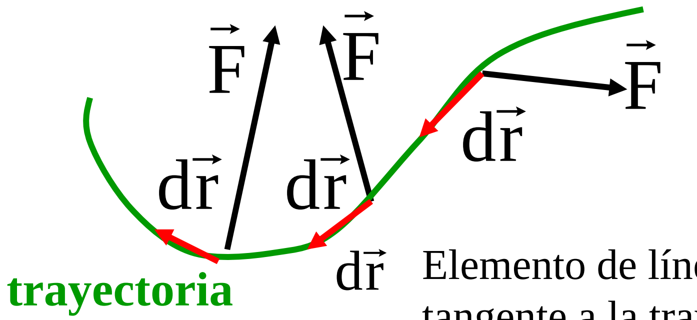
5. Trabajo, energía cinética y energía potencial. Conservación de la energía

Chantal Ferrer Roca 2008

Trabajo "dinámico" y energía cinética de una partícula

2ª Ley de Newton $\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \dfrac{d(m\vec{v})}{dt}$ $\qquad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t)$

trabajo infinitesimal: multiplicar por elemento de trayectoria $\quad dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad = d(\frac{1}{2}m|\vec{v}|^2) = dT$



$d\vec{r}$ Elemento de línea tangente a la trayectoria

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$ energía cinética

integrando para dos puntos de la trayectoria $\quad \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}} = \int_{t_1}^{t_2} dT = \underbrace{T(t_2) - T(t_1)}$

$$\boxed{W_{1,2} = T_2 - T_1}$$

Teorema trabajo-energía

sólo la componente tangencial de la fuerza realiza trabajo

El trabajo efectuado por una fuerza es igual a la variación de la energía cinética de la partícula sobre la que actúa

$T_1 < T_2$ $\quad W_{12}>0$ el trabajo lo realiza la fuerza aumentando la energía cinética
$T_1 > T_2$ $\quad W_{12}<0$ el trabajo lo realiza la partícula a costa de reducir su energía cinética
si T=cte W=0, de acuerdo con el principio de inercia

Cuestión 19

5. Trabajo, energía cinética y potencial. Conservación de la energía

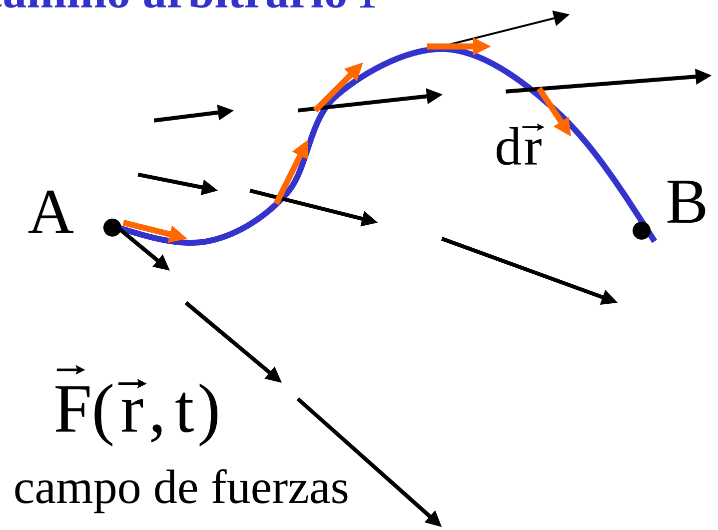
energía potencial y fuerzas conservativas

Trabajo "virtual": necesario para llevar la partícula de A a B por un camino arbitrario a velocidad nula (o tiempo infinito).

$$W_{virt} = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

camino arbitrario
(¡NO ES TRAYECTORIA!)

camino arbitrario Γ



$\vec{F}(\vec{r},t)$

campo de fuerzas

Si Γ coincide con la trayectoria y la fuerza no depende del tiempo, el trabajo virtual coincide con el dinámico

Si la fuerza es tal que su trabajo sólo depende de las posiciones inicial y final (**FUERZA CONSERVATIVA**)

$$W_{virt} = \int_{A}^{B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = U_A - U_B$$

