TEMA 1. CINEMÁTICA DEL PUNTO MATERIAL

1. Introducción.
2. Sistema de referencia. Trayectoria, espacio recorrido y vector de posición de un punto
3. Velocidad y aceleración. Ejemplos de movimientos.
4. Aceleración normal y tangencial. Triedro de Frenet.
5. Posición, velocidad y aceleración de un punto en coordenadas no cartesianas: cilíndricas y esféricas.
6. Transformaciones galileanas.
7. Principio de Relatividad de Galileo.

APÉNDICE : Coordenadas curvilíneas

Bibliografía: [Marion], [AFinn], [Mec-Berk], [Rañada], [Griffiths]

Chantal Ferrer Roca 2008

TEMA 1. CINEMÁTICA DEL PUNTO MATERIAL

Chantal Ferrer Roca 2008

NOTA IMPORTANTE:

Los contenidos de este documento representan un esquema de los conceptos fundamentales del tema, por lo que en ningún caso se trata de apuntes completos. Este esquema se complementa con explicaciones, razonamientos, ejemplos y problemas que se desarrollan durante las clases, así como con alguno(s) de los libros que se incluyen en la bibliografía.

Bibliografía: [Marion], [AFinn], [Mec-Berk], [Rañada], [Griffiths]

1. Introducción

Chantal Ferrer Roca 2008

- Mecánica ➡ estudio del movimiento

  Cinemática (espacio y tiempo)

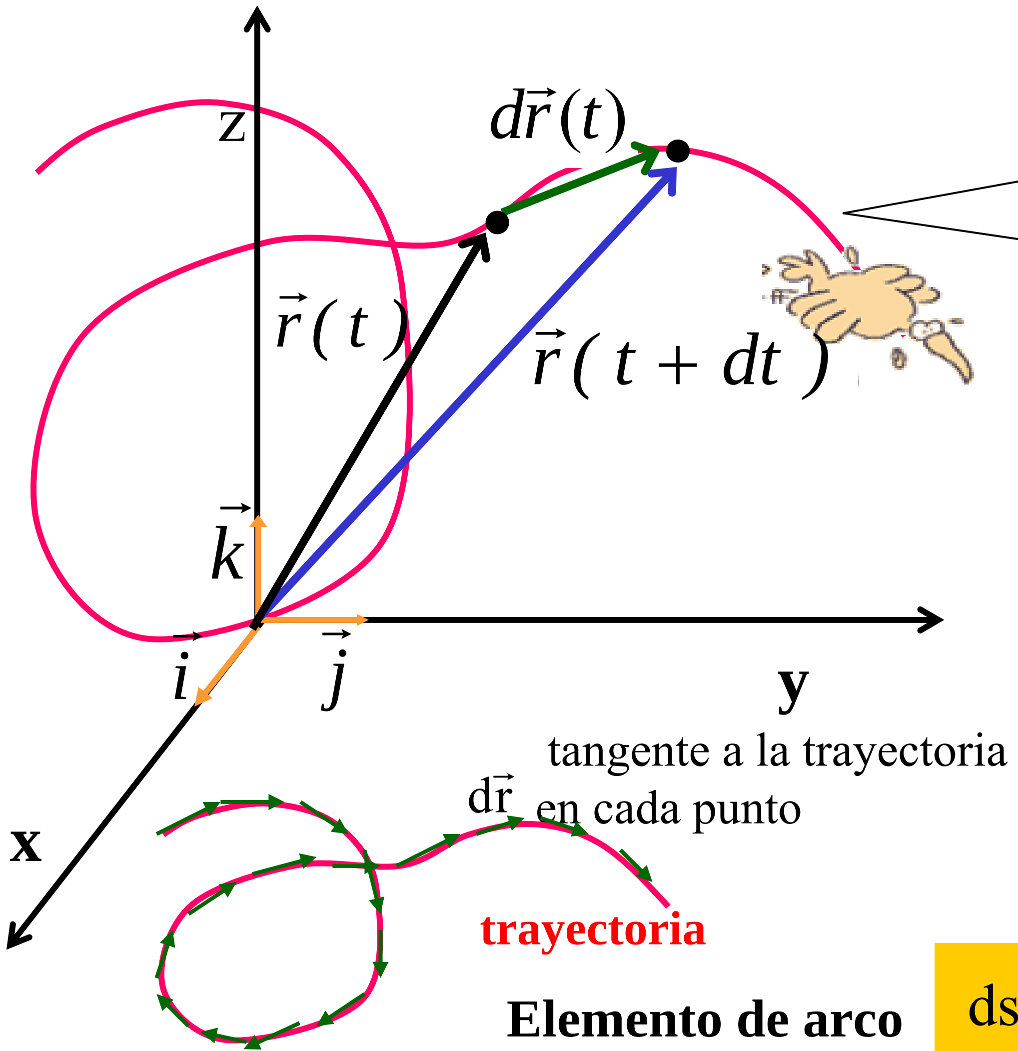
  Dinámica
  fuerzas y movimiento
  Predicción de posiciones

- Movimiento ➡ cambio de posición de un objeto

- Objeto ➡ modelo de partícula puntual

2. Trayectoria, espacio recorrido y vector de posición de un punto

Chantal Ferrer Roca 2008



TRAYECTORIA: conjunto de posiciones sucesivas que constituyen una curva contínua Γ en el espacio

•Vector de posición

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

• Desplazamiento infinitesimal o elemento de trayectoria

$$d\vec{r}(t) = dx(t)\vec{i} + dy(t)\vec{j} + dz(t)\vec{k}$$

Elemento de arco

$$ds = \left|d\vec{r}(t)\right| = \sqrt{dx(t)^2 + dy(t)^2 + dz(t)^2}$$

$$d\vec{r} = ds\frac{d\vec{r}(t)}{ds} = ds\,\vec{\tau}$$

• espacio recorrido:

$$e = \int_{\Gamma} ds$$

3. Velocidad y aceleración. Ejemplos de movimientos

Chantal Ferrer Roca 2008

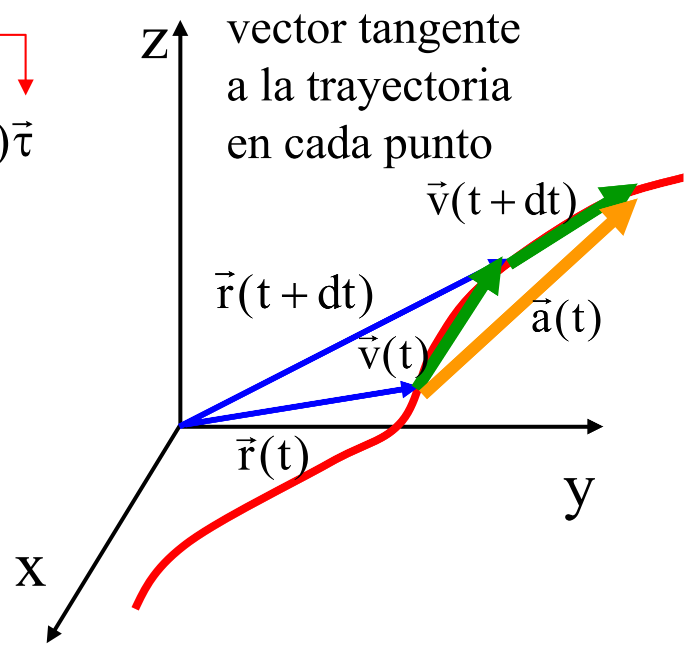
- **velocidad:** $\boxed{\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}}$ $= \dfrac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \dfrac{dz(t)}{dt}\vec{k} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$

Módulo: celeridad

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt}$$

¿Dirección?: demostrar

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = v(t)\vec{\tau}$$



$$\boxed{e = \int_\Gamma ds} = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt$$

- **aceleración:**

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}}$$

conocida $\vec{a} \xrightarrow[t_0]{\int^t \vec{a}\,dt} \vec{v}(t) \xrightarrow[t_0]{\int^t \vec{v}\,dt} \vec{r}(t)$

Cuestiones 1(a), 2(a,b),**7(a,b)**

Ejercicio 1: Considérese la trayectoria de un móvil $\vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$. Obtener la velocidad, la celeridad, el elemento de trayectoria, el elemento de arco, el espacio recorrido entre t=0 y t=1 (indicar), y la aceleración.

3. Velocidad y aceleración. Ejemplos de movimientos

Chantal Ferrer Roca 2008

MOVIMIENTOS 1D

- movimiento rectilíneo uniforme $\dot{x}(t) = v = cte$
- movimiento rectilíneo uniformemente acelerado $\ddot{x}(t) = a = cte$
- movimiento oscilatorio (oscilador armónico) $\ddot{x}(t) + ax = 0$
- movimiento circular uniforme de radio constante **¿2D?** (**EJERCICIO 2**)

MOVIMIENTOS 2D: Dos coordenadas independientes. Por ejemplo, composiciones de los anteriores (iguales o distintos)

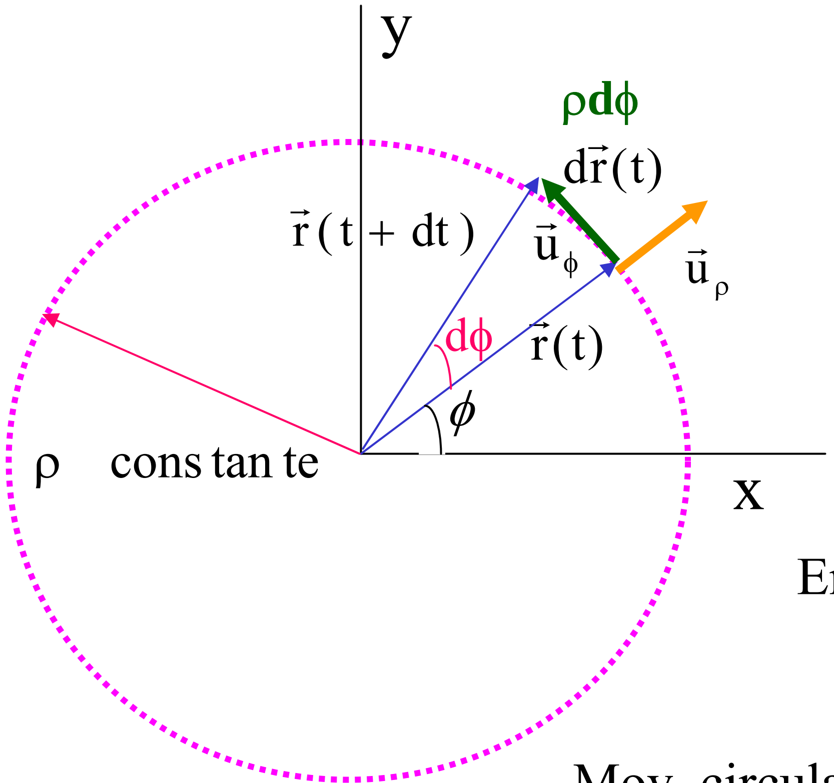
- Movimiento parabólico: mov. hor. uniforme, mov. vert. unif. acel. **(EJEMPLO 1)**
- Oscilador en 2D

MOVIMIENTOS 3D: Tres coordenadas independientes. composiciones de los anteriores (o de otros casos) para las tres direcciones del espacio.

