CUESTIONES Y PROBLEMAS DE MECÁNICA Y ONDAS

2º CURSO – LICENCIATURA EN FÍSICA

UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

PRIMER CUATRIMESTRE

Profesores:
Gabriela Barenboim (Dep. Física Teórica)
Chantal Ferrer Roca (Dep. Física Aplicada)
Julio Pellicer Porres (Dep. Física Aplicada)
Jose A. Peñarrocha Gantes (Dep. Física Teórica)

INTRODUCCIÓN

Estas cuestiones y problemas provienen fundamentalmente de preguntas aparecidas en exámenes de cursos anteriores, y se han recopilado y estructurado por temas con la intención de que sean utilizadas por los estudiantes en el estudio y reflexión sobre los contenidos fundamentales de la materia. La intención de este cuestionario es que sea abordado por los estudiantes de forma autónoma, y se utilice como material de trabajo y discusión en las sesiones de problemas en grupos reducidos. Es fundamental que los estudiantes no sólo realicen los cálculos que conducen a la resolución de las cuestiones, sino que también sean capaces de justificar y formular adecuadamente los razonamientos involucrados, en base a los conceptos y principios fundamentales de la Mecánica que se estudian en esta materia.

PRIMER CUATRIMESTRE

1. CINEMÁTICA DEL PUNTO

---

1. (Feb 05) El movimiento de una partícula está descrito por la trayectoria $\vec{r}(t) = (\cos t, \cos 2t, \cos 3t)$, en metros En el instante $t = \pi/6$ segundos:

   a. Calculad la celeridad.
   b. Calculad la aceleración tangencial.

---

2. (Feb 04) Considérese la trayectoria de un móvil (en metros) $\vec{r}(t)=(\sin t, t, t^2)$. En el instante $t = \pi/2$ seg., obtener:

   a. La celeridad (módulo de la velocidad).
   b. La aceleración.
   c. La componente tangencial de la aceleración.
   d. El radio de curvatura.
   e. El vector tangente a la trayectoria.

---

3. (Sep 03) Se lanza un proyectil desde la superficie de la Tierra (despreciar el rozamiento con el aire) con velocidad inicial de 180 km/h, formando un ángulo de 30° con la horizontal. En el punto más alto de la trayectoria obtener:

   a. La altura alcanzada
   b. La aceleración tangencial
   c. La velocidad (celeridad).
   d. El radio de curvatura.

---

4. (Oct 06) Sea el punto P de coordenadas esféricas $r = 2$, $\theta=\pi/3$, $\varphi=\pi/6$. Entonces,

   a. Escribir las coordenadas cartesianas de P.
   b. Escribir las componentes cartesianas de los vectores de la base local, $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$ y $\vec{u}_\phi$, en el punto P.
   c. Escribir el vector $\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$ en la base local en el punto P.

---

5. (Feb 07) Sea el punto P de coordenadas esféricas $r = 3$, $\theta = \pi/4$, $\varphi = \pi/2$. Entonces,

   a. Escribir las coordenadas cartesianas de P.
   b. Escribir las componentes cartesianas de de la base local, $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$, y $\vec{u}_\phi$, en el punto P.
   c. Escribir el vector $\vec{j}$ en la base local del punto P.

---

6. (Jun 04) Sea el punto P de coordenadas esféricas $(r,\theta,\varphi)=(\sqrt{2}, \pi/4, \pi)$ y el punto Q de coordenadas esféricas $(r,\theta,\varphi)=(1, \pi/2, \pi/3)$, obtener

   a. Las coordenadas cartesianas de P.
   b. Las coordenadas cartesianas de Q.
   c. El vector local $\vec{u}_\phi$ en P.
   d. El vector local $\vec{u}_\theta$ en Q.

---

7. (Feb 03) Considérese la trayectoria de un móvil $r(t) = (t, t^2/2, t^3/3)$. En el instante t=1 obtener:

a. La velocidad y la celeridad
b. La aceleración y sus componentes tangencial y normal
c. El vector normal a la trayectoria

---

8. (Feb 06) Un cuerpo de masa m sometido a la fuerza gravitatoria es lanzado con velocidad inicial v_0 desde el suelo, formando un ángulo α con éste (eje horizontal).

a. Calcula la aceleración tangencial, la aceleración normal y el radio de curvatura en un instante arbitrario de la trayectoria.
b. Particulariza el cálculo anterior para el instante inicial y para el instante de la trayectoria en el que el cuerpo alcanza la altura máxima. Dibuja los vectores indicando cada una de las componentes en ambos casos.

---

9. (Feb 05) Un cuerpo de masa 2 kg, describe la trayectoria (en coordenadas cartesianas) $r(t) = (3t\cos \pi t/2,\ 3t\sin\pi t/2\ ,\ t^2)$ metros. En el instante t = 2 segundos,

a. ¿Cuáles son sus coordenadas cilíndricas ρ,φ,z?
b. ¿Cuáles son las componentes del vector posición $\vec{r}\,(t = 2)$ respecto de la base local $\vec{u}_\rho, \vec{u}_\phi\ \ \vec{u}_z$?
c. ¿Cuáles son las componentes de la velocidad $\vec{v}\,(t = 2)$ respecto de la base local $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\phi$ y $\vec{u}_z$?
d. ¿Cómo se expresa la energía cinética en coordenadas cilíndricas?

---

10. (Oct 07) Sea el punto P de coordenadas cilindricas $\rho= 2$, $\varphi =\pi/3$, $z = 3$.

a. Escribir las componentes cartesianas de los vectores $\vec{u}_\rho, \vec{u}_\phi$ en la base local del punto P.
b. Escribir el vector $\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$ en la base local del punto P.

---

11. (Sept 08) Una partícula se mueve en una órbita bidimensional definida por:

$$x(t)= A(2t - \sin t)$$
$$y(t)= A(1 - \cos t)$$

a. Calcula la aceleración tangencial en cada instante
b. Calcula la aceleración normal en cada instante
c. Determina el radio de curvatura en $t=\pi/2$

RESOLVER PREFERENTEMENTE EJERCICIOS 2, 4, 8, 10

2. DINÁMICA DEL PUNTO

12. (Jun 08) Un móvil de masa 1000 Kg se desplaza por una pista circular de radio 100 m. El coeficiente de fricción estático (de deslizamiento) entre las ruedas y el firme es $\mu = 0.5$

a. ¿Cuál es la velocidad máxima que puede alcanzar el móvil sin deslizar fuera de la pista?

b. Si se aumenta la carga del móvil en 500 Kg, para aumentar la fricción ¿cuál es la velocidad máxima en este caso?

c. ¿Qué ángulo habría que inclinar la pista, sobre la horizontal, para que la velocidad máxima fuese el doble?

---

13. (Jun 07) Un objeto de masa 2 kg se impulsa sobre una superficie horizontal con velocidad inicial de v_0=3 m/s. Sabiendo que la fuerza de rozamiento con la superficie es de 0.5/v newtons, donde v es la velocidad del objeto, se pide

a. Obtener el tiempo t que el objeto tarda en pararse.
b. ¿Que distancia recorre?

---

14. (Feb 07) Dos bolas, partiendo del reposo, descienden en caída libre hacia el suelo. Sus masas cumplen que $m_1=m_2$, mientras que sus radios cumplen que $2r_1 = r_2$. La fuerza de rozamiento con el aire es α r v, siendo α una constante, r el radio de la esfera y v su velocidad.

a. ¿cuál de las dos bolas alcanza mayor velocidad límite?
b. ¿cuál de las dos bolas alcanza antes el 90% de la velocidad límite?
c. ¿cuál de las dos bolas llega antes al suelo?