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} U}$$

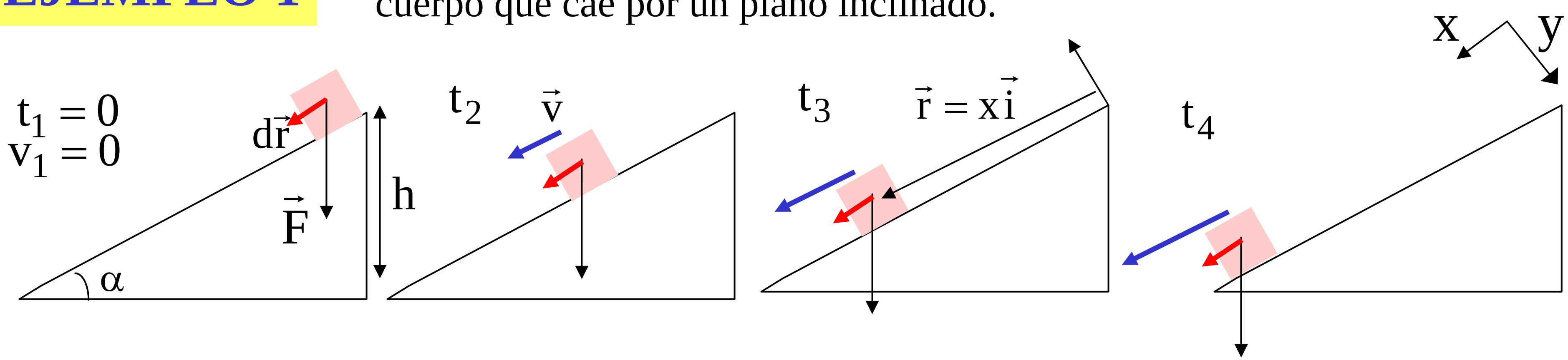
$$W_{virt} = \int_{A}^{B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int_{A}^{B} \vec{\nabla} U \cdot d\vec{r} = -\int_{A}^{B} dU = U_A - U_B$$

Se puede definir la **variación de energía potencial** de la partícula como el trabajo "virtual" necesario para llevarla del punto A al B sin cambiar su energía cinética.

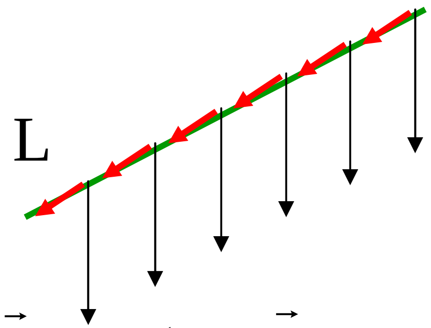
La energía potencial está completamente definida salvo por una constante (sólo tiene significado físico la variación de energía potencial).

EJEMPLO 1

Calcular el trabajo desarrollado y la energía cinética adquirida por un cuerpo que cae por un plano inclinado.



trayectoria $d\vec r = dx\,\vec i$



$$\vec F = mg(\sin\alpha\,\vec i + \cos\alpha\,\vec j)$$

$$\int_{t_1}^{t_4} \vec F\cdot d\vec r = \int_{x(t_1)}^{x(t_4)} F_x\,dx = F_x\,(x(t_4) - x(t_1)) = (mg\sin\alpha)\,L$$

$$\parallel\ \boxed{= mgh}$$

$$T_4 - T_1 = \frac{1}{2}m(v(t_4)^2 - v(t_1)^2) = \frac{1}{2}m(2L\,g\sin\alpha)$$