Atención: no confundir el número de variables independientes del problema con la forma de la trayectoria

Chantal Ferrer Roca 2008

EJERCICIO 1 Movimiento circular uniforme. Calcular vector de posición, velocidad y aceleración



$$\omega = \text{cte} \qquad \mathbf{x} = \rho\cos\phi \qquad \mathbf{y} = \rho\sin\phi$$

$$\vec{r}(t) = \rho\vec{u}_\rho \qquad (x\vec{i} + y\vec{j} = \rho\cos\varphi\,\vec{i} + \rho\sin\varphi\,\vec{j})$$

$$d\vec{r}(t) = \rho d\phi\,\vec{u}_\phi \qquad \left[dx\,\vec{i} + dy\vec{j} = \rho\,(-\sin\phi\,\vec{i} + \cos\phi\,\vec{j})d\phi\right]$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \rho\dot{\phi}\,\vec{u}_\phi$$

En general (mov. circular)

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) =$$

Mov. circular uniforme (ω=cte) $\quad \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = -\rho\dot{\varphi}^2\vec{u}_r$

1 D (sólo cambia el ángulo con el tiempo)

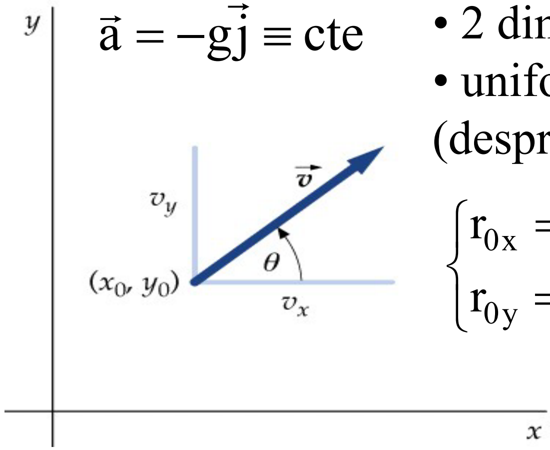
$$\phi(t) = \phi_0 + \omega t \qquad \phi(t) = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

3. Velocidad y aceleración. Tipos de movimiento

Chantal Ferrer Roca 2008 Domingo Martínez 2006

EJEMPLO 1 Movimiento parabólico (de cuerpos sobre la superficie terrestre)

$\vec{a} = -g\vec{j} \equiv cte$



- 2 dimensiones
- uniformemente acelerado (despreciando resistencia aire)

$$\begin{cases} r_{0x} = x_0 \\ r_{0y} = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

composición de movimientos ➡ $\begin{cases} \text{vertical: caída libre} \\ \text{horizontal: movimiento uniforme} \end{cases}$

Integrando: $\int_{t_0}^{t} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\cdot dt \qquad \int_{t_0}^{t} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\cdot dt$

Ejercicio:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= 0 \\ a_y &= -g \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\theta \\ v_y &= v_0 \operatorname{sen}\theta - gt \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x_0} + (v_0 \cos\theta)t \\ y &= y_0 + (v_0 \operatorname{sen}\theta)t - \tfrac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right\}$$

3. Velocidad y aceleración. Tipos de movimiento

Chantal Ferrer Roca 2008 Domingo Martínez 2006

ecuación de la trayectoria: $y = y(x)$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x_0} + (v_0 \cos\theta)t \\ y &= y_0 + (v_0 \mathrm{sen}\theta)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \end{aligned}\right\}$$

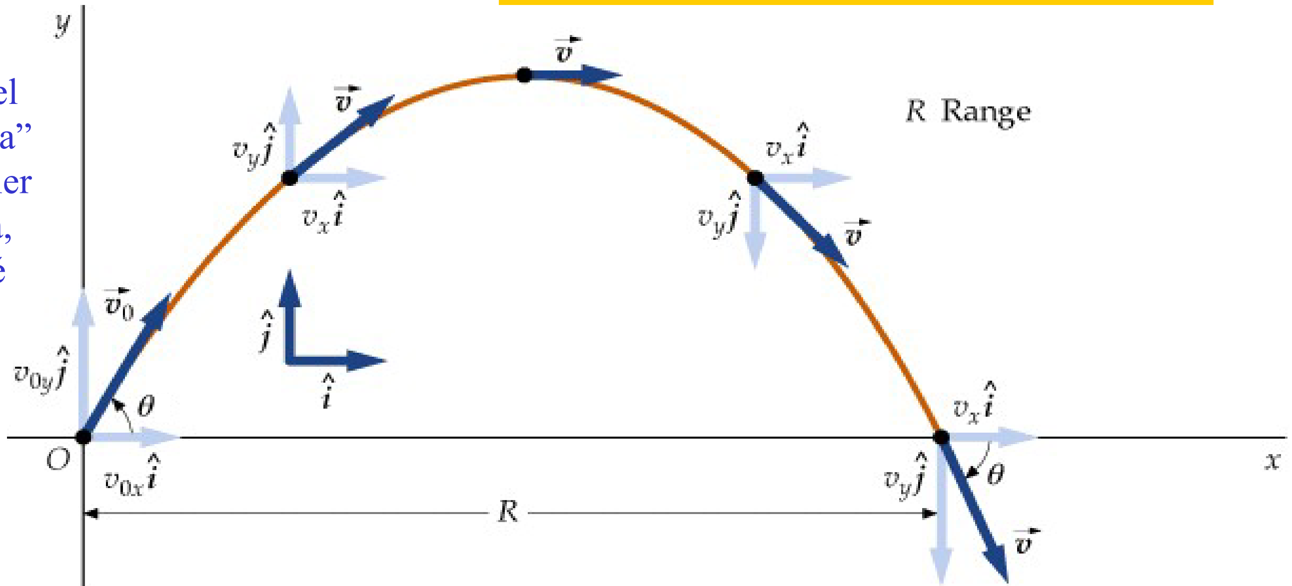
Obtener:

si $x_0 = y_0 = 0$
y eliminando t $\Rightarrow$

$$\boxed{y = (\mathrm{tg}\,\theta)x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}\right)x^2}$$

(parábola)

Fig. 3.31 del libro "Física" de P.A.Tipler y G. Mosca, Ed. Reverté



• alcance horizontal y(t)=0:

$$\boxed{R = \frac{v_0^2}{g}\mathrm{sen}2\theta}$$

$\Rightarrow$ R_{max} si $\theta = 45^o$

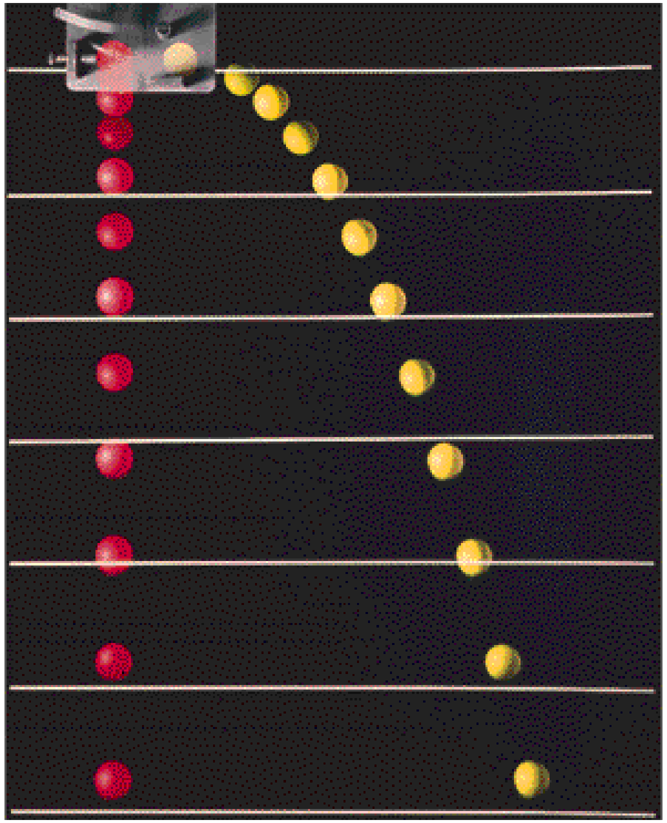
¡Ojo!, sólo si elevación inicial = final

Problema 1.7 boletín

Cuestión 3(a), 10

3. Velocidad y aceleración. Tipos de movimiento

Movimiento horizontal y vertical independientes



http://www.physics.brocku.ca/~edik/Wilson+Buffa/fg03_15b.gif

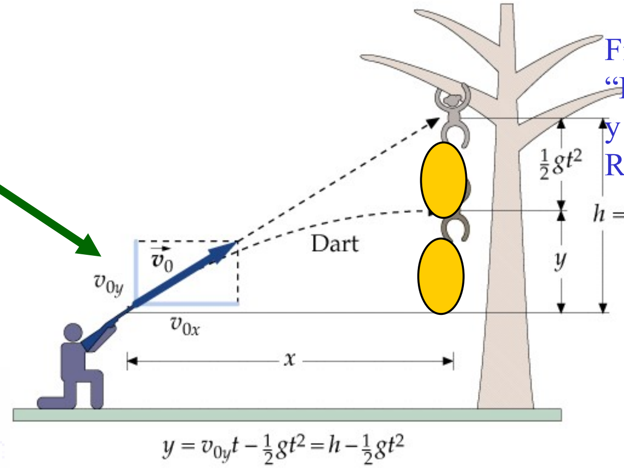


Fig. 3.12 del libro "Física" de P.A.Tipler y G. Mosca, Ed. Reverté, 2005

alcance horizontal para distintos ángulos

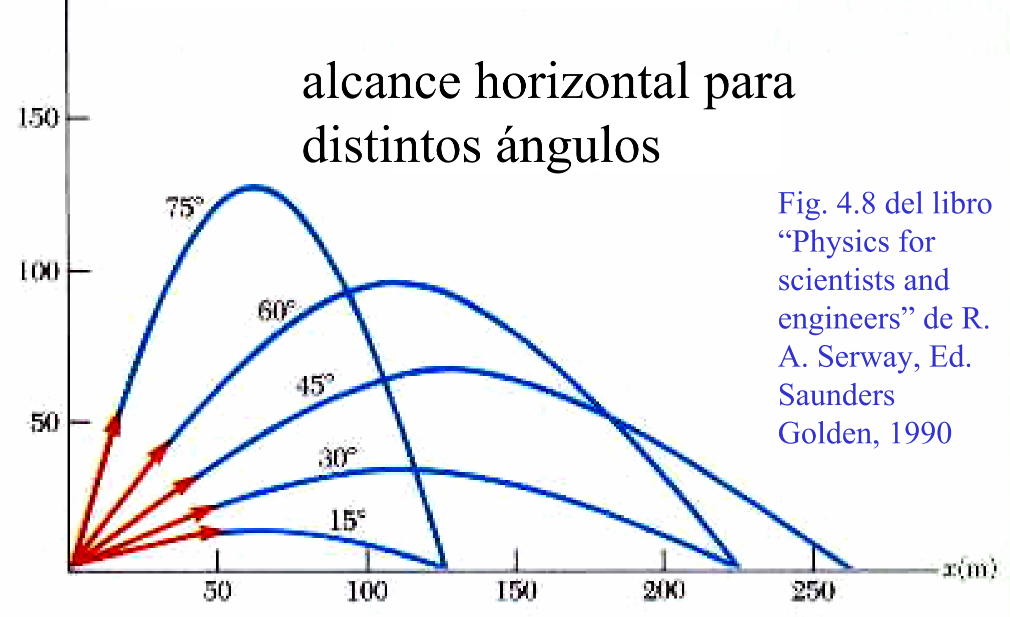


Fig. 4.8 del libro "Physics for scientists and engineers" de R. A. Serway, Ed. Saunders Golden, 1990

DEMO en clase: impacto simultáneo de dos bolas que caen, una lanzada con una velocidad horizontal inicial y la otra sin ella (como en fotografía estroboscópica)