---

15. (Feb 05) Dos cuerpos esféricos de radios r_1 y r_2 y masas m_1 y m_2, respectivamente, caen en el seno de un fluido, que se opone al movimiento con una fuerza viscosa proporcional a la velocidad. Discute cual de los dos cuerpos alcanza mayor velocidad limite en los siguientes casos:

a. $m>m_2$ y $r_1=r_2$.
b. $m_1=m_2$ y $r_1>r_2$.

---

16. (Dic 06) Un objeto de masa 1 kg se lanza hacia arriba desde la superficie de la Tierra con velocidad inicial de 3 m/s. Sabiendo que la fuerza de rozamiento con el aire es de $v^2/10$ newtons, donde v es la velocidad del objeto, se pide

a. Obtener el tiempo que el objeto tarda en pararse.
b. ¿Cuánto tiempo tardaría en pararse si no hubiese rozamiento?

---

17. (Sep 03) Sea un cuerpo de masa m moviéndose en un plano. En coordenadas polares (r,θ) escribir:

a. El cuadrado de la velocidad
b. El momento angular respecto al origen
c. El vector unitario radial $\vec{u}_r$
d. La aceleración radial

---

18. (Jun 07) Considerar una partícula de masa m en un campo de fuerzas $\vec{F}=ay\vec{r}$, donde $\vec{r} = (x, y, z)$ es el vector posición, y a una constante.

a. Mostrar si el campo de fuerzas es conservativo.
b. Obtener el trabajo del campo a lo largo del segmento que une los puntos A (1,0,0) y B (2,1,0)

19. (Jun 06) Considerar una masa puntual de 250 gramos en el campo de fuerzas $\vec{F} = -x\vec{i} + 2y\vec{j} - z\vec{k}$ (Newtons), que inicia el movimiento en un punto A de coordenadas cartesianas (1,0,1) (metros) con velocidad (1,2,1) (metros/seg)

a. ¿Es $\vec{F}$ un campo de fuerzas central? ¿Es conservativo? Razonad
b. ¿Cuánto vale el trabajo para trasladar en línea recta la masa puntual desde el origen de coordenadas hasta el punto A?
c. ¿Cuánto vale el momento angular respecto del origen de coordenadas al iniciarse el movimiento en el punto A?

---

20. (Feb 05) Considerar el campo de fuerzas $\vec{F} = xz\vec{i} + 2z\vec{j} - zy\vec{k}$ y el punto A de coordenadas cartesianas (1, 0, 1).

a. Comprobad si $\vec{F}$ es un campo de fuerzas conservativo
b. Obtened el trabajo de $\vec{F}$ a lo largo del segmento OA.

---

21. (Sep 04) Considerar el campo de fuerzas $\vec{F} = 6x^2\,\vec{i} + 2z\vec{j} - 2y\vec{k}$ y el punto A de coordenadas cartesianas (1, 0, 1).

a. Comprobar si $\vec{F}$ es un campo de fuerzas conservativo.
b. Obtener el trabajo a lo largo del segmento OA.
c. Calcular la divergencia de $\vec{F}$ en un punto arbitrario del plano YZ

---

22. (Sep 04) Sea el punto P de coordenadas esféricas $r = \sqrt{2}$, $\theta = \pi/4$, $\phi=0$, y la función potencial $\Phi(r,\theta,\phi)= r \sin\theta \sin\phi$. Entonces,

a. Obtener las coordenadas cartesianas de P.
b. Calcular el grad Φ en el punto P.
c. Obtener el vector local $\vec{u}_\phi$ en P.

---

23. (Feb 04) Sea la función energía potencial de una partícula (en julios) $\Phi(x, y, z)= x + y + z - 3xyz$ y los puntos P(1,0,0) y Q(0,1,1),

a. ¿Cuánto vale la fuerza sobre la partícula en el punto P?
b. ¿La fuerza es central?
c. Obtener el trabajo que realiza el campo de fuerzas a lo largo de la recta PQ

---

24. (Sep 05) Considerar un cuerpo con energía potencial en coordenadas cilíndricas, $U(\rho,\varphi,z)= \rho^3/3-z^2$ y el punto A de coordenadas cartesianas (1,0,0).

a. ¿Cuáles son las componentes del correspondiente campo de fuerzas $\vec{F}$ en la base cilíndrica?
b. ¿Es $\vec{F}$ un campo de fuerzas conservativo?
c. ¿Cuánto vale el trabajo a lo largo del segmento OA?

---

25. (Sep 04) Considerar el movimiento de una masa de 8 kg en un potencial unidimensional $V(x)=(x-1)^2-2$, (expresado en julios), partiendo del reposo en $x=0$.

a. Calcular la energía potencial mínima.
b. ¿Cuál es la velocidad máxima que alcanza?
c. Razonar si el movimiento es acotado

26. (Jun 04) Considerar el movimiento de una masa de 8 kg en un potencial unidimensional $V(x)=(x-2)^4+4$, (expresado en julios), partiendo del reposo en x=0.

a. Obtener la energía potencial mínima.
b. Obtener la velocidad máxima que alcanza.
c. Obtener el punto en el que el movimiento retrocede.

---

27. (Ene 07) Una partícula se mueve en una dimensión con energía potencial $V = x^2 (x-2)^2$ joules.

a. Obtener los puntos de equilibrio (estables e inestables) y las correspondientes energías.
b. Si la energía cinética de la partícula es de 8 joules en x=1, ¿dónde están los puntos de retorno del movimiento?

---

28. (Feb 06) Sea el potencial unidimensional $V(x) = -\frac{e}{x} + e^{1/x}$

a. Determina los puntos de equilibrio estable y el valor de la energía en dichos puntos.
b. Calcula el período de las pequeñas oscilaciones alrededor de los puntos de equilibrio estable.
c. Discute los distintos tipos de órbitas que puede seguir un cuerpo de masa m que se encuentre en el seno de este potencial dependiendo del valor de su energía total.
d. Un cuerpo de masa m=1 kg sometido a este potencial parte del punto x = 0.8 m ¿ qué velocidad inicial mínima le permitirá alejarse del pozo de potencial?. Si parte de ese punto con una velocidad de 2 m/s, ¿que velocidad tendrá en el infinito?

---

29. (Oct 07) Sea un objeto de masa 0:5 Kg que cae sujeto a un muelle de constante recuperadora k = 10 N/m. (F = -kx + mg, con eje x hacia abajo)

a. Obtener la energía potencial V (x), tomando el origen de potencial, V = 0; en x = 0. ¿cuánto vale la energía potencial mínima?

b. Si soltamos el objeto en x=0 (velocidad inicial nula), ¿cuál es la máxima velocidad que alcanzará?, ¿en qué posición?

RESOLVER PREFERENTEMENTE EJERCICIOS 12, 16, 17, 19, 23, 24, 27, 28

3. OSCILACIONES SIMPLES, AMORTIGUADAS Y FORZADAS

30. (Sep 08) Una masa de 1 kg, que se encuentra suspendida de un muelle de constante elástica k = 1 N/m, se mueve en un medio con una fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad, de constante b.

a. ¿Qué condición debe cumplir b para que el amortiguamiento sea oscilante?

b. ¿Cuánto vale b si al cabo de 3 oscilaciones la amplitud del movimiento se reduce un factor e^2?.