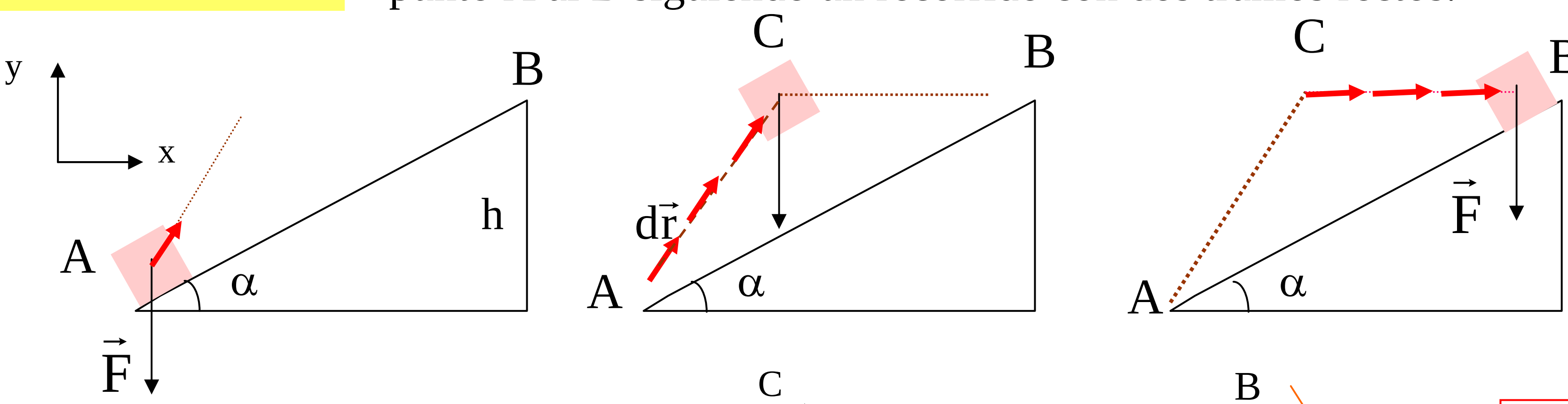
$$\begin{cases} v(t)^2 = (g\sin\alpha)^2\ t^2 = (g\sin\alpha)^2\ \dfrac{2x}{g\sin\alpha} \\ x(t) = \dfrac{1}{2}(g\sin\alpha)\ t^2 \end{cases}$$

Chantal Ferrer Roca 2008

5. Trabajo, energía cinética y potencial. Conservación de la energía

EJEMPLO 2

Calcular el trabajo virtual que se realiza para llevar una masa desde el punto A al B siguiendo un recorrido con dos tramos rectos.



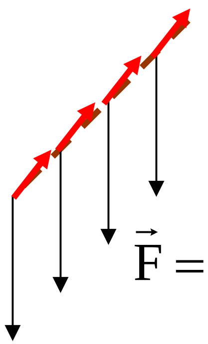
$$W_{virt} = \int_\Gamma \vec F \cdot d\vec r = \int_A^C \vec F \cdot d\vec r + \underbrace{\int_C^B \vec F \cdot d\vec r}_{=0} \boxed{= -mgh}$$

$$\int_A^C (F_x dx + F_y dy) = F_y h = -mgh$$

$$\vec F \perp d\vec r$$

camino arbitrario

$$d\vec r = dx\,\vec i + dy\,\vec j$$



$$\vec F = -mg\vec j$$

$$\boxed{-\Delta U = U_A - U_B = -mgh}$$

al llevar la masa hasta una altura h (siguiendo un camino cualquiera), se realiza un trabajo mgh y la masa adquiere la capacidad de realizar un trabajo dinámico (adquiere una energía potencial) del mismo valor.