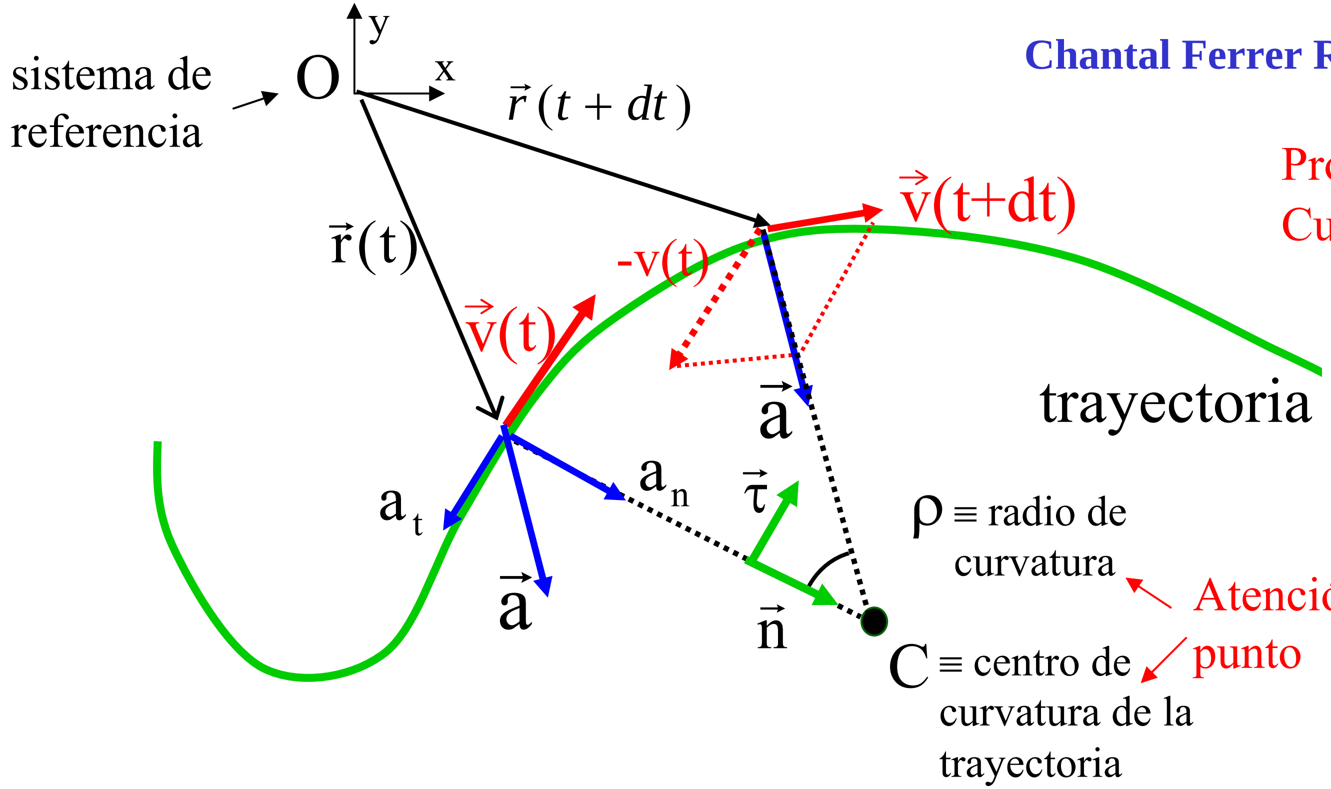
http://www.wfu.edu/physics/demolabs/demos/avimov/mechanics/monkey_and_hunter/monkey2.mpg

http://www.wfu.edu/physics/demolabs/demos/avimov/mechanics/simultaneous_fall/gravity.mpg

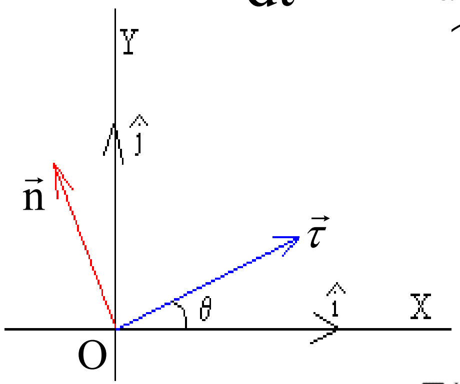
4. Aceleración normal y tangencial. Triedro de Frenet.

Chantal Ferrer Roca 2008

Problema 1.4 del boletín
Cuestiones 1, **2**, 3, **8**



$$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{d(v\vec\tau)}{dt} = \dot v\vec\tau + v\dot{\vec\tau} = a_t\vec\tau + a_n\vec n$$



$$\dot{\vec\tau} = \frac{d}{dt}(\cos\varphi\;\vec i + \sin\varphi\;\vec j) =$$

$$\dot\varphi(-\sin\varphi\;\vec i + \cos\varphi\;\vec j) = \dot\varphi\vec n = \frac{v}{\rho}\vec n$$

$$a_t = \dot v \quad ; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Acel. tangencial

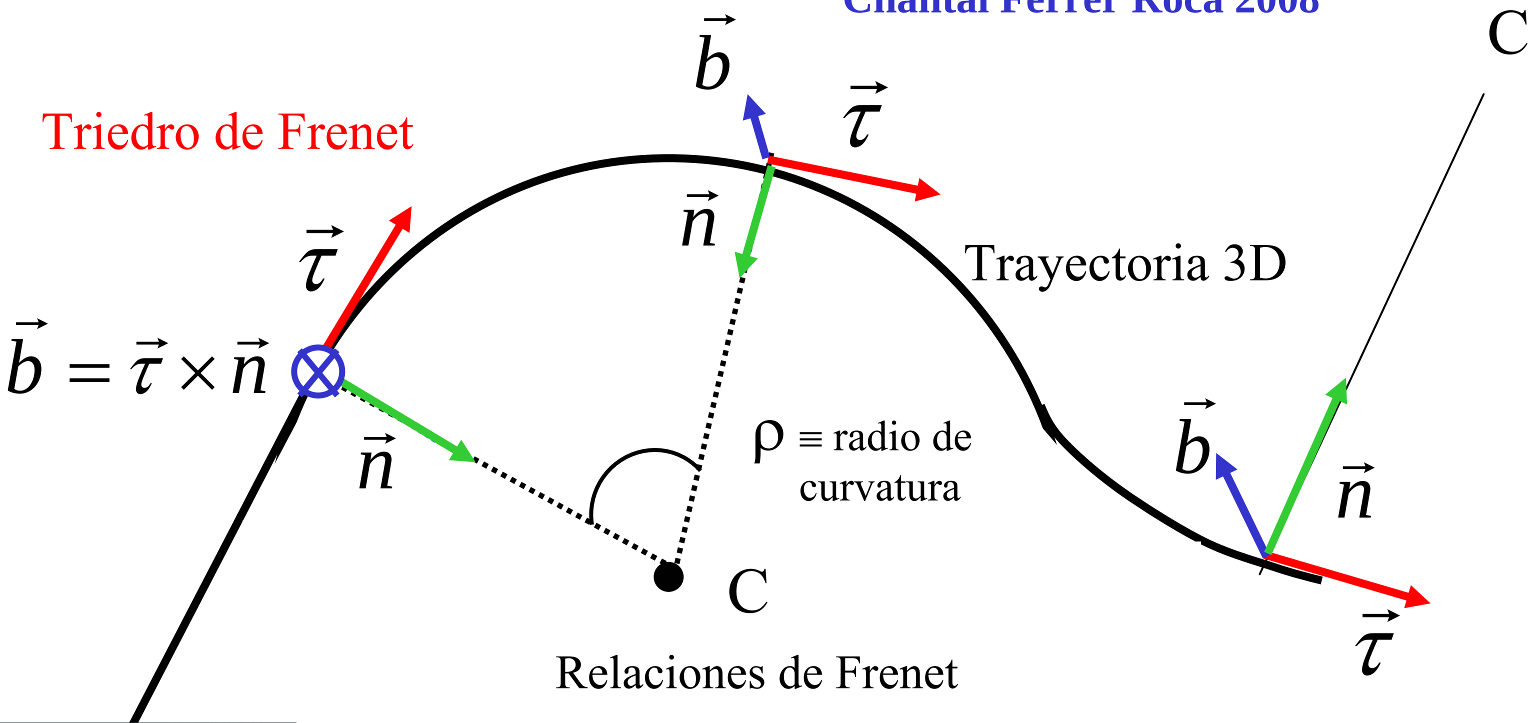
Acel. Normal (centrípeta)

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

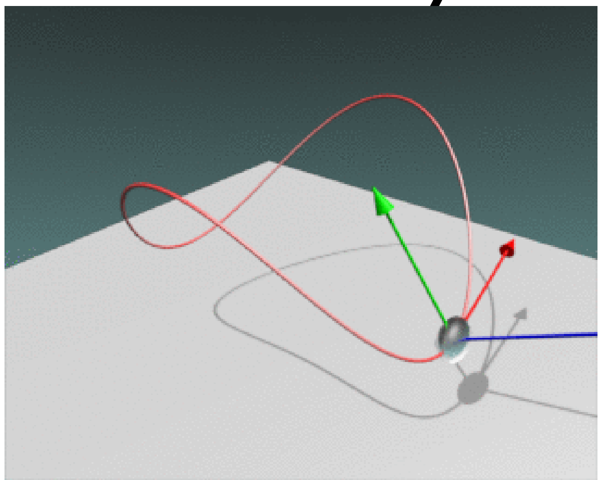
4. Aceleración normal y tangencial.Triedro de Frenet

Chantal Ferrer Roca 2008

Un sistema que se mueve con el punto



Relaciones de Frenet



a) $$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho} \qquad \dot{\vec{\tau}} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v(t)}{\rho}\vec{n} = \frac{ds}{dt}\frac{\vec{n}}{\rho}$$

b) $$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{\sigma}$$ σ radio de torsión $\quad \dfrac{1}{\sigma}$ torsión

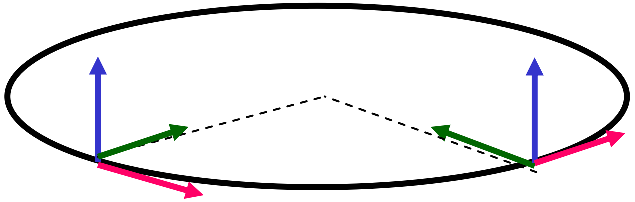
c) $$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{1}{\sigma}\vec{b} - \frac{1}{\rho}\vec{\tau}$$ **Ejercicio: Demostrar**

http://www.dm.univaq.it/corso/node47.html

4. Aceleración normal y tangencial.Triedro de Frenet

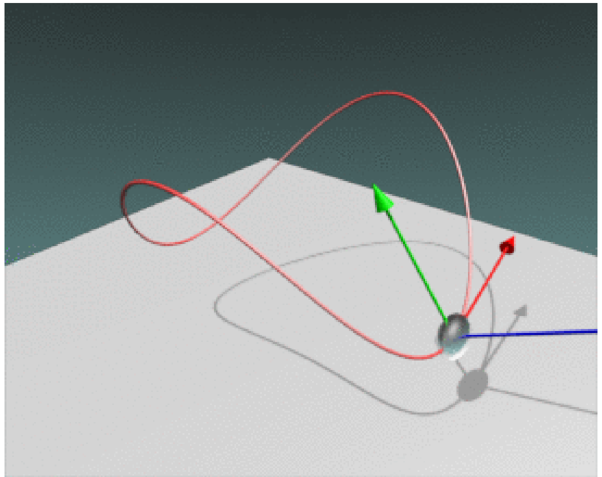
Chantal Ferrer Roca 2008

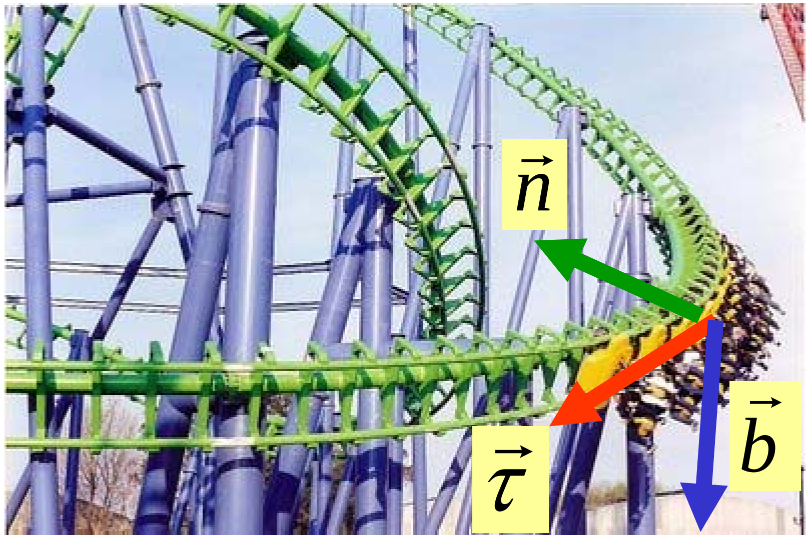
Trayectoria circular de radio a



$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho} = \frac{\vec{n}}{a} \qquad \sigma \to \infty, \quad \frac{1}{\sigma} = 0, \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = 0$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{1}{a}\vec{\tau}$$

