Tema 2: Resolver por aproximaciones sucesivas una ecuación no lineal del tipo f(x)=0:

Objetivos:

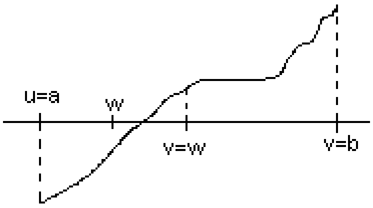
1. Desarrollar un algoritmo que nos permita ir acotando en intervalos cada vez más pequeños una solución de la ecuación f(x)=0 teniendo en cuenta el **signo** de f(x) en los extremos de un intervalo.
2. Desarrollar un algoritmo que nos permita ir aproximándonos cada vez más a una solución de la ecuación f(x)=0 teniendo en cuenta el **valor** de f(x) en los extremos de un intervalo.
3. Desarrollar un algoritmo que nos permita ir acotando en intervalos tan pequeños como queramos una solución de la ecuación f(x)=0 teniendo en cuenta el valor de f(x) en los extremos de intervalos **sucesivos**.
4. Desarrollar un algoritmo que nos permita ir aproximándonos cada vez más a una solución de la ecuación f(x)=0 teniendo en cuenta el valor de f(x) en un punto y su **derivada**.
5. Entender las **dificultades** que se encuentran con los distintos algoritmos para aproximarse o acotar una solución de la ecuación f(x)=0.
6. Estudiar la velocidad de **convergencia** de una sucesión que tienda a una solución de la ecuación f(x)=0.
7. Desarrollar un algoritmo que permita converger lo más **rápidamente** posible hacia una solución de la ecuación f(x)=0.

Metodología:

- Reflexionar colectivamente, en grupos pequeños y en el conjunto de la clase, sobre distintos procedimientos para aproximarse a una solución de la ecuación f(x)=0.
- Deducir el orden de convergencia de distintos métodos de búsqueda de una solución de la ecuación f(x)=0, en clase (en grupos pequeños exponiendo a continuación las conclusiones obtenidas) y a través un trabajo en equipo.
- Trabajar en aula de informática elaborando programas para aproximar una solución de la ecuación f(x)=0, ejecutarlos y valorar los resultados obtenidos.

Actividades:

Actividad 1: teniendo en cuenta el Teorema de Bolzano,
<u>Teorema -4:</u> Para todo intervalo [a,b] de números reales, y toda función continua f : [a,b]→R, si f(a)·f(b)<0, entonces existe un número x∈[a,b] tal que f(x)=0,
si se cumple la premisa del teorema y tomando inicialmente u=a & v=b, calculando w=(u+v)/2 y examinando el signo de f(w), estudiar qué nuevo intervalo deberíamos tomar para seguir acotando la solución (**método de la Bisección**).

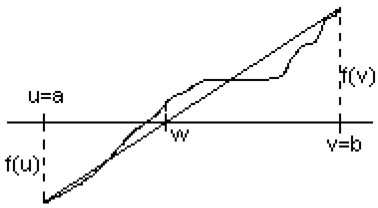


Puede experimentarse gráficamente con un "applet" en
http://centros5.pntic.mec.es/~marque12/matem/bolzano.htm
Puede encontrarse un modelo de algoritmo en
http://www.uv.es/~pla/Tutoria/mniq/algorit1.gif
Si reiteramos el proceso hasta que la longitud del intervalo sea menor que una tolerancia ε, ¿de qué dependerá, en general, el número de veces que debamos reiterarlo?

Actividad 2.
Problema 4: Si a=0, b=8, ε=0.25, ¿cuántos pasos serán necesarios como máximo para llegar a una solución aproximada con esa cota de error? Obtener una expresión general que nos dé el número de pasos en función de a, b y ε.