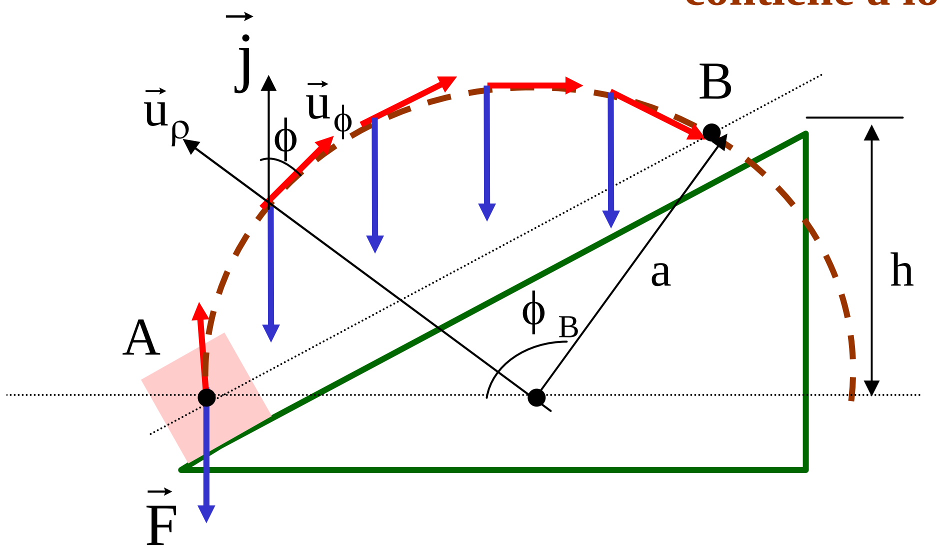
Chantal Ferrer Roca 2008

5. Trabajo, energía cinética y potencial. Conservación de la energía. Fuerzas conservativas

EJERCICIO 1

camino arbitrario Γ: circunferencia de radio a que contiene a los puntos A y B

$$d\vec{r} = ad\phi\,\vec{u}_\phi$$



$$\vec{F} = -mg\vec{j} = -mg(\sin\phi\,\vec{u}_\rho + \cos\phi\,\vec{u}_\phi)$$
$$= F_\rho\vec{u}_\rho + F_\phi\vec{u}_\phi$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_\phi a d\phi$$

$$W_{virt} = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\phi_A=0}^{\phi_B} F_\phi a d\phi = -mga\int_0^{\phi_B}\cos\phi d\phi = -mga\sin\phi_B = -mgh = -\Delta U$$

Chantal Ferrer Roca 2008

5. Trabajo, energía cinética y potencial. Conservación de la energía.

ENERGÍA MECÁNICA total de una partícula $\quad E = T + U$

U se define respecto a un origen de potenciales $\vec{\nabla} U = \vec{\nabla}(U + \text{cte})$
T depende del sistema (la velocidad depende del sistema inercial)

sólo variaciones de E (imposible valor absoluto)

$$\boxed{\frac{dE}{dt}} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} + (\vec{\nabla}U\cdot\vec{v} + \frac{\partial U}{\partial t}) = (\vec{F} + \vec{\nabla}U)\cdot\vec{v} + \frac{\partial U}{\partial t} = \boxed{\frac{\partial U}{\partial t}}$$

F deriva de un potencial $\quad 0$ si $\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla}U}$

si además U, (y F) no dependen explícitamente del tiempo $\quad \boxed{\frac{\partial U}{\partial t} = 0}$

condiciones de Fuerza conservativa $\quad \frac{dE}{dt} = 0$

Conservación de la energía $\quad \boxed{\mathbf{E = T + U = cte}}$

La energía total E de una partícula en un campo de fuerzas conservativo es constante respecto del tiempo

O también, $\quad W_{virt} = -\Delta U = W_{din} = \Delta T \quad \boxed{\Delta(T + U) = 0}$

Chantal Ferrer Roca 2008

5. Trabajo, energía cinética y potencial. Conservación de la energía.

Condiciones de Fuerza conservativa

U (y F) no dependen explícitamente del tiempo $\boxed{\dfrac{\partial U}{\partial t} = 0}$

F deriva de un potencial $\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} U}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial U}{\partial t} = 0 \\ \vec{F} = -\vec{\nabla} U \end{array}\right\} \dfrac{dE}{dt} = 0$$