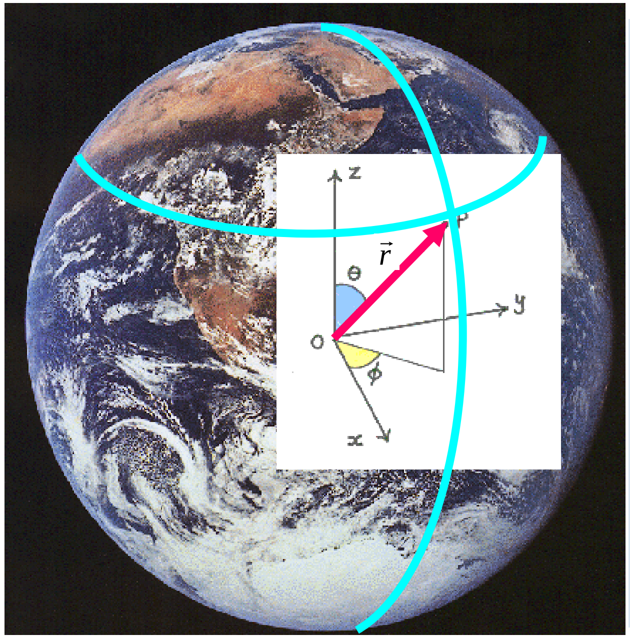


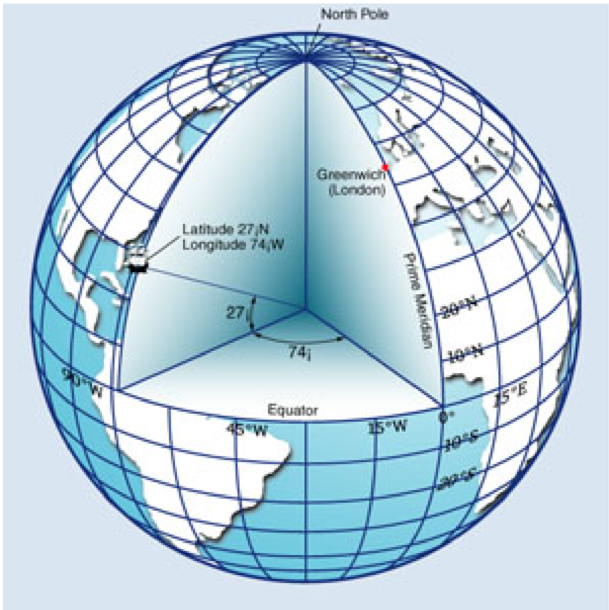


http://www.math.union.edu/~dpvc/talks/2000-11-23.MTCM/fframe.html

APÉNDICE : COORDENADAS CURVILÍNEAS

Chantal Ferrer Roca 2008



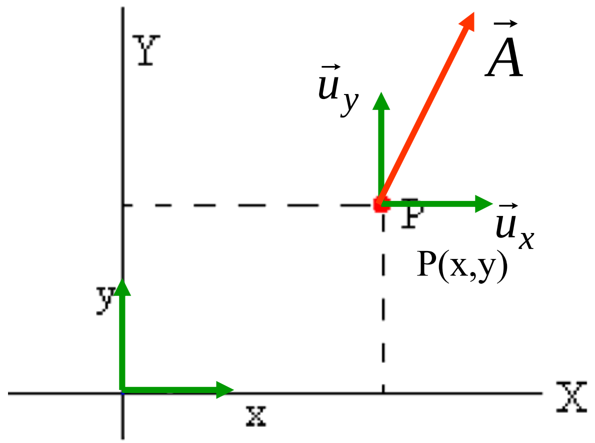


Las coordenadas esféricas se utilizaban en el siglo IV-III a.C., tanto para la determinación de posiciones estelares (por ejemplo, catalogación estelar de Hiparco) como de longitud y latitud sobre la superficie terrestre (por ejemplo, Geografía Física de Eratóstenes)

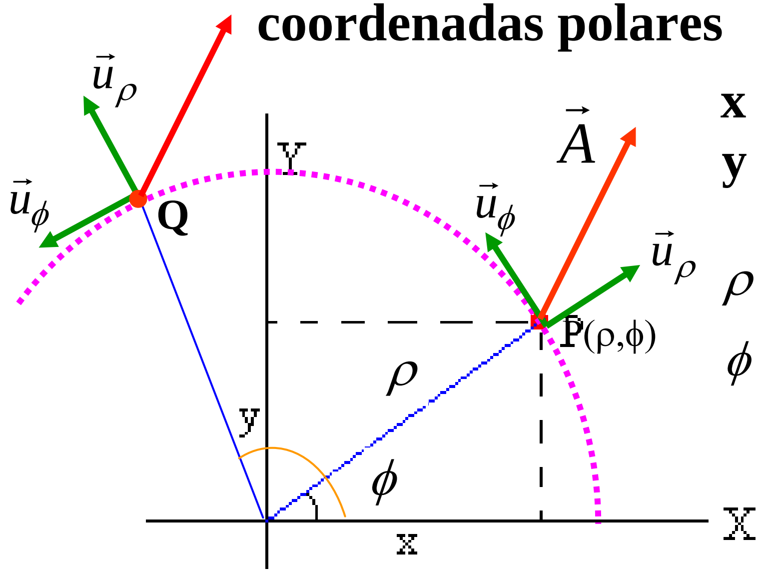
INTRODUCCIÓN A LAS COORDENADAS CURVILÍNEAS: POLARES

Chantal Ferrer Roca 2008

coordenadas cartesianas



coordenadas polares



$$\mathbf{x} = \rho \cos\phi$$
$$\mathbf{y} = \rho \sin\phi$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\phi = tg^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\vec{A} = A_x\vec{u}_x + A_y\vec{u}_y$$

?

vectores unitarios base

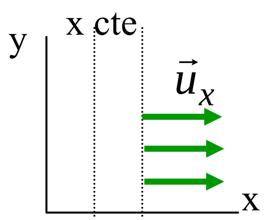
$$\vec{A} = A_\rho\vec{u}_\rho + A_\phi\vec{u}_\phi$$

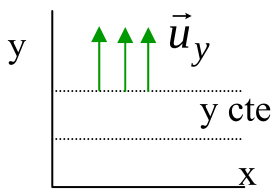
$\vec{u}_x$: ⊥ a las líneas de x cte.
sentido: incremento de x

$\vec{u}_y$: ⊥ a las lineas de y cte.
sentido: incremento de y

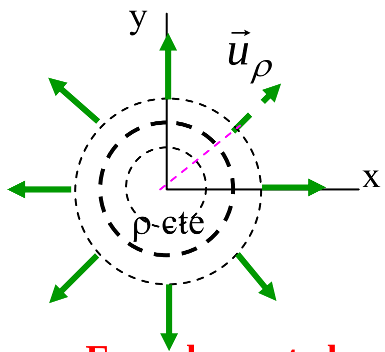
$\vec{u}_\rho$: ⊥ a las líneas de ρ cte.
sentido: incremento de ρ

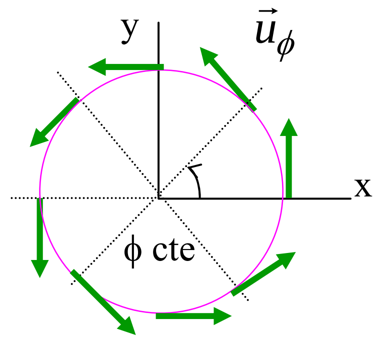
$\vec{u}_\phi$: ⊥ a las líneas de φ cte.
sentido: incremento de φ





En todos los puntos los vectores unitarios tienen la misma dirección



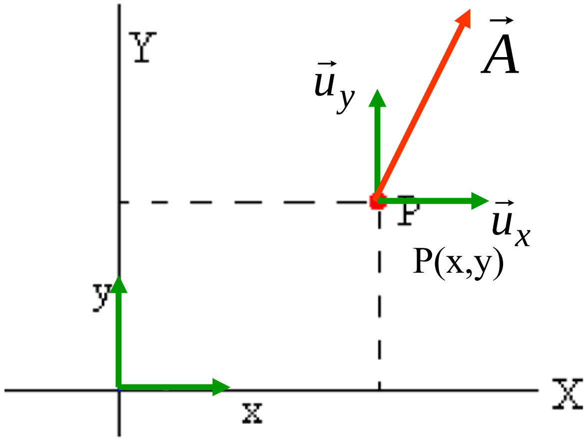


En cada punto los vectores unitarios tienen dirección diferente

INTRODUCCIÓN A LAS COORDENADAS CURVILÍNEAS: POLARES

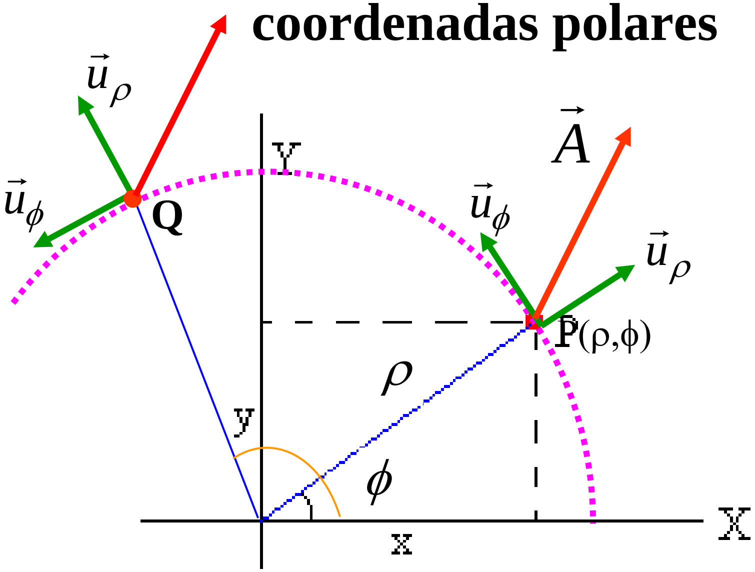
Chantal Ferrer Roca 2008

coordenadas cartesianas



En todos los puntos los vectores unitarios tienen la misma dirección

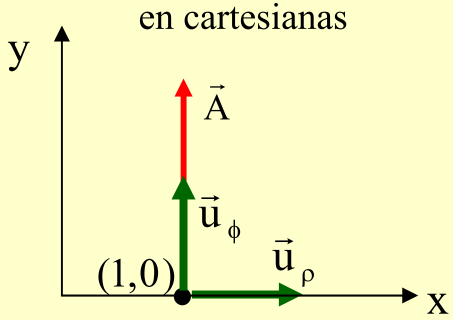
coordenadas polares



En cada punto los vectores unitarios tienen dirección diferente

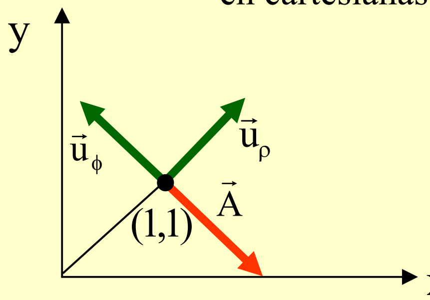
Ejemplos 2

$\vec{A} = (0, 2)$ En el punto (1,0) en cartesianas



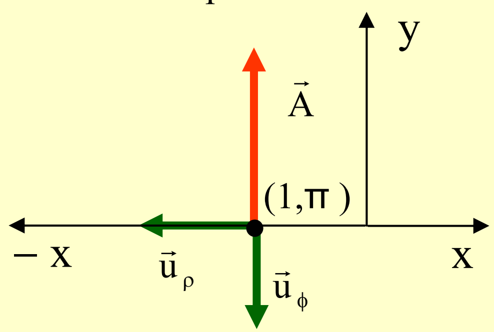
$\vec{A} = (0,2) = 2\vec{u}_\phi$ En polares

$\vec{A} = (1,-1)$ En el punto (1,1) en cartesianas



$\vec{A} = (0,-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}\vec{u}_\phi$ En polares

