Problemas de Mecánica y Ondas

2^o curso - Licenciatura en Física

Universitat de València

SEGUNDO CUATRIMESTRE

Profesores:
Gabriela Barenboim (Dep. Física Teórica)
Chantal Ferrer Roca (Dep. Física Aplicada)
Julio Pellicer Porres (Dep. Física Aplicada)
Jose A. Peñarrocha Gantes (Dep. Física Teórica)

8. Relatividad Especial

8.1 *a)* Para un observador *O* dos sucesos tienen lugar en el mismo sitio y se encuentran separados por un intervalo de tiempo de *4 s*. Calculad su separación para un observador *O'*, para el cual el intervalo temporal es de *6 s*. **b)** Para un observador *O* dos sucesos simultáneos ocurren a *600 Km* de distancia. Calculad la diferencia de tiempos entre estos dos sucesos para un observador *O'* que se mueve a velocidad *v* constante y que mide una separación espacial de *1200 km* al medirla. .***(solución:** a)* $\Delta x'=1.3 \cdot 10^{10}$ *m, b)* $\Delta t'=-3.5 \cdot 10^{-3}$ *s.).*

8.2 Un piloto en una nave espacial que viaja a una velocidad $v=0.6\ c$ pone en hora su reloj con otro terrestre al pasar junto a la Tierra a las *12 h*. Pasada media hora segun el reloj de la nave, ésta pasa por una estación espacial estacionaria respecto a la Tierra (relojes sincronizados con los de ésta). ¿Qué hora indica el reloj de la estación en ese instante?. ¿que distancia hay entre la estación y la Tierra según ambos sistemas de referencia?.

***(solución:** a)* $\Delta t'$ *=12 h, 37 min 30 s. b)*$\Delta x=v\ \Delta t=3.2 \cdot 10^{8}$ *km,* $\Delta x' =v\ \Delta t'=\gamma\, \Delta x =1.25 \cdot 3.24 \cdot 10^{8}$ *km* $=4 \cdot 10^{8}$ *km.).*

8.3 Una astronave parte de la Tierra con velocidad *3c/5*. Cuando un reloj de la misma indica que ha transcurrido una hora, ésta emite una señal luminosa hacia la Tierra. De acuerdo con los relojes terrestres **a)**¿Cuándo se emitió la señal?.y **b)** ¿Cuánto tiempo después de partir el cohete volvió la señal a la Tierra?.**c)** ¿Y según los relojes del cohete ?, **d)**¿Que relojes atrasan?, **e)** Están ligadas las respuestas b) y c) como los intervalos de tiempo propio e impropio? ***(solución**: a) 5/4 horas , b)2 horas, c) 5/2 horas, d) los que miden intervalos de tiempo propio, e)si).*

8.4 Se dice que un material tiene un índice de refracción *n*, con *n>1*, si la velocidad de la luz en el medio es *c/n*. Si una porción de material transparente, cuyo índice de refracción es *n*, se mueve a través del laboratorio con una velocidad *v*, y un destello se mueve en el material en la dirección de su movimiento, **a)** ¿Cuál es la velocidad del destello luminoso respecto al laboratorio?. Demostrar que está comprendida entre *c/n* y *c/n +v*. **b)** Si el vidrio es un medio de grosor *s*, calcular el tiempo que tarda el destello en atravesar el vidrio, utilizando la velocidad calculada en a) y la longitud del vidrio que se ve en el laboratorio. **c)** Calcular el tiempo que tarda el destello en cruzar el vidrio, calculando dicho tiempo en el sistema del vidrio y aplicando las transformaciones de Lorentz.**d)**¿Qué distancia separa en el laboratorio los puntos en que la luz entró y salió del vidrio?