---

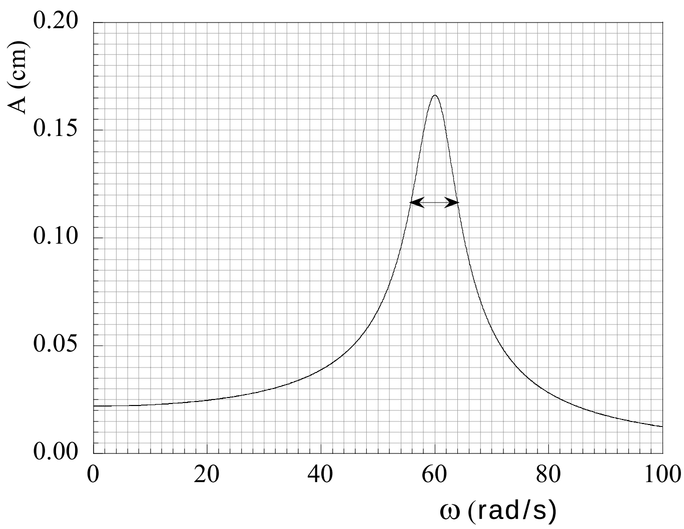
31. (Feb 04) En un oscilador amortiguado:

a. Relacionar el factor de calidad Q con el cociente entre la energía cinética media y la potencia media disipada
b. Obtener en función de Q el tiempo que tarda el oscilador en amortiguar su amplitud a la mitad.
c. Si forzamos el oscilador con una fuerza externa sinusoidal de frecuencia ω, escribir la anchura del pico resonante en función de Q.

---

32. (Dic 06) A un oscilador amortiguado se le aplica una fuerza externa sinusoidal de frecuencia angular ω. Al variar la frecuencia externa, la amplitud de la oscilación varia como se indica en la figura adjunta.

a. ¿Qué representa la anchura de la "campana" indicada en la figura?.
b. ¿Cómo se llama la frecuencia correspondiente al máximo de la "campana"?.¿Cuánto valdría la frecuencia angular del movimiento si no hubiese amortiguamiento ni fuerza externa?
c. ¿Cuánto vale el defasaje δ entre la oscilación de la fuerza externa y la del movimiento para una frecuencia de ω =36 rad/s?



---

33. (Jun 07) A un oscilador amortiguado se le aplica una fuerza externa sinusoidal de frecuencia angular ω. Al variar la dicha frecuencia, la amplitud de la oscilación varia como se indica en la figura adjunta. A partir de los datos de la figura

a. Escribir el valor de la frecuencia resonante ω_r, el factor de amortiguamiento β, la frecuencia natural del oscilador ω_0 y la amplitud de la aceleración impulsora.
b. Escribir la solución general del oscilador cuando se fuerza con frecuencia de 40 rad/s

---

34. (Sep 06) Un cuerpo de masa 1 kg se mueve suspendida de un muelle sin masa cuya constante elástica es k=20 N/m. En la dirección del movimiento, se aplica una fuerza externa sinusoidal de frecuencia angular ω cuyo valor máximo es de 2 Newtons. Suponiendo que no hay amortiguamiento:

   a. ¿Cuál es la solución del movimiento?
   b. ¿Qué sucede si $\omega=\sqrt{(20)}$ rad/s? Justificar cualitativamente la respuesta.

---

35. (Jun 06) El coeficiente de amortiguamiento de un oscilador amortiguado es $\beta= \pi\ s^{-1}$ y su frecuencia sin amortiguar es $\nu = \omega_0/2\pi =2$ Hz (periodos por segundo).

   a. ¿Que tiempo tarda la amplitud en alcanzar la décima parte de su valor inicial?
   b. Si aplicamos una fuerza externa sinusoidal de frecuencia variable, deduce la frecuencia a la que resonará el sistema
   c. ¿Aparece la resonancia de forma acusada, al variar la frecuencia externa?¿Por qué?

---

36. (Jun 05) Una masa de 2 kg, que se encuentra suspendida de un muelle de constante elástica k = 8 N/m, se mueve en un medio con una fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad, de constante b.

   a. ¿Cuánto vale b para que el amortiguamiento sea crítico?
   b. ¿Cuánto vale b si al cabo de 10 oscilaciones la amplitud del movimiento se reduce a la mitad?
   c. Si b = 4, ¿con qué frecuencia se debe forzar el sistema para que éste responda con la máxima amplitud?

---

37. (Feb 07) El coeficiente de amortiguamiento de un oscilador amortiguado es $\beta=3\pi\ s^{-1}$ y su frecuencia sin amortiguar es $\nu=\omega_0/2\pi=5$ Hz (periodos por segundo). Si la amplitud de la segunda oscilación es de 3.5 mm:

   a. Calcula la frecuencia del oscilador amortiguado.
   b. Calcula la amplitud inicial.
   c. Calcula la amplitud en régimen estacionario cuando se aplica una fuerza externa sinusoidal de amplitud F/m = 2 m/s² y 4.5 Hz de frecuencia.

---

38. Un péndulo de masa m y 10 metros de longitud se pone en oscilación amortiguada con amplitud inicial A. Al cabo de un pseudoperiodo, su amplitud se reduce a la mitad. Se le aplica, entonces, una fuerza sinusoidal externa con frecuencia resonante de manera que, en régimen estacionario, la amplitud del movimiento forzado es de 1 metro. Se pide

   a. Obtener la frecuencia ω_0 y el periodo T del movimiento sin amortiguamiento
   b. Obtener el factor de amortiguamiento β, la frecuencia w_1 y el pseudoperiodo T_1 del movimiento amortiguado.
   c. Obtener la frecuencia resonante y la amplitud de la fuerza externa.

---

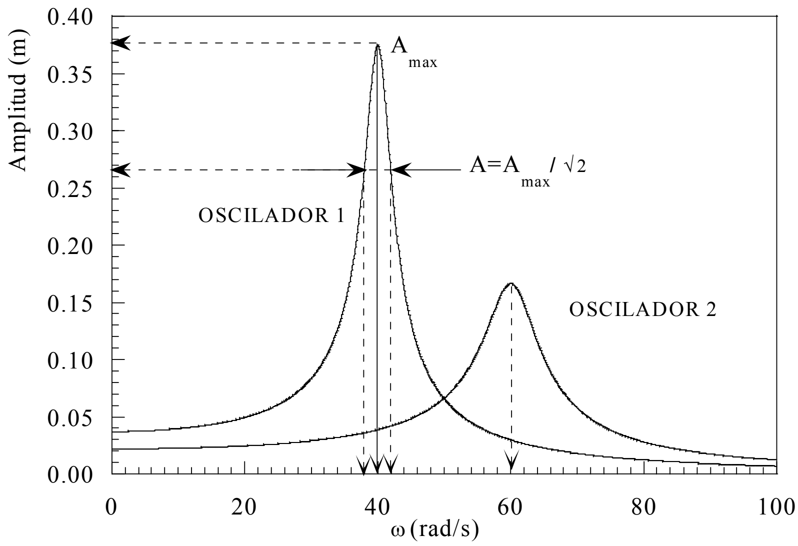
39. (Feb 02) Se tienen dos osciladores armónicos independientes, constituidos cada uno de ellos por una masa (m_1=200 g y m_2=150 g respectivamente) sujeta a un muelle (constantes elásticas respectivas k_1 y k_2) y con un mecanismo de amortiguamiento de tipo inframortiguado (coeficientes de amortiguamiento β_1 y β_2 respectivamente). A ambos osciladores se les aplica la misma fuerza $F_0\cos(\omega t)$. La medida de la amplitud de los desplazamientos en función de la frecuencia de la fuerza aplicada proporciona las curvas de resonancia que aparecen en la figura (correspondientes al oscilador 1 y 2 respectivamente).

a. A partir de los datos que proporciona la primera curva de resonancia, obtened el factor de amortiguamiento β_1, la frecuencia propia del oscilador ω_1 , el valor de la constante elástica k_1 y la amplitud de la fuerza F_0.

b. Calculad el valor que deberá tener el coeficiente de amortiguamiento β_2 para que, cuando el primer oscilador se encuentre en resonancia, la amplitud del segundo oscilador sea menos del 10% de la del primero. Usando el valor de β_2 obtenido, calculad ω_2 y k_2.