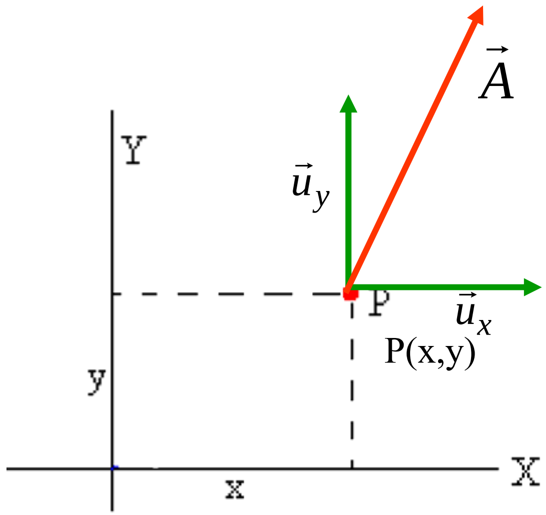
$\vec{A} = (0,-2)$ En el punto (1,π) en polares



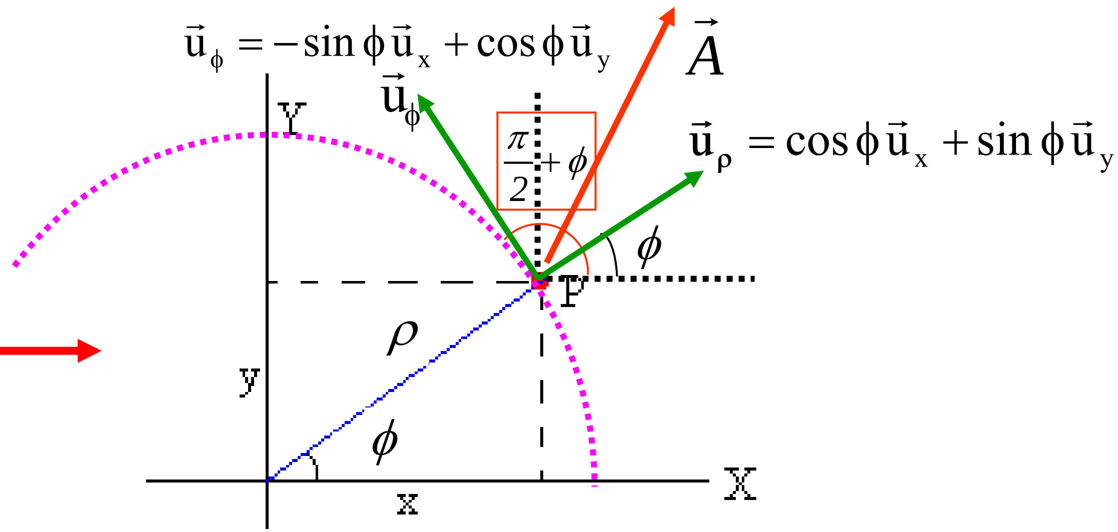
$\vec{A} = (0,2) = 2\vec{j}$ En cartesianas

INTRODUCCIÓN A LAS COORDENADAS CURVILÍNEAS: POLARES

coordenadas cartesianas



coordenadas polares



$$\vec{A}_{car} = A_x\vec{u}_x + A_y\vec{u}_y$$

$$\vec{A}_{pol} = A_\rho \underbrace{\vec{u}_\rho}_{\cos\phi\,\vec{u}_x + \sin\phi\,\vec{u}_y} + A_\phi \underbrace{\vec{u}_\phi}_{-\sin\phi\,\vec{u}_x + \cos\phi\,\vec{u}_y}$$

$$\vec{A}_{pol} = (A_\rho\cos\phi - A_\phi\sin\phi)\,\vec{u}_x + (A_\rho\sin\phi + A_\phi\cos\phi)\,\vec{u}_y$$

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}}_{T^{-1} = T^{T}} \begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\phi \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}_\rho \\ \vec{u}_\phi \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{A}_{car} = T^{-1}\vec{A}_{pol}}$$

$$\boxed{\vec{A}_{pol} = T\,\vec{A}_{car}}$$

Chantal Ferrer Roca 2008

INTRODUCCIÓN A LAS COORDENADAS CURVILÍNEAS: POLARES

Chantal Ferrer Roca 2008

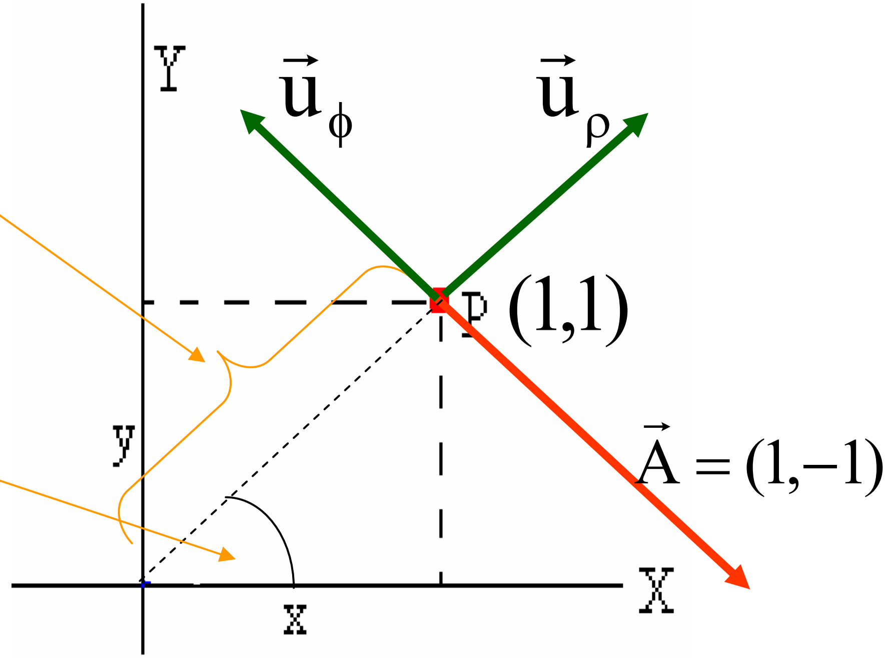
Ejemplo 3: (Problema 1.1 b) boletín)

El vector (1,-1) está aplicado en el punto (1,1), ambos en cartesianas. Escribid el vector en coordenadas polares

Geométricamente: es fácil ver que en el punto P (1,1) el vector (1,-1) tiene dirección u_ϕ (y sentido opuesto), sin realizar una transformación de las coordenadas.

$$P\,(x=1, y=1) \longrightarrow \rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}$$

$$\phi = \mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x} = \mathrm{tg}^{-1} 1 = 45^o$$



$$\vec{\mathbf{A}}_{\mathbf{pol}} = \begin{pmatrix} A_\rho \\ A_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^o & \sin 45^o \\ -\sin 45^o & \cos 45^o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -\sqrt{2}\,\vec{u}_\phi$$

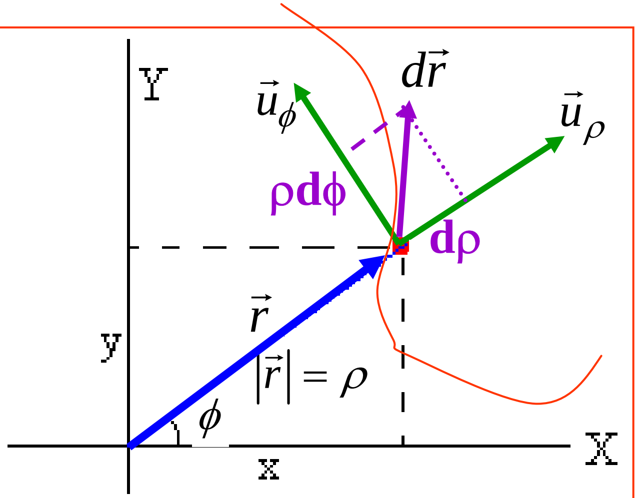
INTRODUCCIÓN A LAS COORDENADAS CURVILÍNEAS: POLARES

Chantal Ferrer Roca 2008

vector de posición del punto P(x,y,z)

$$\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{car}} = (x,y) = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y = \rho\cos\phi\,\vec{u}_x + \rho\sin\phi\,\vec{u}_y$$

$$\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{pol}} = (\rho,0) = \rho\vec{u}_\rho$$



elemento de trayectoria (geométricamente)

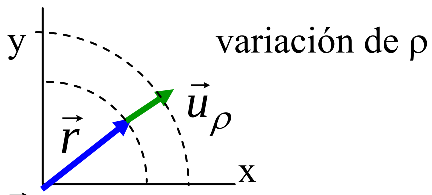
$$\mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{car}} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y \qquad \mathbf{d}\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{pol}} = d\rho\,\vec{u}_\rho + \rho\,d\phi\,\vec{u}_\phi$$

variación de la distancia radial

variación del elemento de arco

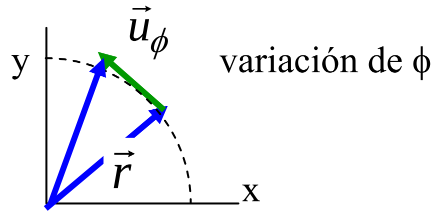
mismos resultados usando la matriz T

Obtención analítica de los vectores unitarios



$$\frac{d\vec{r}}{d\rho} = \cos\phi\,\vec{u}_x + \sin\phi\,\vec{u}_y = \vec{u}_\rho$$

$$\vec{u}_\rho = \frac{d\vec{r}}{d\rho} = \underbrace{\frac{1}{|d\vec{r}/d\rho|}}_{h_\rho}\frac{d\vec{r}}{d\rho}$$



$$\frac{d\vec{r}}{d\phi} = \rho(-\sin\phi\,\vec{u}_x + \cos\phi\,\vec{u}_y) = \rho\vec{u}_\phi$$

$$\vec{u}_\phi = \frac{1}{\rho}\frac{d\vec{r}}{d\phi} = \underbrace{\frac{1}{|d\vec{r}/d\phi|}}_{h_\phi}\frac{d\vec{r}}{d\phi}$$

COORDENADAS CURVILÍNEAS- GENERALIZACIÓN

Chantal Ferrer Roca 2008

Curvilíneas q_1, q_2, q_3

sistema de coordenadas

$$\begin{Bmatrix} x = f_1(q_1, q_2, q_3) \\ y = f_2(q_1, q_2, q_3) \\ z = f_3(q_1, q_2, q_3) \end{Bmatrix}$$

vectores unitarios

$$\vec{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}; \quad \mathbf{h}_{\mathbf{i}} = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right|;$$

matriz de transformación cart-curv

$$T = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \end{pmatrix}$$

elemento de línea

$$\mathbf{d\vec{r}} = h_1 dq_1 \vec{u}_1 + h_2 dq_2 \vec{u}_2 + h_3 dq_3 \vec{u}_3$$

Ejemplo: coordenadas polares

$$\mathbf{x} = \rho \cos\phi \qquad q_1 = \rho$$

$$\mathbf{y} = \rho \sin\phi \qquad q_2 = \phi$$

$$\vec{u}_\rho = \frac{d\vec{r}}{d\rho} = \underbrace{\frac{1}{|d\vec{r}/d\rho|}}_{h_\rho}\frac{d\vec{r}}{d\rho}$$

$$\vec{u}_\phi = \frac{1}{\rho}\frac{d\vec{r}}{d\phi} = \underbrace{\frac{1}{|d\vec{r}/d\phi|}}_{h_\phi}\frac{d\vec{r}}{d\phi}$$

$$T = \begin{pmatrix} \vec{u}_\rho \\ \vec{u}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

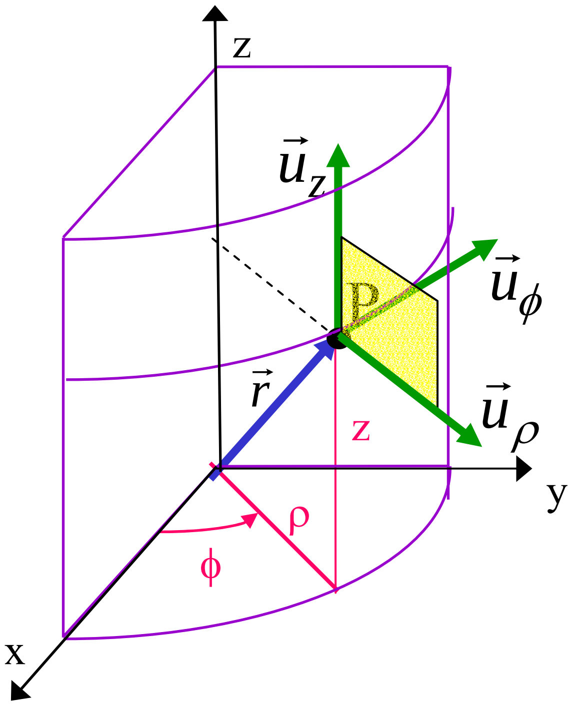
$$\mathbf{d\vec{r}} = d\rho\, \vec{u}_\rho + \rho\, d\phi\, \vec{u}_\phi$$

- Si la coordenada q_i es una distancia, $h_i = 1$
- Si la coordenada q_i es un ángulo, h_i es la cantidad que lo transforma en una distancia de arco $h_i\, dq_i$.