$\downarrow$

Fuerza conservativa: aquella cuyo trabajo virtual depende sólo de los puntos inicial y final. La energía de una partícula sometida a fuerzas conservativas se conserva

$$W_{virt} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -\int_A^B \vec{\nabla} U \cdot d\vec{r} = -\int_A^B dU = U_A - U_B$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U = 0 \qquad \text{como } \vec{F} = -\vec{\nabla} U \qquad \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0}$$

Problemas 2.5, 2.6 Cuestiones 18, 20, 21,22,23,24

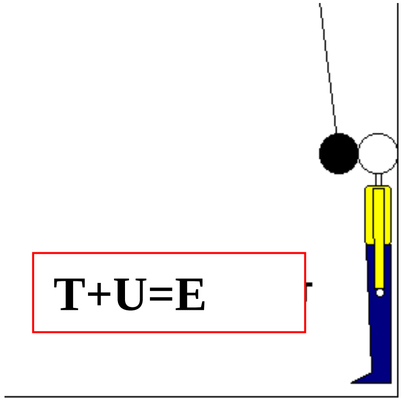
Chantal Ferrer Roca 2008

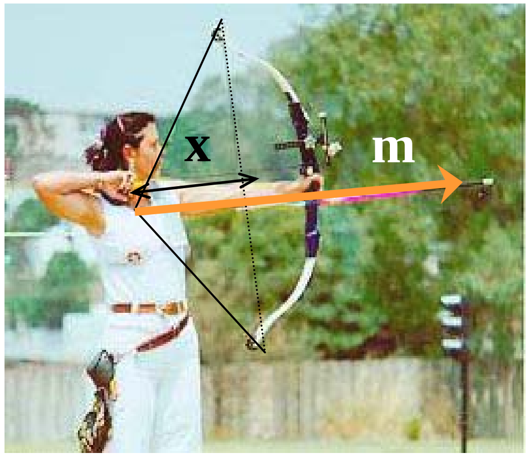
5. Trabajo, energía cinética y potencial. Conservación de la energía

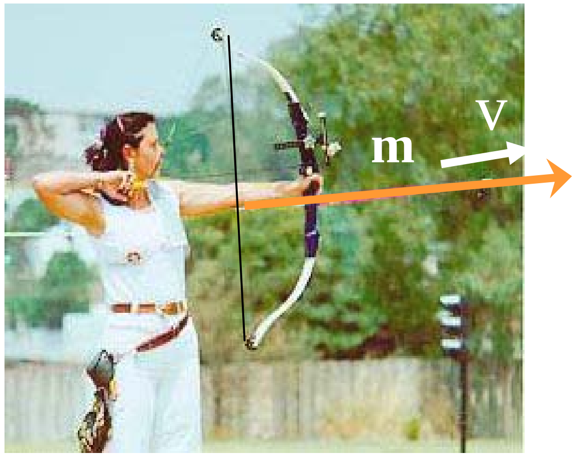
FENÓMENOS Conservación de la energía de una partícula

http://www.wfu.edu/physics/demolabs/demos/avimov/mechanics/nose_basher_pendulum/bowlingball2.MPG

http://www.wfu.edu/physics/demolabs/demos/avimov/mechanics/nose_basher_pendulum/bowlingball1.rm