Para los apartados a) y b) considerad que, en general, la frecuencia de resonancia cumple la siguiente relación con la frecuencia propia del oscilador y el coeficiente de amortiguamiento $\boxed{\omega_R{}^2 = \omega_0{}^2 - 2\beta^2}$.

c. Demostrad dicha relación



RESOLVER PREFERENTEMENTE EJERCICIOS 33, 34, 36, 38, 39

4. SISTEMAS DE PARTÍCULAS

40. (Sep 04) Un sistema de dos partículas se mueve en tres dimensiones bajo la acción del potencial $U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,t)=x_1^2+2y_2-3(z_1-z_2)t$, entonces:

   a. ¿Cuánto vale la fuerza ejercida sobre la partícula 2 en un punto arbitrario?
   b. Obtener la componente z de la fuerza total sobre el sistema. ¿Se conserva el momento lineal?
   c. ¿Se conserva la energía total?

---

41. (Feb 05) Un sistema de dos partículas se mueve en tres dimensiones bajo la acción del potencial $U(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=3(z_1+z_2)+(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ julios entonces:

   a. ¿Cuánto vale la fuerza total ejercida sobre el sistema cuando $\vec{r}_1=\vec{r}_2=0$?
   b. ¿Cómo cambia el potencial bajo un desplazamiento del sistema $\vec{a}=(1,1,1)$?

---

42. (Feb 03) Un sistema de dos partículas se mueve bajo la acción del potencial $U(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=(x_1-x_2)^2+y_1^2-z_2^2$

   a. Obtener las fuerzas sobre las partículas 1 y 2. ¿Qué componentes de los momentos lineales se conservan?
   b. ¿En qué dirección podemos desplazar el sistema para que el potencial no cambie?
   c. ¿Cuánto vale la fuerza sobre total sobre el sistema?
   d. ¿La energía total del sistema se conserva? ¿por qué?

---

43. (Jun 05) Dos puntos materiales de masas 2 y 3 kg, moviéndose en un campo de fuerzas, tienen como vectores de posición $\vec{r}_1(t)=(3,-2t,t^2)$ metros y $\vec{r}_2(t)=(0,2t^2,-2)$ metros, respectivamente. En el instante t = 2 segundos,

   a.¿Cuál es la posición del centro de masas?
   b. ¿Cuánto vale la energía cinética del sistema?
   c. ¿Cuánto vale el momento angular del sistema?
   d. ¿Cuál es la fuerza total sobre el sistema?

---

44. (Feb 07) Un cuerpo aislado de masa m y velocidad horizontal v explota en dos fragmentos de masas 2m/3 y m/3

   a. ¿Cuál es la velocidad del centro de masas?
   b. Si el fragmento más pesado sale con velocidad perpendicular u al movimiento inicial, ¿cuál es la velocidad del otro fragmento?
   c. ¿Ha actuado alguna fuerza externa sobre el sistema?

---

45. (Feb 08) Dos puntos materiales de masa 2 kg tienen como vectores de posición $\vec{r}_1(t)=(1+2\cos(\omega t),-t^2,0)$ y $\vec{r}_2(t)=(1-2\cos(\omega t),-t^2,0)$

   a. Calcula el momento lineal del CM, la fuerza total que actúa sobre el sistema y las fuerzas que actúan sobre cada una de las partículas.
   b. ¿qué componentes del momento lineal de cada partícula y totales se conservan?
   c. Deduce la expresión general de la energía cinética del sistema en términos de la velocidad del centro de masas y la velocidad relativa, y calcula dicha energía en este caso particular.

---

5. INTRODUCCIÓN A LA FORMULACIÓN LAGRANGIANA Y HAMILTONIANA

46. (Dic 06) Considerar una partícula con Lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$

a. ¿Cómo se define el momento conjugado de la coordenada q?
b. ¿Cuándo decimos que q es una coordenada cíclica? ¿Qué propiedad tiene el momento conjugado de una coordenada cíclica?

---

47. (Sep 05) Un sistema de dos partículas se mueve en tres dimensiones con Lagrangiana $L(\vec{r}_1, \vec{r}_2)=(1/2)m_1 \dot{\vec{r}}_1^{\,2} +(1/2)m_2 \dot{\vec{r}}_2^{\,2} +x_1^2+y_2^2-(z_1-z_2)^2$,

a. ¿Cuáles son las coordenadas cíclicas del Lagrangiana?
b. ¿Qué componentes del momento de la partícula 1 se conservan?
c. ¿Qué componentes del momento total se conservan?

---

48. (Sep 03) Un péndulo simple de masa m y longitud l se desvía inicialmente un ángulo pequeño desde su posición de equilibrio,

a. Escribir la lagrangiana del sistema.
b. ¿Cuánto vale el período del movimiento?
c. Razonar si el momento angular con respecto al punto de suspensión se conserva
d. Razonar si la energía total del sistema se conserva

---

49. Una bolita de masa m está unida al extremo de un muelle, de constante recuperadora k. El muelle se encuentra inicialmente en posición horizontal, fijado por el otro extremo y estirado una longitud A. Se deja caer la bolita desde el reposo, bajo la acción simultánea de la gravedad y del muelle,

a. Escribir la lagrangiana del sistema en coordenadas cartesianas.
b. Resolver las ecuaciones del movimiento, teniendo en cuenta las condiciones iniciales.
c. ¿Cuál es la posición de equilibrio? Dibujar la trayectoria del movimiento

---

50. (Dic 06) Un disco de radio R y masa M, sujeto al extremo de un muelle de constante recuperadora k y longitud en reposo l, oscila a la vez que rueda sobre un plano inclinado de ángulo α. El otro extremo del muelle esta fijado en lo más alto del plano inclinado, siendo r la posición del disco con respecto a este extremo (El momento de inercia del disco respecto del eje perpendicular que pasa por su centro vale $MR^2/2$)

a. Escribir la lagrangiana del movimiento
b. Escribir la ecuación de movimiento para r
c. ¿Dónde está la posición de equilibrio?
d. ¿Cuánto vale la frecuencia angular de las oscilaciones?

---

51. Consideremos un péndulo simple de masa m y longitud l. Con un sistema de coordenadas con el eje OX hacia abajo, el eje OY hacia la derecha y θ el ángulo respecto de la vertical,

a. Escribir la lagrangiana del movimiento.
b. Escribir el momento angular respecto del punto de oscilación. Razonar si se conserva
c. Obtener la ecuación de movimiento.
d. ¿Cuánto vale la fuerza de ligadura en la dirección $\vec{u}_\theta$?
e. ¿Cuánto vale la fuerza de ligadura en la dirección $\vec{u}_r$?