COORDENADAS CILÍNDRICAS

Chantal Ferrer Roca 2008

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_\rho = 1 \\ \mathbf{h}_\phi = \rho \\ \mathbf{h}_\mathbf{z} = 1 \end{bmatrix}$$

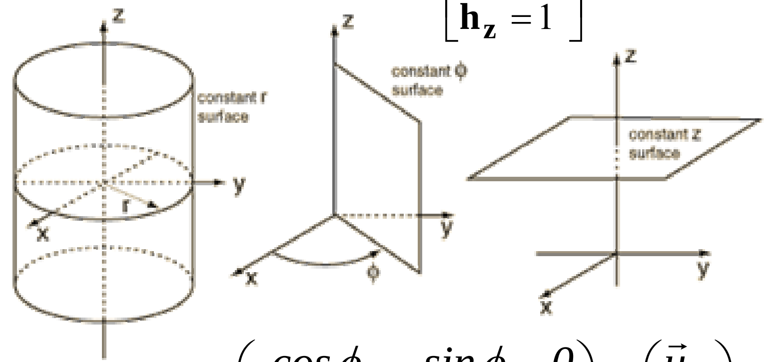


$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} = \rho \cos\phi \\ \mathbf{y} = \rho \ \sin\phi \\ \mathbf{z} = z \end{array} \right\}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = tg^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\mathbf{z} = z$$



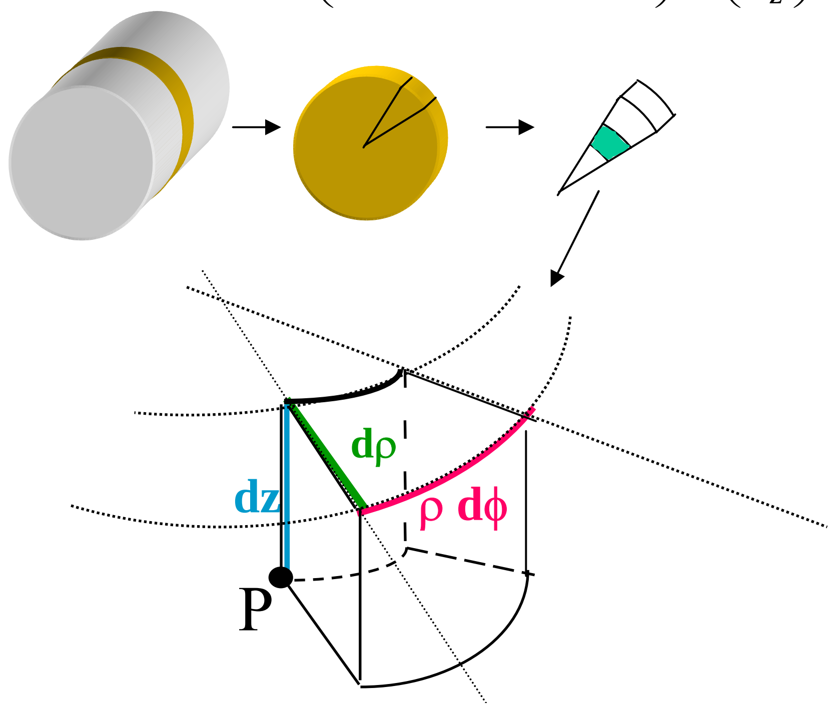
vectores unitarios

$$\mathbf{T}_{\mathbf{cil}} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}_\rho \\ \vec{u}_\phi \\ \vec{u}_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{r}} = \rho\vec{\mathrm{u}}_\rho + z\vec{\mathrm{u}}_z$$

$$\mathbf{d}\vec{\mathbf{r}} = d\rho\,\vec{u}_\rho + \rho\,d\phi\,\vec{u}_\phi + dz\,\vec{u}_z;$$

$$\mathbf{ds} = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\phi)^2 + (dz)^2}$$



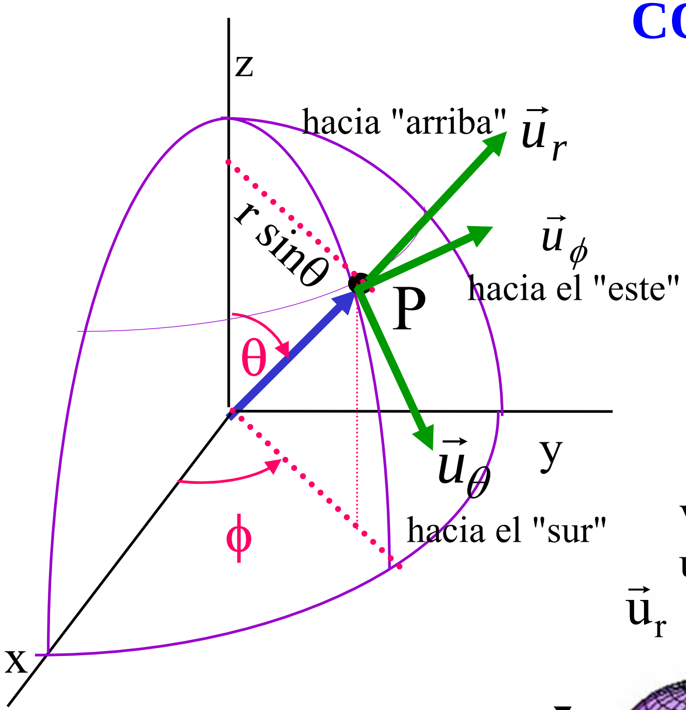
Problema 1.1, 1.3 boletín

Cuestiones **1.4**, **1.9**

COORDENADAS ESFÉRICAS

Chantal Ferrer Roca 2008

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h_r} = 1 \\ \mathbf{h}_\theta = r \\ \mathbf{h}_\phi = r\sin\theta \end{bmatrix}$$

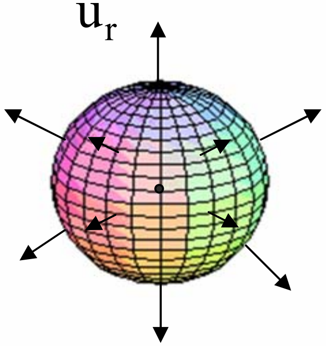


$$\begin{cases} \mathbf{x} = r\sin\theta\cos\phi \\ \mathbf{y} = r\sin\theta\sin\phi \\ \mathbf{z} = r\cos\theta \end{cases} \qquad \mathbf{r} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

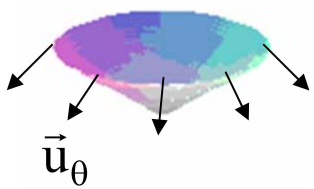
$$\theta = \cos^{-1}\frac{z}{r};\ \phi = tg^{-1}\frac{y}{x} \qquad \theta\in[0,\pi],\quad \phi\in[0,2\pi]$$

vectores unitarios

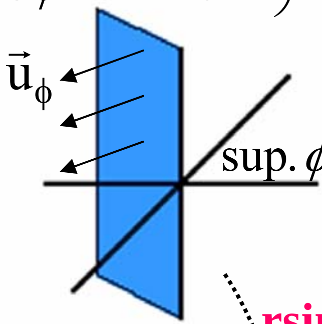
$$\mathbf{T_{esf}} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{u}_\theta \\ \vec{u}_\phi \end{pmatrix}$$



sup. $r = cte$



sup. $\theta = cte$

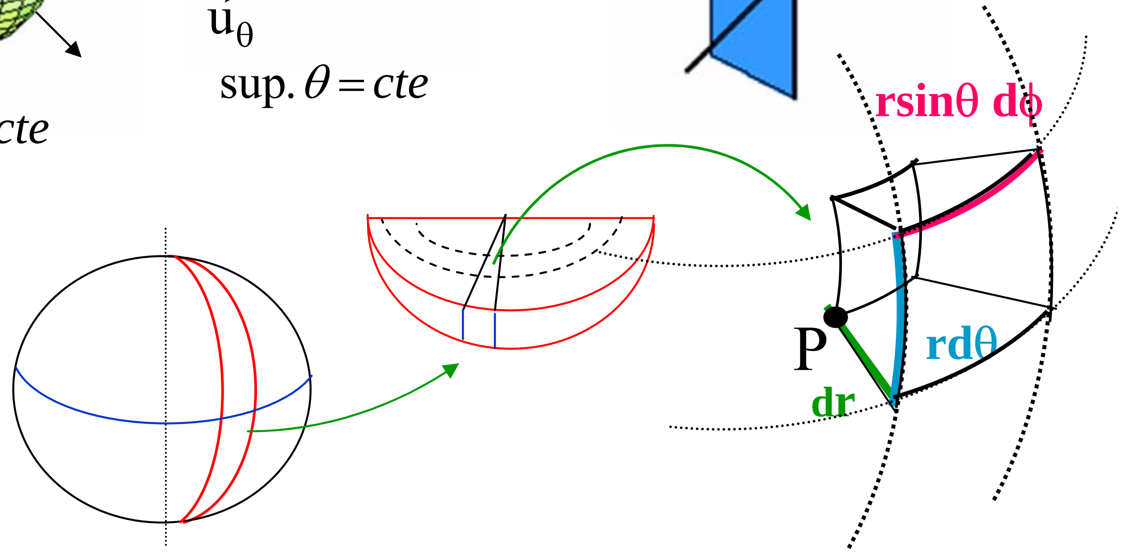


sup. $\phi = cte$

$$\vec{\mathbf{r}} = r\vec{u}_r$$

$$\mathbf{d\vec{r}} = dr\ \vec{u}_r + r\ d\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta\ d\phi\ \vec{u}_\phi;$$

$$\mathbf{ds} = \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2 + (r\sin\theta d\phi)^2};$$



Problema 1.2, 1.3 boletín

Cuestiones 5, **6**

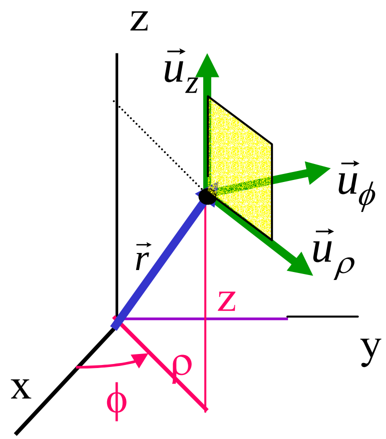
5. Posición, velocidad y aceleración de un punto en coordenadas cilíndricas y esféricas.