***(solución**: a)* $\frac{c}{n}(1+\frac{nv}{c} \Big/ 1+\frac{v}{nc})$ *, b) y c)*$s\gamma(\frac{n}{c}+\frac{v}{c^2})$*, d)* $s\gamma(1+nb)$ *)*

8.5 Dos astronaves parten de la Tierra con la misma velocidad *0.9c* y forman ángulos iguales de 60^o con respecto a la dirección *x*. Hallar la velocidad relativa de las dos astronaves: **a)** en la Tierra; **b)** vista por una de ellas. **c)** si la velocidad de las astronaves fuera *v=0.1c*, ¿que porcentaje de error se comete en el cálculo de la componente *x* de la velocidad al aplicar la mecánica clásica en lugar de la relativista? ***(solución**: a)* $\sqrt{3} \cdot 0.9\ c$*, b)* $v_x=0.96\ c$*,* $v_y=0.24\ c$*, c) e=1%).*

8.6 La vida media propia de los muones es $t=2.2 \times 10^{-6}$ s. Supóngase que un gran grupo de dichos muones, producidos a una cierta altura de la atmósfera, se mueven hacia la superficie de la Tierra con una velocidad de *0.99c*. El número de colisiones en la atmósfera durante el descenso es pequeño. Si el *1%* de los que existían en el grupo original sobreviven y alcanzan la superficie terrestre, estimar la altura original. (En el sistema de referencia de los muones el número de los que sobreviven al cabo de un tiempo t viene dado por $N(t)=N_o\ e^{-t/t}$). ***(solución**:* h^a *= 22 km en el sist. lab.) .*

8.7 La energía radiante solar llega a la Tierra con un promedio de $1.4 \times 10^{6}\ erg/cm^2 s$. Si suponemos que toda esa energía proviene de la trasformación de masa en energía, calculad la cantidad de masa solar que se consume por unidad de tiempo y el tiempo de vida que le queda al sol, suponiendo que la tasa de consumo se mantiene constante. (M_s= 2 10^{30} kg, d=1.5 10^8 km, c=3·10^8 m/s). (***solución**: t=4.5·10^{20} s= 1.4·10^{13} años)* .

8.8 Un mesón K^+ en reposo se desintegra en dos piones según la reacción: $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^o$. **a)** ¿Cuál es la energía total de cada uno de los piones? ¿Y su energía cinética? **b)** Posteriormente el pión neutro se desintegra en dos fotones. ¿Cuales son las energías máxima y mínima de cada uno de los fotones?, ¿Qué ángulo forman en el laboratorio respecto a la dirección del movimiento del pión neutro cuando ambos se ven con la misma energía en este sistema? *(**solución**: a) E_{p° = 245.7 MeV, E_{p+} = 248.2MeV, b) E_{max}= 225.5 MeV, E_{min}= 20.3 MeV, θ_{lab}=33.3°).*

8.9 Un pión choca con un protón en reposo y produce un kaón neutro y una partícula lambda $\pi^- p \rightarrow K^o \Lambda^o$, ¿cuál es la energía mínima del pión para que la reación pueda tener lugar (o energía umbral)? *(**solución**: a) $E_{\pi^\circ} = ((m_\Lambda + m_K)^2 - m_p^2 - m_\pi^2)/2m_p$).*

8.10 En un experimento se observan las trazas mostradas en la *figura 14*: Se supone que se deben a una partícula que se desintegra en el vértice *A* dando lugar a tres partículas: un pión positivo y uno negativo, que se pueden observar al ser ionizantes, y otra partícula que se desintegra en el vértice *B* en dos fotones.

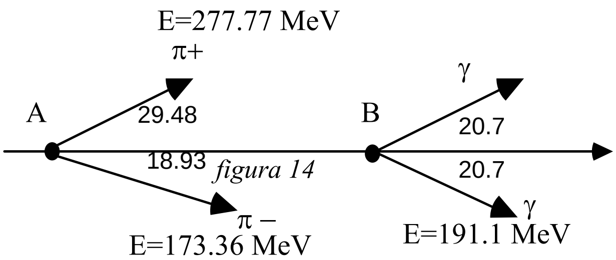


figura 14

a) ¿Qué partícula se desintegró en el vértice *B*? ¿Cuál era su dirección?.

b) ¿Qué partícula se desintegró en el vértice *A*?

c) ¿Que dirección tenía la partícula que se desintegró en el vértice *A*? *(**solución**: a) m_B= 135.1 pión neutro, b) m_A= 496.7 MeV, kaón neutro, c) θ_A= 7.28 °).*

9. Sistemas de referencia no inerciales

9.1 Una niña está montada en un caballito de tiovivo que se mueve arriba y abajo sinusoidalmente ($h=h_0 \sin\omega t$) con respecto a éste, que gira con velocidad angular constante Ω *(figura 15)*. Si la niña se encuentra a una distancia c del eje de rotación. a) encontrar la expresión de la velocidad y la aceleración relativas a un observador fijo en el suelo. b) expresar dichos vectores en coordenadas cilíndricas.