Actividad 3. Suponiendo a<b & f(a)·f(b)<0 y tomando inicialmente u=a & v=b, obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos (u,f(u)) & (v,f(v)) y calcular el punto (w,0) en que corta al eje de abscisas,

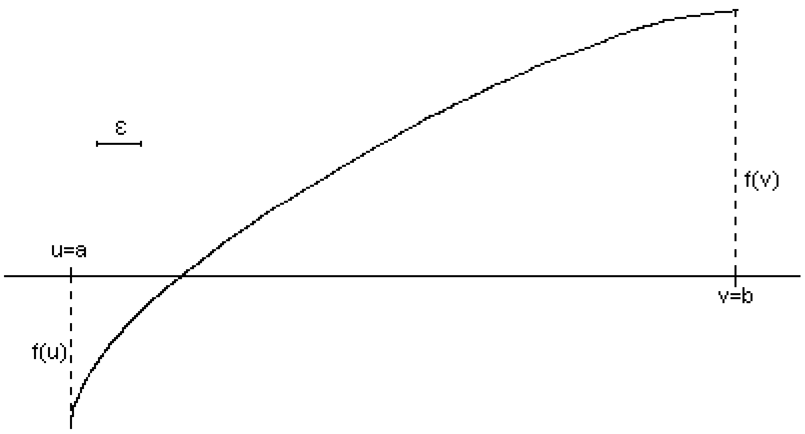
w =



Examinando el signo de f(w), estudiar qué nuevo intervalo deberíamos tomar para seguir acotando la solución (**método de Regula-Falsi**).
Puede experimentarse gráficamente con un "applet" en http://www.apropos-logic.com/nc/RegulaFalsiAlgorithm.html
Puede encontrarse un modelo de algoritmo en:
http://www.uv.es/pla/Tutoria/mniq/algorit2.gif

Actividad 4.

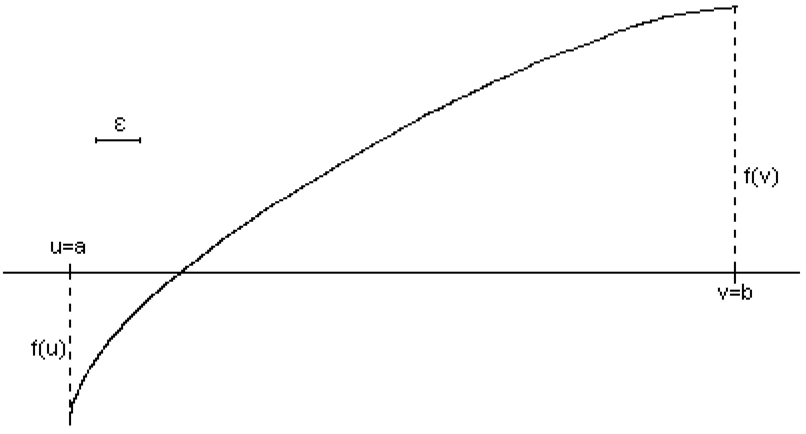
Problema 5: Aplicar el método de Regula-Falsi en la figura adjunta hasta que la longitud del intervalo sea menor a la del segmento indicado (ε):

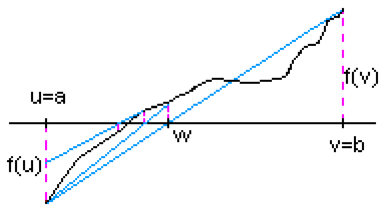


Analizar las dificultades encontradas para finalizar el problema y reflexionar sobre cómo superarlas.

Actividad 5.