Chantal Ferrer Roca 2008

cilíndricas

$$\dot{\vec u}_\rho = \frac{d}{dt}(\cos\phi\,\vec i + \sin\phi\,\vec j) = \dot\phi\,\vec u_\phi$$

$$\dot{\vec u}_\phi = \frac{d}{dt}(-\sin\phi\,\vec i + \cos\phi\,\vec j) = -\dot\phi\,\vec u_\rho$$



$$\vec{\mathbf r} = \rho\vec u_\rho + z\vec u_z$$

$$\vec{\mathbf v} = \dot{\vec r} = \dot\rho\,\vec u_\rho + \rho\,\dot{\vec u}_\rho + \dot z\,\vec u_z = \dot\rho\,\vec u_\rho + \rho\dot\phi\,\vec u_\phi + \dot z\,\vec u_z$$

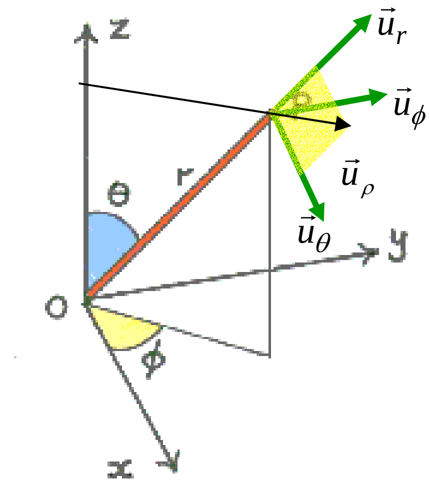
$$\vec{\mathbf a} = \ddot{\vec r} = \ddot\rho\,\vec u_\rho + \dot\rho\,\dot{\vec u}_\rho + \dot\rho\,\dot{\vec u}_\phi + \rho\,\ddot{\vec u}_\phi + \ddot z\,\vec u_z = (\ddot\rho - \rho\dot\phi^2)\,\vec u_\rho + (\rho\ddot\phi + 2\dot\rho\dot\phi)\,\vec u_\phi + \ddot z\,\vec u_z$$

esféricas

$$\dot{\vec u}_r = \frac{d}{dt}(\sin\theta\cos\phi\,\vec i + \sin\theta\sin\phi\,\vec j + \cos\theta\vec k) = \dot\theta\vec u_\theta + \dot\phi\sin\theta\,\vec u_\phi$$

$$\dot{\vec u}_\theta = \frac{d}{dt}(\cos\theta\cos\phi\,\vec i + \cos\theta\sin\phi\,\vec j - \sin\theta\vec k) = -\dot\theta\vec u_r + \dot\phi\cos\theta\,\vec u_\phi$$

$$\dot{\vec u}_\phi = \frac{d}{dt}(-\sin\phi\,\vec i + \cos\phi\,\vec j) = -\dot\phi\vec u_\rho = -\dot\phi(\sin\theta\,\vec u_r + \cos\theta\vec u_\theta)$$



$$\vec{\mathbf r} = r\vec u_r$$

$$\vec{\mathbf v} = \dot{\vec r} = \dot r\vec u_r + r\dot{\vec u}_r = \dot r\vec u_r + r\dot\theta\vec u_\theta + r\sin\theta\dot\phi\,\vec u_\phi;$$

$$\vec{\mathbf a} = \ddot{\vec r} = \ddot r\vec u_r + \dot r\dot{\vec u}_r + \dot r\dot\theta\vec u_\theta + r\ddot\theta\vec u_\theta + r\dot\theta\dot{\vec u}_\theta + \dot r\sin\theta\,\dot\phi\,\vec u_\phi + r\cos\theta\,\dot\phi\dot\theta\,\vec u_\phi + r\sin\theta\dot\phi\,\dot{\vec u}_\phi =$$

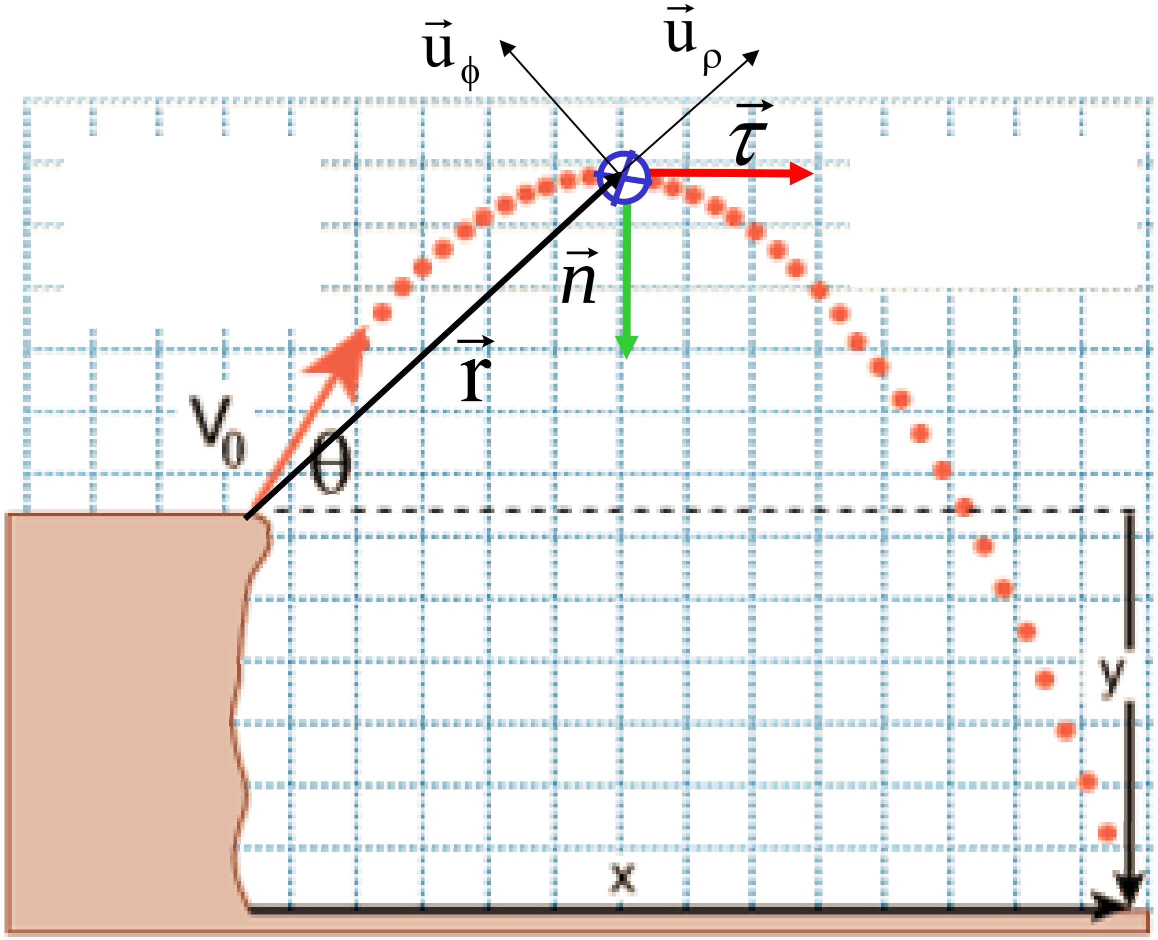
$$(\ddot r - r\dot\theta^2 - r\dot\phi^2\sin^2\theta)\,\vec u_r + (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta - r\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta)\,\vec u_\theta +$$

$$(r\ddot\phi\sin\theta + 2\dot r\dot\phi\sin\theta + 2r\dot\theta\dot\phi\cos\theta)\,\vec u_\phi$$

Problema 1.5 boletín

ATENCIÓN

Los vectores del triedro de Frenet NO coinciden, en general, con los vectores unitarios en cilíndricas o esféricas, y si lo hacen, se trata de trayectorias especiales (por ejemplo, trayectoria circular).



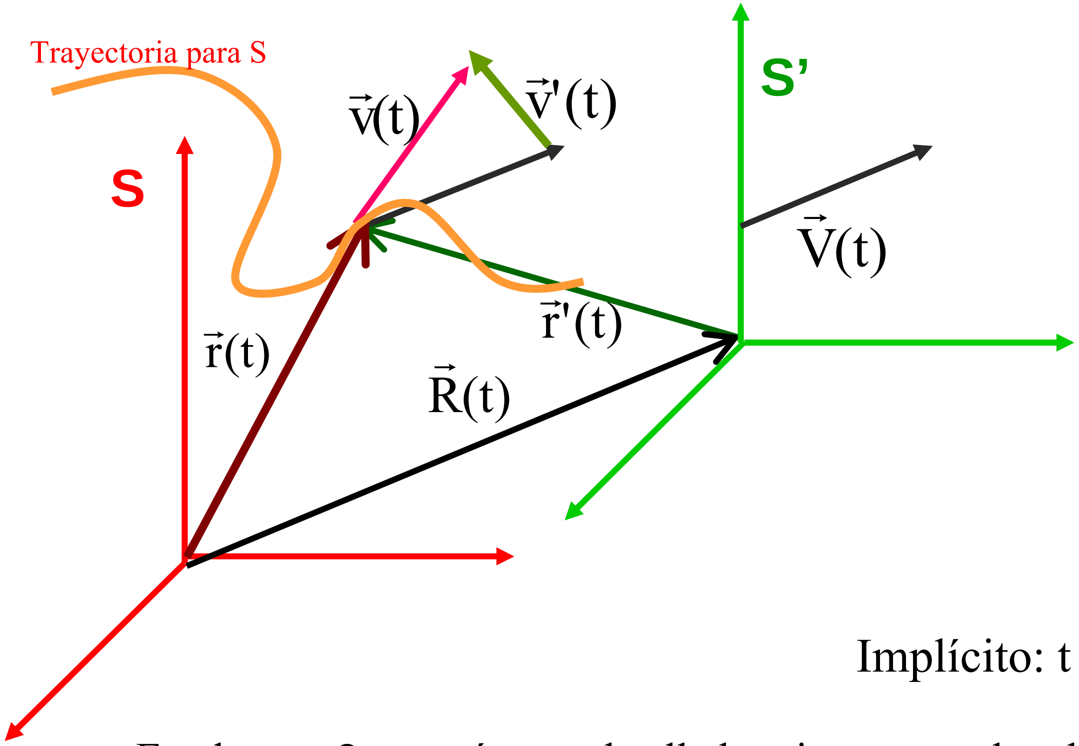
6. Transformaciones galileanas

Chantal Ferrer Roca 2008

Movimiento de un punto respecto a un sistema con movimiento rectilíneo

Posición, velocidad y aceleración los hemos supuesto referidos a un sistema de referencia que consideramos fijo. ¿Qué relación tienen con los valores que adoptan en un sistema que se mueva respecto al anterior?

Sistema de referencia S' se mueve respecto al sistema fijo S siguiendo una **linea recta**



Transformaciones:

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{R}(t)$$

$$\vec{v}'(t) = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{v}(t) - \vec{V}(t)$$

$$\vec{a}'(t) = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}(t) - \vec{A}(t)$$

Implícito: t es el mismo en S y S' (tiempo absoluto)

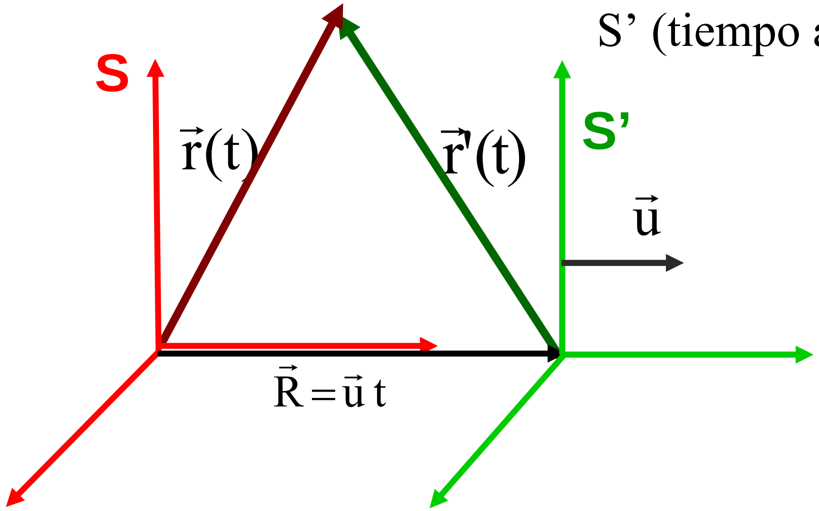
En el **tema 8** se verán con detalle los sistemas acelerados en mov. rectilíneo o que giran (SISTEMAS NO INERCIALES).