$x=x_{max}$ E=U

x=0, E=T

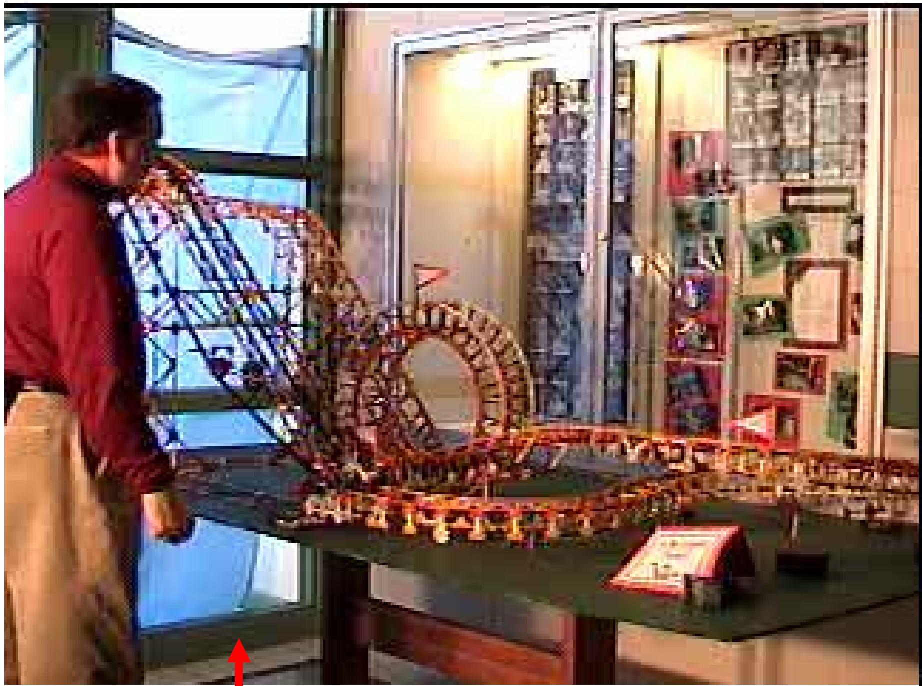
x arbitraria, E=T+U

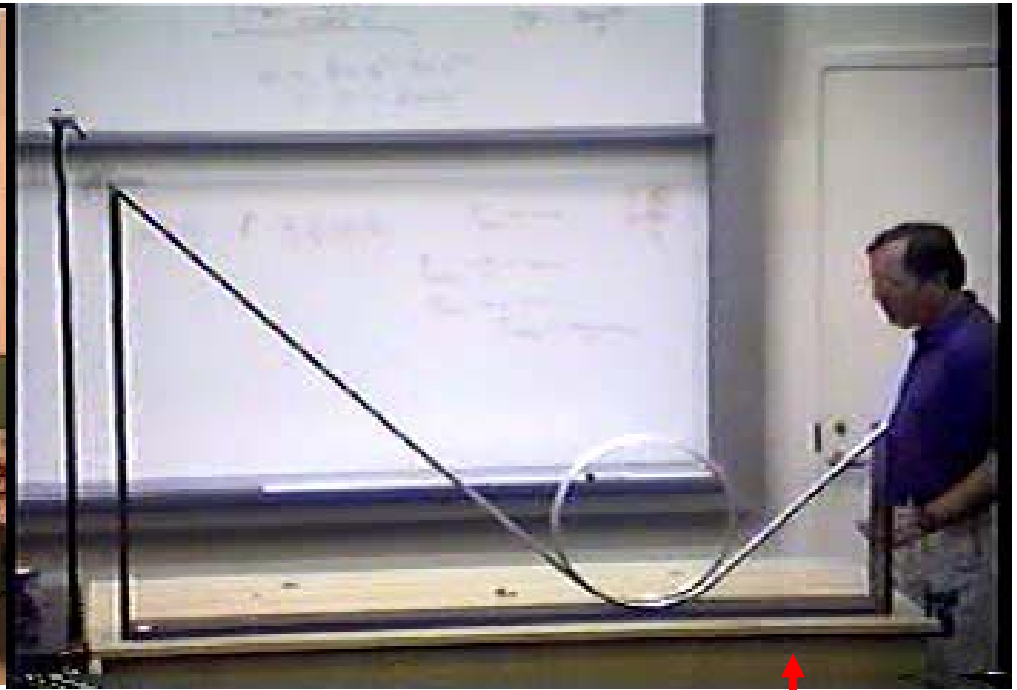
Chantal Ferrer Roca 2008

5. Trabajo, energía cinética y potencial. Conservación de la energía

FENÓMENOS

Conservación de la energía de una partícula





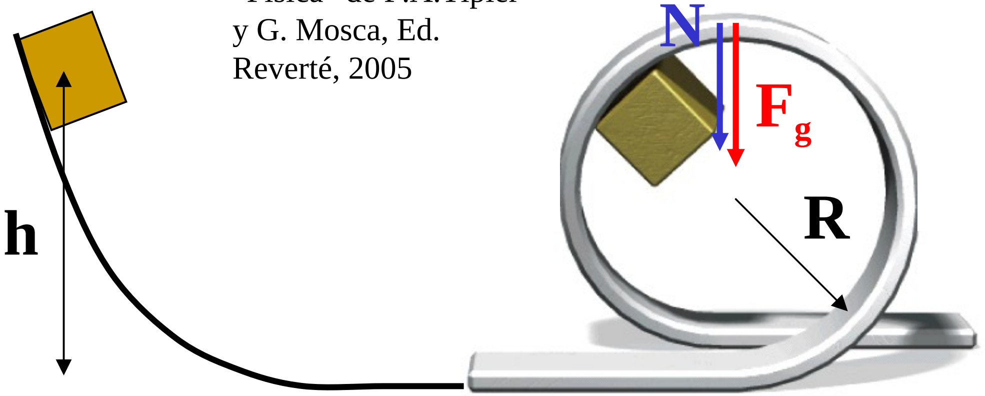
http://www.wfu.edu/physics/demolabs/demos/avimov/mechanics/rollercoaster/rollercoaster.MPG

http://www.wfu.edu/physics/demolabs/demos/avimov/mechanics/rollercoaster/rollercoaster.rm

http://www.wfu.edu/physics/demolabs/demos/avimov/mechanics/loop_de_loop/loop.mpg

http://www.wfu.edu/physics/demolabs/demos/avimov/mechanics/loop_de_loop/loop.rm

EJEMPLO 3 **Problema 2.7 del boletín**



Conservación de la energía

$$\boxed{E=T+U=cte}$$

$$U_1 = U_2 + T_2$$

$$mgh = mg(2R) + \frac{1}{2}mv^2$$

$$mgh_{min} = mg(2R) + \frac{1}{2}mv^2_{min}$$