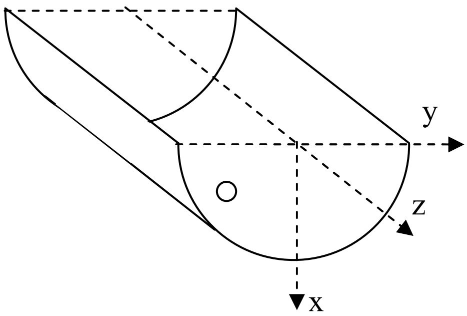
---

52. (Dic 06) Considerar dos masas puntuales m_1 y m_2 unidas por una varilla sin masa de longitud L. La masa 1 puede desplazarse horizontalmente con coordenada x_1, mientras que la masa 2 se mueve pendularmente, debido a la gravedad, con ángulo θ respecto de la vertical que une las dos masas

a. Escribir el lagrangiano del movimiento.
b. Obtener las ecuaciones de movimiento
c. Obtener el momento conjugado que se conserva en el movimiento

---

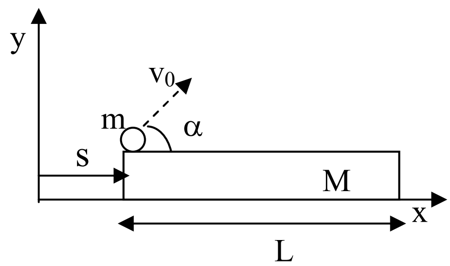
53. (Sep. 06) Una bolita de radio r y masa m puede moverse sometida a la fuerza gravitatoria por el interior de medio cilindro de radio R, como aparece en la figura (considerar la longitud indefinida).



a. Calcula la Lagrangiana del sistema.
b. Calcula las ecuaciones del movimiento.
c. ¿Hay alguna coordenada cíclica?, ¿Hay alguna cantidad conservada? Justifica adecuadamente las respuestas.
d. Resuelve la ecuación del movimiento suponiendo que la velocidad inicial de la bolita es $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_z$ y la posición inicial es $\vec{r}_0 = (R, \phi_0, z_0)$ con ϕ_0 muy pequeño, ambas en coordenadas cilíndricas.

---

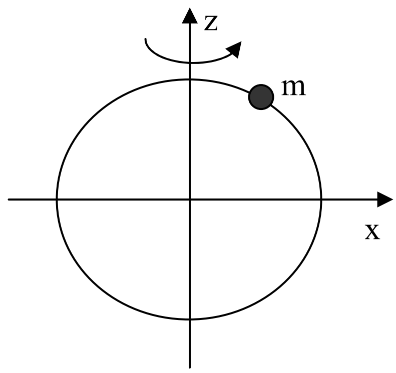
54. (Feb 06) consideremos una plataforma de masa M y longitud L que puede deslizarse sin rozamiento sobre el eje horizontal. El lanzamiento de la masa m se efectúa desde un extremo de dicha plataforma, con velocidad v_0 relativa a la plataforma y formando un ángulo α respecto al suelo :



a. Calcula la lagrangiana del sistema y las ecuaciones del movimiento. Comenta el significado de dichas ecuaciones.
b. Supongamos el caso en que M = 3m, α =45º y L= 100 m. Antes del lanzamiento la masa y la plataforma se encuentran en reposo. Calcula la expresión de la velocidad que adquiere la plataforma y el tiempo durante el que ésta se mueve con dicha velocidad. Determina la velocidad máxima con la que se puede lanzar el cuerpo para que caiga sobre la plataforma, sin salirse de ella.

---

55. (Jun 05) Una masa puntual m se mueve en un anillo vertical de radio R sometida a la fuerza gravitatoria. El anillo, de masa despreciable, está obligado a rotar alrededor de eje z con velocidad angular constante ω.



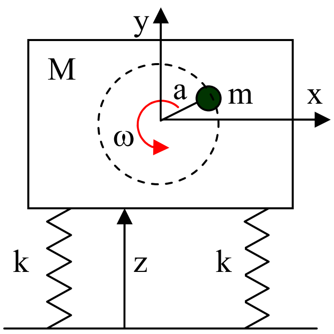
a. Calculad la lagrangiana del sistema
b. Obtened la ecuación del movimiento
c. Encontrad la posición de equilibrio estable de la masa. ¿Cuál sería dicha posición si no hubiera campo gravitatorio?
d. Calculad la frecuencia de las pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable

reescribiendo la ecuación del movimiento en términos de dicha desviación (aproximación por desarrollo de Taylor en primer orden alrededor de la posición de equilibrio).

---

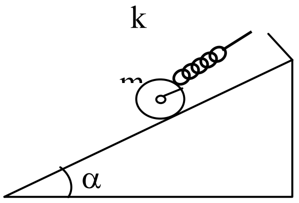
56. (Feb 05) Un bloque de masa M se encuentra sujeto sobre dos muelles de constante elástica k que a su vez están sujetos al suelo. En el centro del bloque hay un hilo de longitud a del que pende una masa puntual m que **es obligada a girar con velocidad angular ω <u>constante</u>** .

a. Escribe la lagrangiana del sistema.
b. Obtén la ecuación del movimiento del bloque de masa M. Reconoce en dicha ecuación el término correspondiente a la fuerza externa que obliga al bloque a oscilar.
c. Se introduce un amortiguamiento en el sistema cuya fuerza es proporcional a la velocidad del bloque y en sentido opuesto. Modifica adecuadamente la ecuación del movimiento del bloque obtenida en el apartado anterior y obtén la solución. Calcula la amplitud con la que oscilará el bloque si éste se encuentra en el estado estacionario, suponiendo que la masa gira con una velocidad angular ω=1 rad/s, M=100 kg, m =20 kg, k =240 N/m, b = 24 Ns/m y a = 1 m.



---

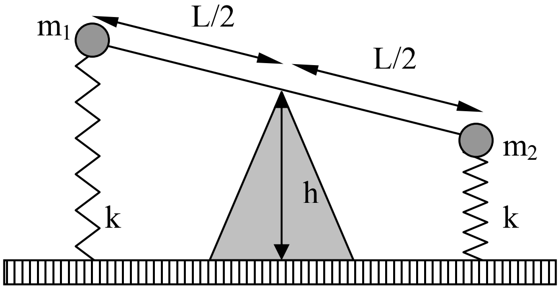
57. (Sep 02) Considérese el sistema de la figura, constituido por un cilindro de masa m que se apoya sobre un plano inclinado de ángulo α y está sujeto al extremo superior por un muelle.



a. Calculad la Lagrangiana y la ecuación del movimiento.
b. Escribid la solución de la ecuación suponiendo como condiciones iniciales amplitud máxima y velocidad nula.
c. Supondremos que añadimos al sistema cilindro-muelle un mecanismo de amortiguamiento de tipo inframortiguado. Calculad el coeficiente de amortiguamiento sabiendo que la amplitud del movimiento al cabo de 5 segundos se reduce al 10%.