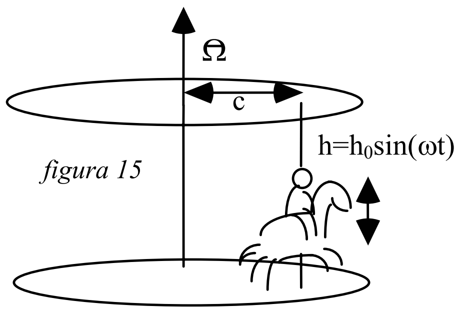


figura 15

*(**solución** $\bar{v}' = -c\Omega\sin\Omega t\,\bar{i}' + c\Omega\cos\Omega t\,\bar{j}' + h\omega\cos\omega t\,\bar{k}'$ y y $\bar{a}' = -c\Omega^2\cos\Omega t\,\bar{i}' - c\Omega^2\sin\Omega t\,\bar{j}' - h\omega^2\sin\omega t\,\bar{k}'$ ambos en la base del sistema inercial. b) $\bar{r}'_{cil} = c\bar{u}_r + h\sin\omega t\,\bar{u}_z$).*

9.2 Calculad la tensión y el ángulo que forma con la vertical una masa m que pende de un hilo sin masa, inextensible, de longitud l y que gira con velocidad angular constante ω alrededor de un eje perpendicular (péndulo cónico). (***solución:*** $T = m\omega^2 L$, $\cos\alpha = \dfrac{g}{\omega^2 L}$).

9.3 Una bola se mueve a lo largo del borde de una ruleta de radio *R* con velocidad constante *v* respecto a la misma, mientras la ruleta gira según un eje perpendicular a ella con velocidad angular ω y aceleración α de forma que se opone al movimiento de la bola. Hallad la velocidad y aceleración de la bola respecto al crupier. Si en un cierto instante la bola se desprende de la ruleta, ¿ en qué dirección lo hará ?. (***solución:*** $\vec{v} = (R\Omega - v)\vec{u}_\phi$, $\vec{a} = \left[(\omega + 2\Omega)v - \Omega^2 R\right]\vec{u}_r + \alpha R\vec{u}_\phi$).)

9.4 Una partícula describe un movimiento armónico simple a lo largo del eje x. Encontrar la posición, velocidad y aceleración con respecto a un sistema que gire con velocidad angular constante. *(**solución**: tomando x=Acoswt como solución del oscilador armónico en el sistema inercial,* $\bar{v} = -A\omega\sin\omega t\ \bar{i}' - A\Omega\cos\omega t\ \bar{j}'$ *y* $\bar{a} = -(\Omega^2+\omega^2)A\cos\omega t\ \bar{i}' + 2A\omega\Omega\sin\omega t\ \bar{j}'$ *, expresados ambos en función de los vectores base del sistema inercial).*

9.5 Estudiad el movimiento de una partícula de masa m en la superficie de la Tierra. Encontrar la expresión del peso aparente en un punto de la Tierra de latitud ϕ. Explicar por qué el plano de oscilación de un péndulo en la Tierra gira en función del tiempo (péndulo de Foucault). Estudiar dicho fenómeno. *(**solución**: libros de teoría del programa de la asignatura).*

9.6 En un punto de la superficie de la Tierra de latitud ϕ se lanza un proyectil en la dirección Norte con velocidad v_0 e inclinación α sobre la horizontal. Comprobad que el punto de impacto está desplazado hacia el Este una distancia d con respecto al lugar en el que caería si la tierra no girase a velocidad angular Ω, siendo d= $4\Omega v_0^3 \sin^2\alpha\ (3\cos\alpha\sin\phi - \sin\alpha\cos\phi)/3g^2$.

10. Sólido rígido

10.1 **a)** Calculad los tensores de inercia de una esfera, un disco, una varilla y un anillo, respecto a su centro de masas y respecto a un extremo. **b)**Calculad el tensor de inercia de un cilindro hueco, homogéneo, de masa m, altura h de radio interior a y radio exterior b respecto a su centro de masas. Calculad a partir de la expresión resultante los tensores de inercia de un cilindro macizo, un disco, una corona circular, una varilla y un anillo.