$$\boxed{h_{min} = \frac{5}{2}R}$$

$$\sum F = mg + \cancel{N} = ma_n = m\frac{v^2}{R} \longrightarrow v^2_{min} = gR$$

$$\boxed{0 \text{ para } v_{min}}$$

6. Potencial Unidimensional. Aproximación armónica o pequeñas oscilaciones

Chantal Ferrer Roca 2008

Sea U(x) unidimensional, (F conservativa)

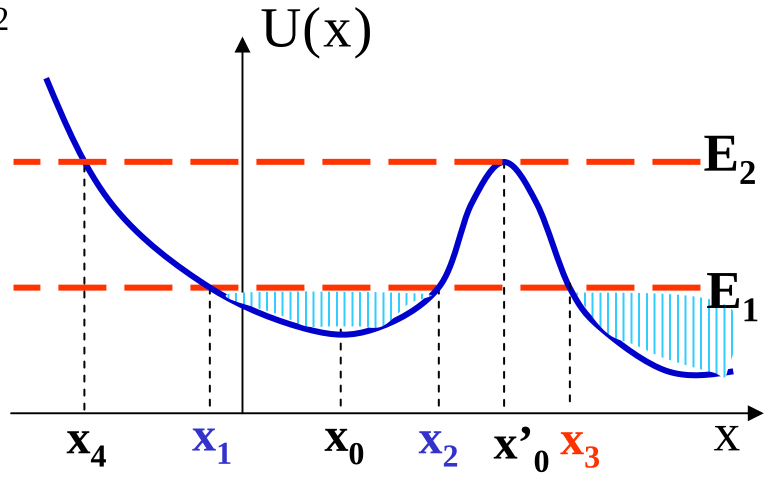
$$\boxed{E = T + U(x) = \text{cte}}$$

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

$$v(x) = \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}$$

$\dot{x}$ num. real

Análisis del movimiento: análisis del potencial ⟶



Movimiento posible $U(x) \leq E$ (para E_1 ||||||||||)

acotado: dos puntos de retorno (entre $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ para E_1)

abierto o no acotado: un punto de retorno (desde $\mathbf{x_3}$ a $+\infty$ para E_1)