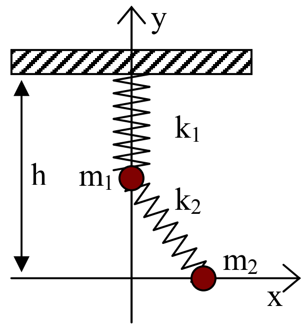
---

58. (Feb 02) Consideremos el sistema de la figura, un balancín formado por una barra sin masa de longitud L en cuyos extremos se encuentran dos masas puntuales m_1 y m_2. La barra se apoya en su centro sobre un soporte de altura h, y las masas están sujetas al suelo mediante dos muelles de constante recuperadora k y longitud inicial h.



Considerando que la elongación de los muelles es sólo vertical:
a) Calculad la Lagrangiana.
b) Obtened las ecuaciones del movimiento.
c) Resolved el movimiento teniendo en cuenta que h<<L (pequeñas oscilaciones) y m_1=m_2
d) ¿Cuál es la frecuencia angular?

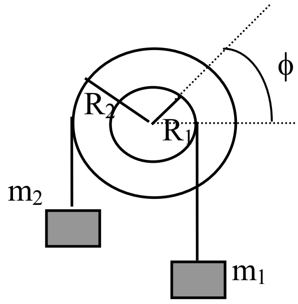
59. (Feb 03) Considera el sistema de la figura, donde la masa m_1=20 kg está obligada a moverse verticalmente según el eje y, mientras que m_2=1 kg está obligada a moverse según el eje x, ambas bajo la acción de dos muelles de constantes recuperadoras k_1=4 N/m y k_2=16 N/m, además de la gravedad.



a. Calcula la lagrangiana del sistema.
b. Obtén las ecuaciones del movimiento para las masas así como la solución general de las mismas.
c. Escribe la solución sabiendo que inicialmente se parte del reposo con y=0, x=a. Si h=40 m y a=10 m. ¿Cuál es la situación al cabo de $t=\pi/2$ segundos?.
d) ¿Cuál es la posición de equilibrio?

60. (Jun 03) Considerad una máquina de Atwood (polea) formada por dos discos de radios R_1 y R_2 y masas respectivas M_1 y M_2, adosados concentricamente (ver figura). De los discos penden dos masas m_1 y m_2, sometidas a la acción de la gravedad (ver figura).

a) Obtener el momento de inercia de un disco
b) Obtener la lagrangiana del sistema.
c) Obtener la ecuación de movimiento de las masas.
d) calcular las aceleraciones de las masas para los valores numéricos R_1=10 cm, R_2=20 cm, $m_1=m_2$=2 kg, M_1=250 g y M_2=1 kg.



NOTA: en este tema los ejercicios son bastante diferentes entre sí, salvo el 50 y 57, o el 48 y 51, que se refieren al mismo sistema. Por otro lado, abordan una nueva forma de calcular las ecuaciones del movimiento. Por este motivo es recomendable intentar resolverlos todos.

6. CAMPOS Y MOVIMIENTO EN CAMPOS CENTRALES

61. Considerar el campo de fuerzas $\vec{F} = \frac{k}{r^3}\vec{u}_r + \frac{c}{r}\vec{u}_\theta$

a.¿Es conservativo?. ¿Es central?
b. Escribir la energía potencial efectiva cuando c=0
c. ¿Para qué valores de k (con c=0), una partícula de masa m y momento angular l podría tener órbitas acotadas?

---

62. (Oct 06) Sea el campo vectorial $A(x,y,z)= 2x^2y\,\vec{i} - y^2z\,\vec{j} + xz^2\,\vec{k}$ y los puntos $P_1(1,1,0)$ y $P_2(0,0,2)$. Entonces,

a. Calcular la circulación de A(x,y,z) a lo largo del segmento P_1P_2.
b. Calcular la circulación de A(x,y,z) a lo largo de la línea quebrada P_1OP_2 que pasa por el origen de coordenadas.

---

63. (Jun 04) Considerar el campo de fuerzas $\vec{F} = 6r\,\vec{r}$ y el punto A de coodenadas cartesianas (1,1,1)

a. Comprobar si $\vec{F}$ es un campo de fuerzas conservativo.
b. Obtener el trabajo del campo a lo largo del segmento OA.
c. Obtener la diferencia de energia potencial entre el origen y el punto A.

---

64. (Dic 06) Considerar una partícula moviéndose en el campo de fuerzas $\vec{F} = \eta r^3\,\vec{r}$, donde $\vec{r}$ es el vector posición.

a. Mostrar que el campo de fuerzas es conservativo.
b. Obtener la energía potencial en la posición $\vec{r}$
c. Razonad que se conserva el momento angular de la partícula.

---

65. (Sep 06) Sea la función potencial $V(x,y,z) = x^2-2y^2+z^3$ y el punto P de coordenadas cartesianas (1,2,1). Entonces,

a. Calcular el valor del campo vectorial grad V en el punto P.
b. Razonad que grad V es perpendicular a toda superficie equipotencial
c. ¿Cuánto vale el trabajo de $\vec{F}$=-grad V a lo largo de una recta con extremos (0,1,1) y (1,2,1)?

---

66. (Oct 06) Sea el campo escalar $\Phi(x,y,z) = 2x^2y - y^2z + xz^2$ y el punto P de coordenadas cartesianas (1,2,1). Entonces,

a. Calcular el valor del campo vectorial grad Φ en el punto P.
b. Razonad que grad Φ es perpendicular en un punto de una superficie de nivel, Φ=constante.
c. Obtener rot (grad Φ) en un punto arbitrario.

---

67. (Feb 05) Sea la función potencial $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 -2z$ y el punto P de coordenadas cartesianas (1,1,0). Entonces,

a. Calcular en coordenadas cartesianas grad Φ en el punto P.
b. Calcular en coordenadas cilíndricas grad Φ en el punto P.

---

68. (Feb 03) Sea el punto P de coordenadas esféricas r = 2, $\theta=\varphi=\pi/4$ y la función potencial $\Phi(r,\theta,\varphi) = r^2 \sin\theta$. Entonces,

a. ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas de P?
b. Obtener el vector local $\vec{u}_r$ en P
c. Obtener el gradiente de Φ en P

---

69. (Ene 07) Considerar una esfera de radio a y densidad de masa $\rho=k/r$, siendo k una constante y r la distancia al centro de la esfera.

a. Obtener la masa de la esfera
b. Obtener el potencial gravitatorio en un punto de la superficie de la esfera
c. Obtener el potencial gravitatorio en el centro de la esfera

---

70. (Feb 07) Sea una esfera hueca de radios a y b (a<b), con una distribución esférica de masa M, cuya densidad ρ aumenta inversamente con el radio r ($\rho=k/r$).

a. ¿Cuánto vale el campo gravitatorio en $r<a$?
b. ¿Cuánto vale el campo gravitatorio en $a<r<b$?
c. ¿Cuánto vale el campo gravitatorio en $r>b$?

---

71. (Feb 03) Considerar una esfera hueca homogénea de masa M y radios interior y exterior de 1 y 3 m respectivamente. Sea r la distancia desde el centro de la esfera a un punto arbitrario. Obtener el campo gravitatorio creado por la esfera en los casos siguientes:

a. En r =4 m
b. En r = 2 m
c. En el centro de la esfera

---

72. (Feb 05) Considerad una esfera hueca de 10 kilos de masa con densidad uniforme y radios 2 y 10 centímetros. Obtened el campo gravitatorio, en unidades de la constante G, a las siguientes distancias del centro de la esfera:

a. A quince centímetros
b. A cinco centímetros
c. A un centímetro

---

73. (Jun 05) Sea una esfera hueca de radios a y b (a<b), con una distribución esférica de masa M, cuya densidad ρ aumenta linealmente con el radio r ($\rho=kr$).

a. ¿Cuánto vale el campo gravitatorio en $r<a$?
b. ¿Cuánto vale el campo gravitatorio en $a<r<b$?
c. ¿Cuánto vale el campo gravitatorio en $r>b$?