(solución: diag(I1,I2,I3), con $I_1 = I_2 = \frac{M}{4}(a^2+b^2+\frac{h^2}{3}), I_3 = \frac{M}{2}(a^2+b^2)$).

10.2 Calculad el tensor de inercia de **a)** un paralelepípedo rectangular de aristas *a, b, c* sabiendo que el origen de coordenadas coincide con un vértice. Tomar los ejes de coordenadas paralelos a las aristas. **b)** un cubo como caso particular del apartado anterior, **c)** de los sólidos anteriores pero respecto a un sistema paralelo al anterior y con origen en el centro de masas, aplicando el teorema de Steiner. ¿Cuántos sistemas de ejes propios ortogonales tiene el cubo?. **d)** del cubo alrededor de un eje que pase por dos vértices opuestos.

*(solución **: a)*** $\frac{I_{11}}{m} = \frac{b^2+c^2}{3}; \frac{I_{22}}{m} = \frac{a^2+c^2}{3}; \frac{I_{33}}{m} = \frac{a^2+b^2}{3}; \frac{I_{12}}{m} = \frac{-ab}{4}; \frac{I_{13}}{m} = \frac{-ac}{4}; \frac{I_{23}}{m} = \frac{-bc}{4}$ *);*
c) $I_1 = m\frac{b^2+c^2}{12}; I_2 = m\frac{a^2+c^2}{12}; I_{33} = m\frac{a^2+b^2}{12}$ *; **d)*** $I_1 = \frac{ma^2}{6}; I_2 = I_3 = ma^2\frac{11}{12}$ *).*

10.3 Usando la formulación lagrangiana, encontrad el período de oscilación de: a) el péndulo físico, b) un péndulo consistente en una lenteja esférica de radio ε sujeta a un hilo si masa. Comparar con el péndulo simple. *(**solución:*** $\omega = \sqrt{g/L_{eq}}$, a) $L_{eq} = I_{33}/Ma$, b) $L_{eq} = L(1+2\varepsilon^2/5L^2)$).

10.4 Un disco uniforme de masa M y radio R tiene adherida una masa puntual m a una distancia a del centro del mismo. Teniendo en cuenta que el disco rota sin deslizar, calculad la frecuencia de las oscilaciones pequeñas que se producirán alrededor de la posición de equilibrio en el seno de un campo gravitatorio.

(solución: $\omega^2 = mga \Big/ \left[m(R-a)^2 + \frac{3}{2}MR^2 \right]$).

10.5 Calculad, mediante la formulación lagrangiana, la aceleración de a) una polea libre b) las masas de una máquina de Atwood cuya polea es un disco de masa M y radio a. En este caso calculad las tensiones en la cuerda.
(solución: ***a)*** $\ddot{y} = mg/(m + I/a^2)$; ***b)*** $\ddot{y} = (m_1 - m_2)/(m_1 + m_2 + I/a^2)$***)***

10.6 Considérese el sistema formado por dos masas m fijas en los extremos de una varilla de longitud l y masa despreciable (*figura 16*). El sistema rota alrededor de un eje vertical con velocidad angular constante ω de modo que la varilla forma un ángulo constante con la vertical. Demostrad que el momento angular del sistema tiene por módulo $L=m\, l^2 \omega \sin\theta_0 /2$ y que describe un cono de ángulo $\pi/2-\theta_0$ alrededor de la vertical. Encontrad el momento externo necesario para mantener el sistema en movimiento y demostrad que su módulo es $N=ml^2\omega^2 \sin 2\theta_0/4$.