Problema 6. Repetir el problema anterior en la figura adjunta modificando el método seguido de modo que cuando dos valores intermedios w consecutivos nos den valores de f(w) con el mismo signo, en vez de volver a trazar la recta hasta el mismo punto que en el paso anterior, se trace hasta un punto con la mitad de la ordenada, según se muestra en la figura pequeña (**método de Regula-Falsi modificado**)

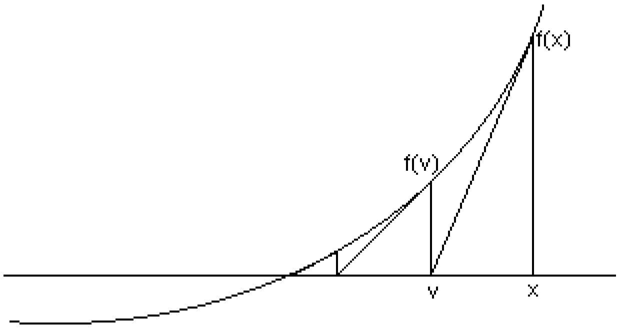




Puede encontrarse un modelo de algoritmo en
http://www.uv.es/pla/Tutoria/mniq/algorit3.gif
Puede experimentarse gráficamente con un "applet" (adaptado para Netscape 4.5) en
http://www.uv.es/pla/java/Regulafa.html

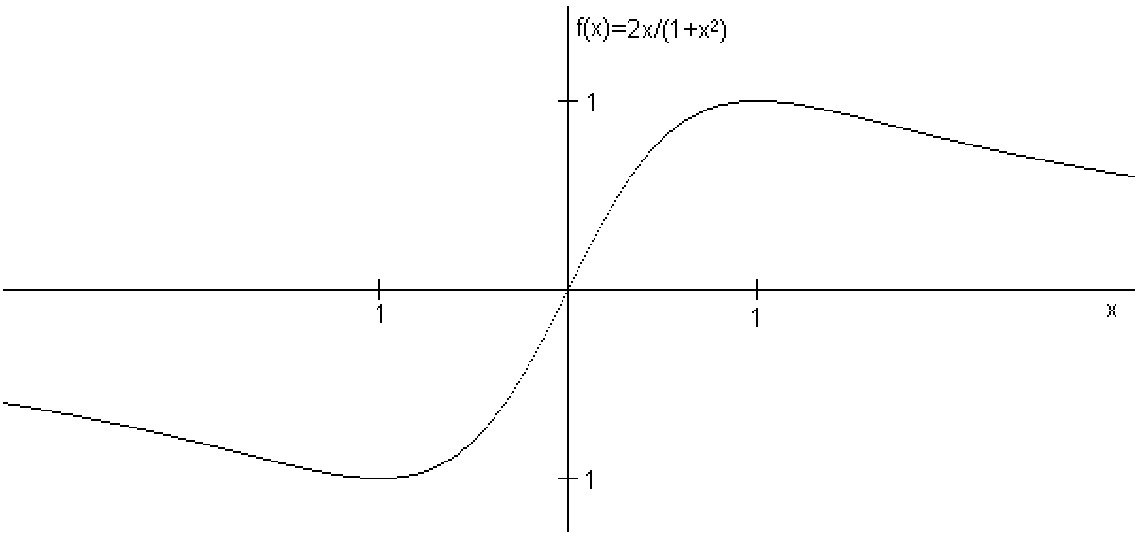
Actividad 6. Calculando para un valor **x** los valores de la función f(x) y de su derivada f '(x), obtener la ecuación de la recta tangente correspondiente (recta que pasa por el punto (x,f(x)) de pendiente f '(x)) y calcular el punto (v,0) en que corta al eje de abscisas,

v =



Discutir las dificultades que pueden encontrarse para aproximar la solución de la ecuación f(x)=0 aplicando reiteradamente el proceso anterior (**método de Newton**) y las precauciones que habría que adoptar.
Puede encontrarse un modelo de algoritmo en
http://www.uv.es/pla/Tutoria/mniq/algorit4.gif
Puede experimentarse gráficamente con un "applet" (adaptado para Netscape 4.5) en
http://www.uv.es/pla/java/Newton.html

Actividad 7.
Problema 7: Aplicar el método de Newton a la ecuación $f(x)=2x/(1+x^2)$ a partir del punto $x=1/3^{½}$ (hacer los cálculos sin aproximar). Interpretar el resultado a partir de la figura adjunta.