Puntos de retorno $E = U(x)$ $\quad \dot{x} = 0$

Puntos de equilibrio $\dfrac{dU(x)}{dx} = U'(x) = 0$

(mín., ej. figura: $\mathbf{x_0}$) $\quad U''(x_0) > 0$ estable

(máx., ej. figura: $\mathbf{x'_0}$) $\quad U''(x'_0) < 0$ inestable

Si $E=U(x_0)$ NO hay movimiento

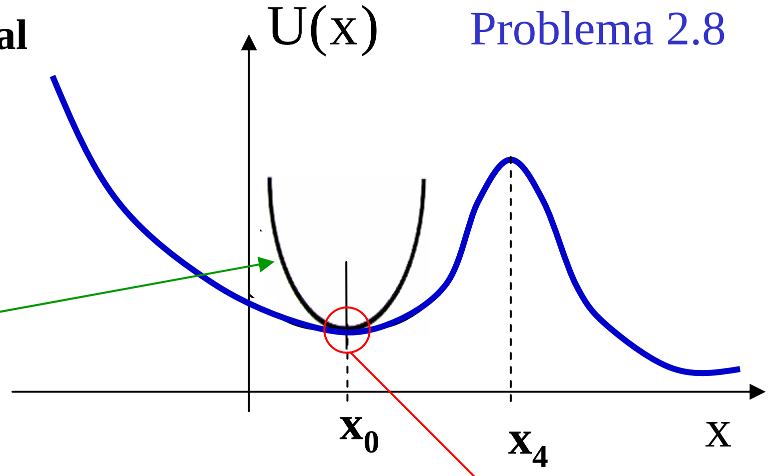
Ejemplo: analizar el movimiento en el potencial $V(x) = -\dfrac{a}{x} + \dfrac{b^2}{x^2}, \quad a, b > 0$

6. Potencial Unidimensional. Aproximación armónica o pequeñas oscilaciones

Cuestiones 25,26,27,28,29

Problema 2.8

Aproximación armónica: posible conocer la solución del movimiento en las proximidades de un mínimo del potencial



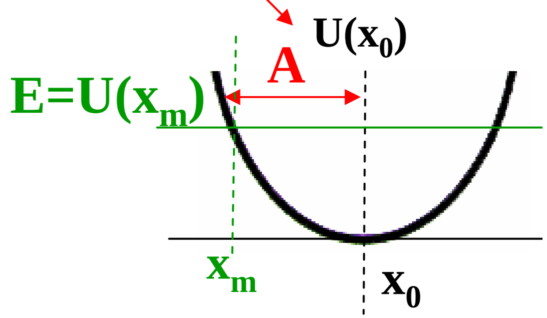
Desarrollo de Taylor de U(x) hasta segundo orden alrededor de un punto de equilibrio estable x_0 :

$$U(x) \approx U(x_0) + \underbrace{U'(x_0)}_{0}(x-x_0) + \frac{1}{2}U''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$m\ddot{x} = F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -U''(x_0)(x-x_0)$$

$$\ddot{x} + \frac{\overbrace{U''(x_0)}^{k>0}}{m}(x-x_0) = 0$$

Ec. mov. del O.A.S:



SOLUCIÓN $\quad x(t) - x_0 = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$\omega = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}}$$

Máximo desplazamiento

$$E = U(x_m)$$

$$E - U(x_0) = U(x_m) - U(x_0) \approx \frac{1}{2}k(x_m - x_0)^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

Esto ya se ha hecho en la resolución de algunos problemas al linearizar la ecuación diferencial del oscilador armónico ej: aproximación de péndulo simple).

SENCILLEZ: En el tema 6 veremos la utilidad de reducir un problema de potencial central a problema de potencial unidimensional.

Chantal Ferrer Roca 2008