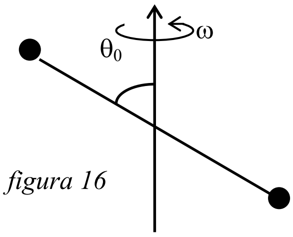


figura 16

10.7 Una placa plana, con forma de elipse de semiejes a y b gira con velocidad angular constante ω alrededor de un eje que forma un ángulo α con el eje x. Calcular: a) El vector momento cinético b) el momento que es necesario aplicar para que la velocidad angular permanezca constante. Suponer la placa homogénea con densidad superficial de masa σ. *(solución:* ***a)*** $\bar{L} = \frac{m}{4}(b^2\omega\cos\alpha\,\bar{i} + a^2\omega\cos\alpha\,\bar{j})$; **b)** $\bar{M} = \omega\frac{m}{4}\sin\alpha\cos\alpha\,(a^2 - b^2)\bar{k}$***)***

10.8 El extremo superior (A) de una barra cilíndrica homogénea de masa m, longitud $2l$ y radio R está apoyado sobre el eje z, mientras el extremo inferior (B) está apoyado sobre un punto del plano XY. Dicha barra cae por su peso manteniendo sus extremos apoyados, al tiempo que el extremo B puede girar en el plano XY. Encontrad las ecuaciones del movimiento mediante el formalismo lagrangiano.
(solución: p_ϕ=cte, $(ml^2 + I_1)\ddot{\theta} = \frac{1}{2}(ml^2 + I_1 - I_2)\dot{\phi}^2 \sin 2\theta + mgl\sin\theta$ *)*

11. Osciladores acoplados

11.1 Estudiad mediante el formalismo lagrangiano el péndulo doble (*figura 18*) para oscilaciones pequeñas. Considerad, finalmente, el caso con $m_1=m_2$ y $l_1=l_2$.

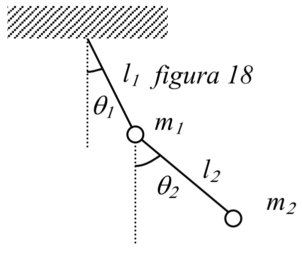


figura 18

11.2 Sean dos osciladores acoplados, de masa m, como los mostrados en la *figura 19*. Resolved las ecuaciones del movimiento y obtened los modos normales de vibración. Interpretadlos físicamente. Considerad que la longitud de los muelles destensados es nula, que los muelles inicial y final tienen sus extremos fijos y que no existe rozamiento. ***(solución:*** $\omega_1=\omega_0=(k/m)^{1/2}$; $\omega_2=\sqrt{3}\,\omega_0$; $x_1=A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)$; $x_2=A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)$*)*.

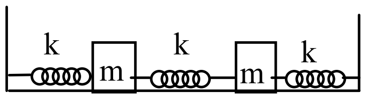


figura 19

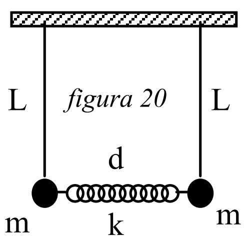


figura 20

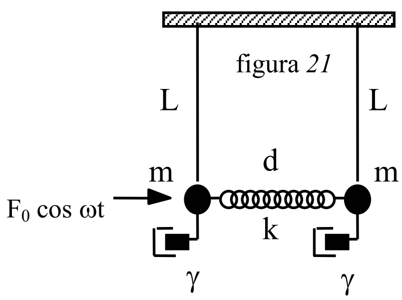


figura *21*

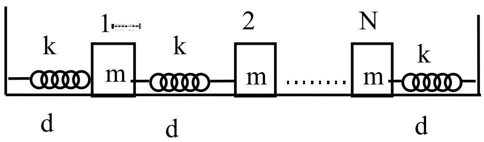
11.3 Encontrad las ecuaciones del movimiento de dos péndulos simples de longitud L y masa m, separados una distancia d y acoplados mediante un muelle sin masa y constante elástica k *(figura 20)*. Considérese la longitud del muelle destensado igual a d. Obtened los modos normales de vibración e interpretarlos físicamente.

(solución: $\omega_1=(g/l)^{1/2}$; $\omega_2=(2\omega_0^2+g/l)^{1/2}$; $\omega_0=(k/m)^{1/2}$; $\theta_1=A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)$; $\theta_2=A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)$*)*.