---

74. (Feb 04) Considerar una esfera hueca homogénea de masa M y radios interior y exterior de 2 y 4 m respectivamente. El hueco se rellena con una esfera maciza, también de masa M y radio 2 m. Sea r la distancia desde el centro de las esferas a un punto arbitrario. Obtener

a. El campo gravitatorio en r = 5 m.
b. El campo gravitatorio en r = 3 m.
c. El campo gravitatorio en r = 2 m.

---

75. (Feb 03) Consideremos una partícula moviéndose bajo la acción de la fuerza $F = -2x\ \vec{i} - 8y\ \vec{j}$.

a. Comprobar si la fuerza es conservativa

b. Obtener el movimiento oscilatorio en el plano xy
c. ¿Las trayectorias son cerradas?
d. ¿Las trayectorias están acotadas?

---

76. (Feb 07) Sea un sistema aislado de dos cuerpos de masas m_1 y m_2 interaccionando gravitatoriamente.

a. Escribir la Lagrangiana del movimiento en función de las posiciones r_1 , r_2 y las correspondientes velocidades.
b. Escribir la Lagrangiana del movimiento en función de la posición del centro de masas R, la posición relativa r y las correspondientes velocidades. ¿Cuál es la lagrangiana del movimiento relativo en coordenadas esféricas (r, θ, φ)?
c.¿Qué coordenadas de la Lagrangiana del movimiento completo son cíclicas? Obtener todos los momentos conjugados que se conservan.
d. Escribir la ecuación del movimiento relativo eligiendo en la Lagrangiana el valor $\theta=\pi/2$.¿Por qué es posible fijar este valor del ángulo θ?

---

77. (Jun 07) Considerad una partícula cargada de masa m y momento angular l, moviéndose en un potencial coulombiano de energía $V(r)=-\alpha/r$ con $\alpha>0$

a. Escribir la energía total de la partícula en coordenadas polares. ¿Cuánto vale la energía cinética radial?
b. Obtener el radio r_c de la órbita circular. ¿Cuánto vale la energía cinética radial en esta órbita?

---

78. (Ene 07) Considerad una partícula de masa m y momento angular l, moviéndose en un potencial central de energía $V(r)=-2\alpha/r$ con $\alpha>0$

a. Escribir la energía total de la partícula en coordenadas polares. ¿Cuánto vale la energía cinética radial?
b. Obtener el radio r_c de la órbita circular. ¿Cuánto vale la energía cinética radial en esta órbita?
c. Con la partícula en la órbita circular, cambiamos bruscamente el valor de α a la mitad, ¿cuánto valdrá la energía total?, ¿cómo cambiará la órbita?.

---

79. Considerad una partícula de masa m y momento angular l, moviéndose en un potencial central de energía $V(r)=-2\alpha/r$ con $\alpha>0$

a. Escribir la energía total en coordenadas polares.
b. Obtener el radio r_c de la órbita circular.
c. Escribe el momento conjugado de la coordenada angular.
d. Construye el Hamiltoniano del sistema e identifica el potencial efectivo.

---

80. (Jun 06) Considerad una partícula de masa m moviéndose en un potencial central de energía $V(r)=-k/r$ con momento angular l

a. Obtener el radio r_c de la órbita circular
b. ¿Cuál es el valor mínimo de la energía para que el movimiento de la partícula no esté acotado?
c. ¿Cuánto vale la velocidad de la partícula en r_0 si su energía es nula?
d. ¿Cuánto vale la energía de la partícula en la órbita circular?

---

81. (Feb 04) Sea una partícula de masa 1 kg moviéndose con momento angular $l = 4$ kg·m²/s bajo la acción de un potencial $U(r)= - r^2 /2$.

a. Si existe una órbita circular, obtener el radio
b. Si la energía es de 3 julios, obtener la distancia más cercana al centro de potencial
c. Si la energía es de 5 julios, obtener la distancia más lejana al centro de potencial.
d. ¿Existe movimiento para energías negativas? (Razonar).

---

82. (Sep 05) Una partícula de masa 1 Kg se mueve en un potencial central V(r)=-8/r Julios con un momento angular de 2 Kg.m²/s.

a. Si la energía total es de 1 Julio: ¿Cuáles son los radios de retroceso del movimiento (pericentro y apocentro)?
b. ¿Cuál es el radio correspondiente a la orbita circular?
c. ¿Cuál es la energía de la órbita circular?

---

83. (Feb 03) Sea una partícula de masa 1 kg moviéndose con momento angular $l=4\ kg\cdot m^2/s$ bajo la acción de un potencial $U(r)=r^2/2$.

a. ¿Para que energías el movimiento es acotado?
b. Obtener el radio de la órbita circular (si existe)
c. Si la energía es de 5 julios, ¿cuál es la distancia más próxima del movimiento al centro de potencial?

---

84. Una partícula de masa m se mueve sobre la superficie de un cono invertido de ángulo α bajo la accion del campo gravitatorio terrestre.

a. Escribir la lagrangiana en coordenadas esféricas y obtener el momento conjugado que se conserva.
b. Escribir el potencial efectivo. Discutir el tipo de órbitas y calcular el radio de la órbita radial.
c. Escribir la ecuación del movimiento en el caso de que el momento angular de la partícula sea nulo. Obtener, en este caso, el tiempo que tarda la partícula en caer desde una altura h hasta el origen del cono.

---

85. (Feb 03) Consideremos un sistema de dos cuerpos (esféricos y uniformes) con masas m_1=5 kg y m_2=10 kg que interaccionan debido a la gravedad. Inicialmente sus posiciones son $\vec{r}_1^{\,0}=(40,0)\,cm$, $\vec{r}_2^{\,0}=(-20,0)\,cm$ con velocidades $\vec{v}_1^{\,0}=(0,8)\,cm/h$ y $\vec{v}_2^{\,0}=(0,-4)\,cm/h$.

a. Calcula las coordenadas y la velocidad del centro de masas, así como la masa reducida del sistema.
b. Obtén el momento angular y la energía total del sistema. ($G=\frac{20}{3}\times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$).
c. Calcula la distancia apsidal mínima (pericentro) del movimiento relativo y la distancia apsidal máxima (apocentro), en caso de que exista.
d. Calcula el periodo del movimiento y las posiciones de m_1 y m_2 al cabo de un semiperiodo [ayuda: Expresión de U_{ef} y 3ª ley de Kepler].

---

86. (Sep 03) Lanzamos un satélite artificial desde una plataforma espacial situada a una distancia D del centro de la Tierra, con velocidad perpendicular al radio que une dicho centro con la plataforma (M_T es la masa de la Tierra y G la constante de gravitación Universal).

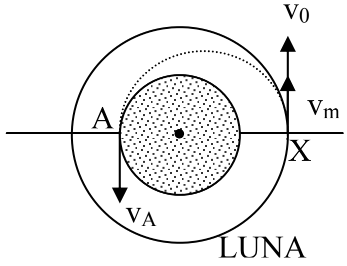
a. Obtener la velocidad de lanzamiento para que la órbita será circular.
b. Obtener la velocidad de escape de la Tierra
c. ¿Para qué velocidades la órbita es elíptica?