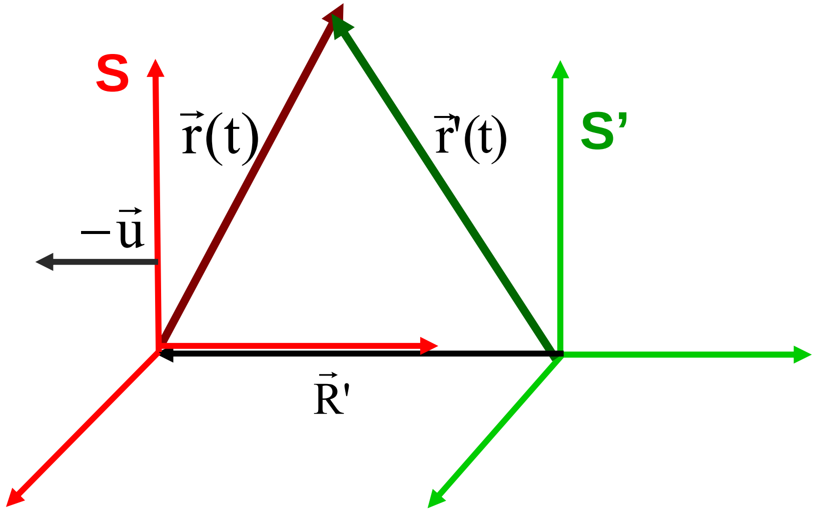
Chantal Ferrer Roca 2008

6. Transformaciones galileanas.

$\boxed{\vec{V} = \vec{u} = \text{cte}}$ Transformaciones entre sistemas inerciales o **galileanas**

Implícito: t es el mismo en S y S’ (tiempo absoluto)





$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{R}(t) \quad \begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{u} \quad \begin{cases} v_x' = v_x - u \\ v_y' = v_y \\ v_z' = v_z \end{cases}$$

$$\vec{a}'(t) = \vec{a}(t)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) - \vec{R}'(t) = \vec{r}'(t) + \vec{R}(t)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{u}$$

$$\vec{a}'(t) = \vec{a}(t)$$

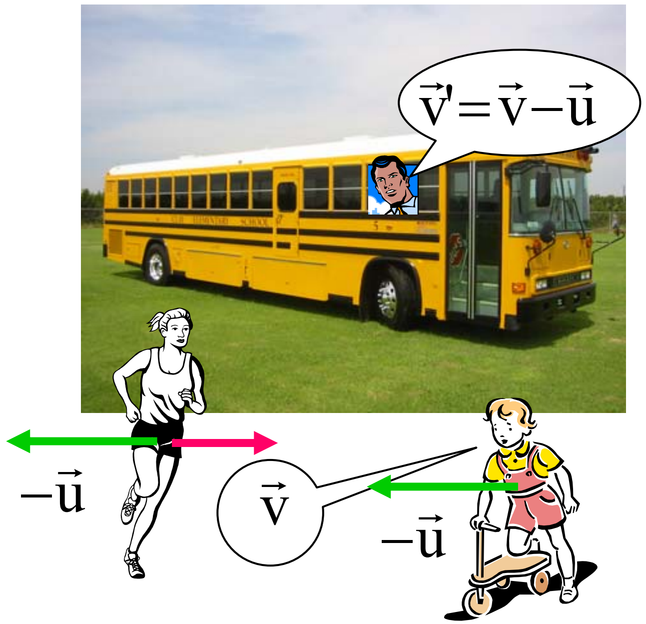
La aceleración de una partícula es la misma para todos los observadores en movimiento relativo de traslación uniforme (aceleración invariante).

Problema 1.6 boletín

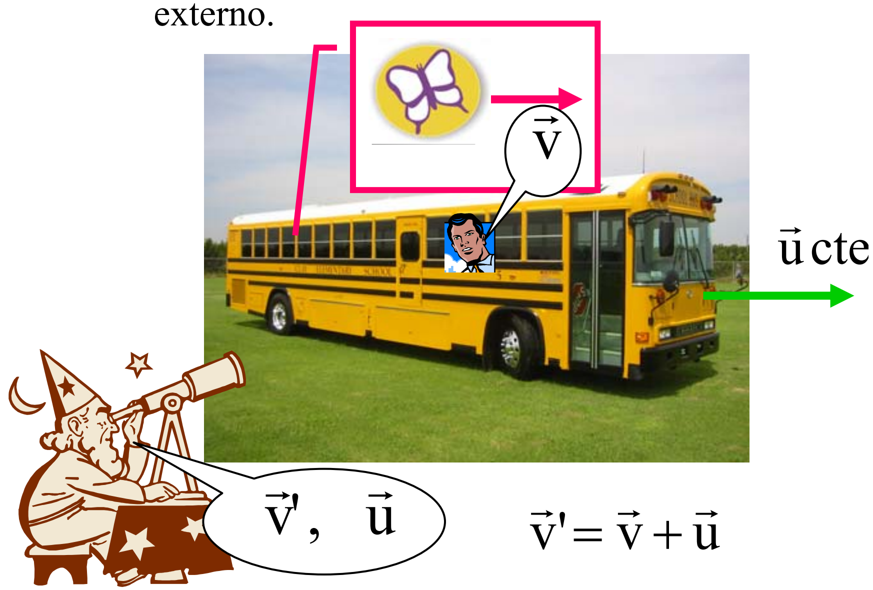
6. Transformaciones galileanas

Ejemplos

1. Corredora externa observada desde fuera y desde dentro de un autobús.



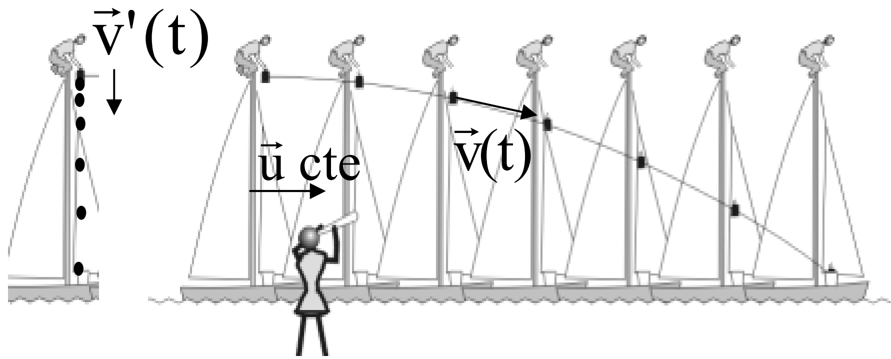
2. Una mariposa vuela dentro del autobús. Observada desde dentro y por otro observador externo.



$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{u}$$

Ejemplo clásico: el observador sobre la nave (S') observa una caída con aceleración g. El observador en el muelle (S) observa una caída con aceleración g + un desplazamiento horizontal con velocidad constante u. Las aceleraciones son iguales en ambos sistemas

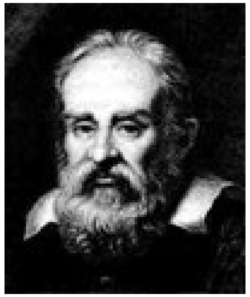
$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{u} \qquad \vec{a}'(t) = \vec{a}(t)$$



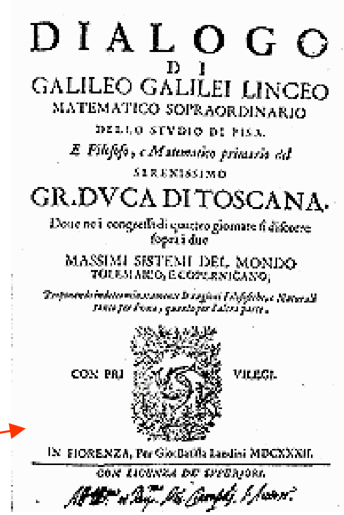
7. Principio de Relatividad de Galileo

Una persona que se encuentre dentro de un barco que avanza en línea recta y a una velocidad uniforme no puede decidir, por ningún experimento de mecánica, si el barco se mueve o está en reposo. (Tendría que asomarse por una escotilla para saberlo)

(Literalmente en el "Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo (1632)": movimiento de moscas, mariposas, pez, lanzamiento de objetos, saltos sobre cubierta, movimiento de un péndulo).



1564-1642



DIALOGO
DI
GALILEO GALILEI LINCEO
MATEMATICO SOPRAORDINARIO
DELLO STVDIO DI PISA.
E Filosofo, e Matematico primario del
SERENISSIMO
GR.DVCA DI TOSCANA.
Doue ne i congressi di quattro giornate si discorre
sopra i due
MASSIMI SISTEMI DEL MONDO
TOLEMAICO, E COPERNICANO;
CON PRI VILEGI.
IN FIORENZA, Per Gio:Batista Landini MDCXXXII.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

Lectura recomendada

Las leyes de la mecánica son las mismas para cualquier observador inercial

Principio de Relatividad Galileana

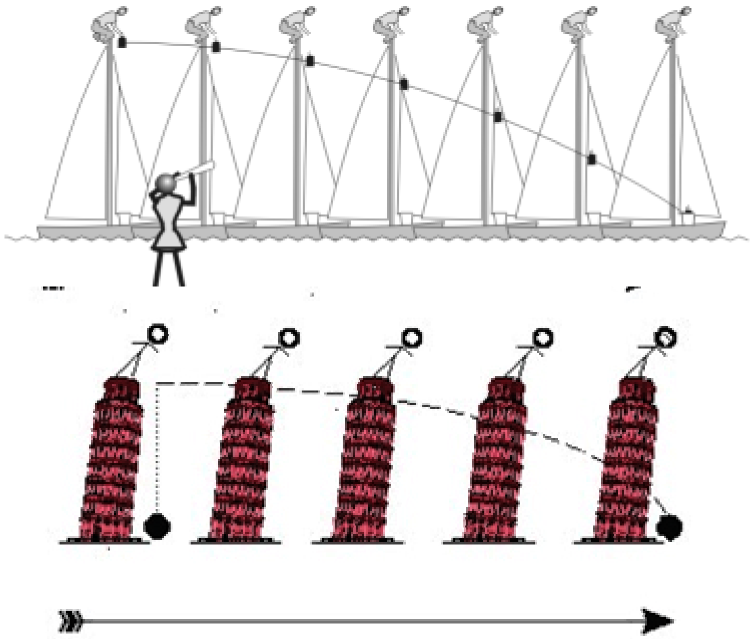
- *No es posible conocer la velocidad de un sistema que se mueve con velocidad constante y en línea recta a partir de experimentos mecánicos realizados en él.*
- *Sólo se puede determinar el estado de movimiento si se tiene una referencia exterior al sistema, en relación a la cual se puede medir la velocidad (velocidad relativa).*

Los sistemas inerciales son sistemas privilegiados desde el punto de vista de la dinámica

7. Principio de Relatividad de Galileo

• Modelo heliocéntrico: se presentaba una objeción fundamental basada en el "*sentido común*": si la Tierra se mueve respecto al sol, ¿cómo es que no "sentimos" su movimiento?. Por otro lado, una piedra lanzada desde lo alto de una torre debería caer en un punto del suelo desplazado respecto al pie de la torre (la Tierra se mueve durante la caída).

• Pero, de hecho, un objeto lanzado desde el mástil de un barco (sistema inercial) cae exactamente al pie del mástil. Si la Tierra se mueve como un sistema inercial, debe suceder lo mismo con la piedra y la torre.



La idea de que Galileo tirara piedras desde la torre de pisa es apócrifa

• En la actualidad sabemos que:

– La Tierra se mueve respecto al Sol a unos 100.000 km/h

– El sol se mueve respecto al centro de la Galaxia a 800.000 km/h

– La Galaxia se mueve junto a su Grupo Local a 2.000.000 km/h respecto a la radiación cósmica de fondo. **¡¡¡ Y no lo notamos!!!!**

(Pero lo sabemos por datos externos a nuestro sistema, la Tierra, y no por experimentos mecánicos realizados en ella).

Nota: los efectos no inerciales de esos sistemas en movimiento son despreciables