11.4 Sean dos péndulos idénticos de masa m y longitud L (*figura 21)*. Éstos están acoplados mediante un muelle de constante k y dotados de un amortiguador de factor γ. Hallad la solución general cuando se aplica una fuerza $F_O \cos \omega t$ al primer péndulo. Calculad la razón entre las amplitudes estacionarias de ambos péndulos cuando $\gamma=0$. Estudiad el comportamiento de dicha razón en función de la frecuencia ω de la fuerza aplicada. ***(solución:*** $\omega_1=(g/l)^{1/2}$; $\omega_2=(2\omega_0^2+g/l)^{1/2}$; $\omega_0=(k/m)^{1/2}$; $\theta_1=A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)$; $\theta_2=A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2)$*)*.

11.5 Sean N masas iguales acopladas por $N+1$ muelles idénticos y constante k, y separadas inicialmente por una distancia d (*figura 18)*. Resolved las ecuaciones del movimiento y calcular los modos normales de vibración en las mismas condiciones del ejercicio anterior. Considerar el caso $N \to \infty$. Definir una longitud de onda λ y considerar el caso contínuo en que $d<<\lambda$.

figura 22



(solución: $\psi_n=\sum_{m=1}^{N} A_m \sin(\frac{nm\pi}{N+1})\cos(\omega_m t+\alpha_m)$ $\qquad \omega_m=2\omega_0 \sin\frac{m\pi}{2(N+1)}$ *)*.

11.6 Considérese una cuerda muy tensa, de masa despreciable y tensión T_0 en la que hay intercaladas N cuentas iguales de masa m, separadas una distancia d (*figura 23)*. Calculad los modos normales de vibración del sistema en el caso en que los extremos están fijos. Despreciad el campo gravitatorio. Definid una longitud de onda cuando N es muy grande. Discutid la transición al caso contínuo en que d es muy pequeña comparada con la longitud de onda.

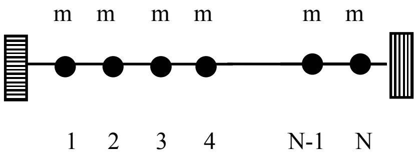


figura 23

13. Ondas

12.1 Escribid la función que describe a una onda que se propaga a lo largo de una cuerda si se mantienen fijos los extremos de ésta. Determinad las frecuencias propias de vibración.

12.2 Sea una cuerda de longitud L que tiene una densidad lineal σ y está sometida a una tensión T. En el instante $t=0$, la cuerda es pulsada en su parte central y se desplaza transversalmente de una cantidad h. Encontrar la función de ondas en un instante t cualquiera.

$$\textit{(solución: } \psi(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-)^k 8h}{(2k+1)^2\pi^2}\sin(\frac{(2k+1)\pi x}{L})\cos(\omega_{2k+1}t+\alpha_{2k+1})\ ;\ \omega_{2k+1}=\frac{(2k+1)\pi}{L}\sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}\ \textit{).}$$

12.3 Estudiad la tranmisión y reflexión de ondas transversales en el punto de unión de dos cuerdas de materiales diferentes.

12.4 Cuando se hacen palmas periódicamente, la presión que llega a nuestro oido se puede aproximar por un pulso cuadrado que se repite periódicamente. Considérese una perturbación *f(t)* periódica de anchura temporal Δt y altura unidad que se repite con período *T*, siendo $\Delta t \ll T$. Calcúlese la descomposición en armónicos de dicha perturbación y encuéntrese el intervalo de frecuencias relevantes y su relación con Δt. ***(solución:*** *$a_n=(2/n\pi)\sin(n\pi\Delta t/T)$, teorema del ancho de banda: $\Delta t\Delta\nu \approx 1$).*

12.5 Aplicando el principio de superposición hallad la onda resultante de otras dos ondas sinusoidales de frecuencias ν_1 y ν_2 muy parecidas ($\nu_1 \approx \nu_2$) y de la misma amplitud *A*.

(solución:

$$\psi(x,t) = A_m \cos(k_p x - \omega_p t); A_m = 2A\cos(k_m x - \omega_m t); \omega_p = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}; k_p = \frac{k_1+k_2}{2};$$
$$\omega_m = \frac{\omega_1-\omega_2}{2}; k_m = \frac{k_1-k_2}{2}$$

)

12.6 En la ionosfera la velocidad de fase de las ondas electromagnéticas está dada por la relación:

$$v_f^2 = c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2}$$

donde ω_p es la denominada frecuencia de plasma. Determinar la relación de dispersión así como la velocidad de grupo de las ondas en dicho medio.