87. (Jun 04) Suponed que la Tierra tuviese el doble de diámetro, entonces razonad si:

   a. La masa de la Tierra sería el doble.
   b. La gravedad en la superficie de la Tierra sería el doble.
   c. La velocidad de escape para un cohete lanzado desde la superficie sería el doble.

---

88. (Jun 04) Una nave espacial de masa $m=12 \cdot 10^3$ kg se encuentra en una órbita circular a una altura h=100 km sobre la superficie de la Luna. Cuando la nave se encuentra en el punto X de la órbita, se accionan los motores de frenado durante unos instantes para proceder al alunizaje en el punto A de la superficie lunar, siguiendo una elipse de la que los puntos X y A son los extremos del eje mayor.

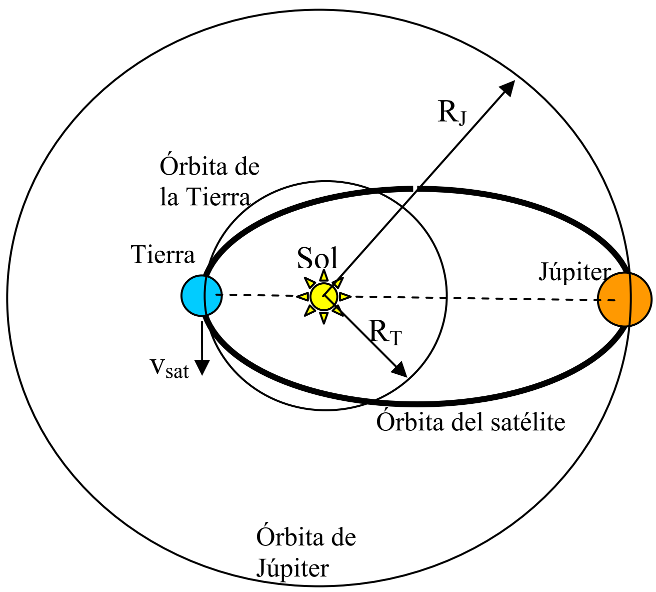


   a. Calcula la velocidad de la nave v_0 en su órbita circular inicial.
   b. Como consecuencia del breve encendido de los motores de frenado, la velocidad de la nave en X pasa a tener un valor v_m. Calcula la velocidad v_A y también v_m usando la conservación del momento angular o 2ª ley de Kepler y la conservación de la energía.
   c. Calcula la masa de carburante utilizada en dicha operación, sabiendo que la velocidad de los gases respecto a la nave es de 10 km/s y que su expulsión tiene lugar en un tiempo muy breve (variación muy pequeña de la masa de la nave).

DATOS: la aceleración de la gravedad en la superficie de la luna g =1.623 m/s^2. El radio de la Luna R=1738 km.

89. (Feb 05) Se desea enviar un satélite de exploración a Júpiter desde la Tierra. Una trayectoria posible es la órbita elíptica que ilustra la figura: el satélite, que se encuentra ya en una estación espacial a una cierta altura sobre la Tierra, es lanzado cuando la Tierra se encuentra en el perihelio (radio mínimo) de la órbita que seguirá el satélite alrededor del sol, mientras que Júpiter se encontrará en el afelio (radio máximo) de dicha órbita cuando el satélite alcance dicho punto. Como aparece en la figura, se supondrá que las órbitas de la Tierra y Júpiter alrededor del Sol son circulares y de radios R_T y R_J respectivamente.

   a. Calcula la velocidad de la Tierra v_T en su movimiento circular alrededor del sol. El satélite es lanzado con una velocidad v_0 respecto a la Tierra, dirigida según la misma dirección y sentido del movimiento de ésta. Escribe la expresión de la velocidad del satélite respecto a un sistema fijo con el Sol (v_{sat}).
   b. Calcula los semiejes mayor y menor de la órbita del satélite y su excentricidad.
   c. Utilizando los principios de conservación de la energía y del momento angular, calcula la velocidad v_0 con la que será necesario lanzar el satélite para que describa la órbita elíptica prevista.
   d. Calcula el tiempo previsto de viaje entre la Tierra y Júpiter.



DATOS: R_T=1.5·10^{11} m, R_J=5.2·R_T, G = 6.67·10^{-11}Nm²/kg² Masa del sol M_S = 2·10^{30} kg. La altura del satélite en la posición inicial sobre la Tierra es despreciable respecto a R_T.

90. (Jun 02) El primer satélite artificial (Sputnik I), lanzado en 1957, alcanzó una altura de 227 km sobre la superficie terrestre, punto correspondiente al perigeo de su órbita (punto apsidal de distancia mínima) y en el que su velocidad era de 8 km/s.

a) Calcular la distancia desde el centro de la Tierra al apogeo (distancia apsidal máxima) y su velocidad.
b) Calcular el semieje mayor de la órbita, la distancia focal y el semieje menor.
c) Obtener el periodo de la órbita.

DATOS: M_T=6 x 10^{24} kg, R_T=6370 km, G=6.7 x 10^{-11} Nm²/kg²

AYUDA: utilizad, bien la ecuación de la órbita $\frac{1}{r} = C + B\cos\theta$, con $C = \frac{\mu k}{l^2}$ y $B = \sqrt{C^2 + \frac{2\mu E}{l^2}}$ o la ecuación de los radios apsidales $E = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}$, con $k=GmM_T$.

EJERCICIOS 61- 68: Campos y Operadores Diferenciales en coord. cartesianas y coord. curvilíneas.
EJERCICIOS 69- 74: Campo newtoniano/coulombiano
EJERCICIOS 75- 84: Análisis del movimiento de una partícula en un potencial central
EJERCICIOS 85- 90: Problema de dos cuerpos en un campo gravitatorio. Órbitas.

7. COLISIONES Y DISPERSIÓN

91. (Mar 07) Considerad un pozo de pared esférica en cuyo fondo, a profundidad h, está situada una masa m_2. Desde el borde del pozo se deja caer una masa m_1, que se desliza sin rozamiento y choca frontalmente con m_2,

a. ¿Qué velocidad alcanzan ambas masas, justo antes y después de la colisión, si ésta es completamente inelástica?
b. ¿Qué altura alcanzan ambas masas, después de la colisión, si ésta es completamente inelástica?
c. ¿Si la colisión es elástica, que masa debe tener m_1 en relación con m_2 para que esta última salga disparada del pozo hasta una altura 2h?

---

92. (Sep 06) Considerar la dispersión de partículas por una esfera dura de radio a

a. Si una partícula es desviada un ángulo de 60^0. ¿Cuánto vale su parametro de impacto?
b. ¿Cuánto vale la sección eficaz total de dispersión?
c. ¿Cómo se define la sección eficaz diferencial por unidad de ángulo sólido?

---

93. (Jun 06) Considerar la dispersión de partículas por una esfera dura de radio a

a. Si una partícula es desviada un ángulo de 120^0. ¿Cuánto vale su parámetro de impacto?
b. ¿Cuánto vale la sección eficaz total de dispersión?
c. ¿Cómo se define, en general, la sección eficaz diferencial por unidad de ángulo sólido en función del parámetro de impacto?

---

94. (Jun 04) Considerar la dispersión de una masa puntual por una esfera dura de radio a

a. ¿Cuál es la relación entre el parámetro de impacto b y el ángulo de dispersión θ?
b. Obtener la sección eficaz diferencial.
c. Obtener la sección eficaz total.