Actividad 8. Definiendo el **orden de convergencia** de una sucesión por la

Definición 8: Dados $p \in R^+$, $\alpha \in R$ y la sucesión de números reales $(x_n)_{n \in N}$ tal que $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n$, diremos que dicha sucesión tiene orden de convergencia p si y sólo si existe un número real $L \neq 0$ tal que:

$L = \lim_{n\to\infty} (x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)^p$
& si p=1, entonces $|L|<1$

y utilizando la expresión del *desarrollo en serie de Taylor* hasta el segundo orden del Teorema -5: Para todo intervalo [a,b] de números reales, toda función real continua y derivable hasta segundo orden en dicho intervalo, $f \in C^2([a,b],R)$, y todo par de números $\alpha, x \in [a,b]$, existe $\xi \in [\alpha, x]$ tal que:

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + f''(\xi)(x-\alpha)^2/2$$

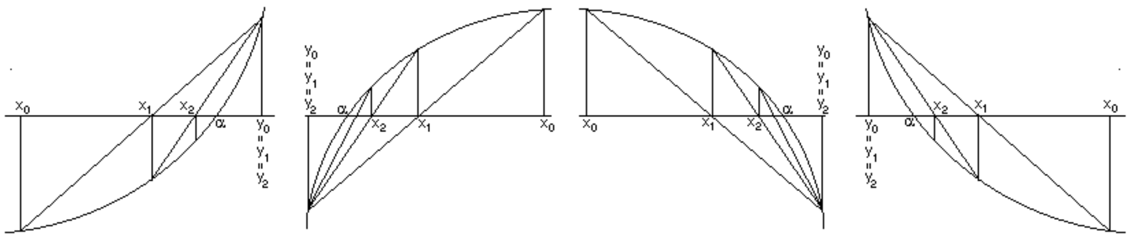
Demostrar que para la sucesión obtenida por el *método de Regula-Falsi* se cumple.

Teorema 16: Para todo $f \in C^2([x_0,y_0],R)$, $x_0,y_0 \in R$ tales que $f(x_0)\cdot f(y_0) \neq 0$, si para todo $n \in N$,
$x_{n+1} = x_n - f(x_n)(y_n-x_n)/(f(y_n)-f(x_n))$
$y_{n+1} = y_n$
& $\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n$
& para todo $x \in [x_0,y_0]$, $f''(x) \neq 0$,

Entonces existe $\eta \in [\alpha, y_0]$ tal que: $\lim_{n\to\infty} |x_{n+1}-\alpha|/|x_n-\alpha| = 1/(1+2f'(\alpha)/(f''(\eta)(y_0-\alpha)))$.

Actividad 9.

Problema 8: Examinar la figura adjunta para determinar cuál es, en las condiciones del Teorema 16, el signo de $f'(\alpha)/(f''(\eta)(y_0-\alpha))$.



Actividad 10. Demostrar el Teorema 17: Para toda $f \in C^2([x_0,y_0],R)$ con $x_0,y_0 \in R$ tales que $f(x_0)\cdot f(y_0) \neq 0$ & para todo $x \in [x_0,y_0]$, $f''(x) \neq 0$, el método de Regula-Falsi tiene orden de convergencia 1.

Actividad 11. Aplicando el desarrollo en serie de Taylor de f(x) hasta el segundo orden, así como el desarrollo en primer orden de f '(x), Teorema -6: Para todo intervalo [a,b] de números reales, toda función real continua y derivable hasta segundo orden en dicho intervalo, $f \in C^2([a,b],R)$, y todo par de números $\alpha, x \in [a,b]$, existe $\xi \in [\alpha, x]$ tal que $f'(x) = f'(\alpha) + f''(\xi)(x-\alpha)$.
Demostrar el Teorema 17: Para todo subconjunto A de R y toda $f \in C^2(A,R)$, $\alpha, x_0 \in A$, si para todo $n \in N$,

$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) \in A$
& $\alpha = \lim_{n \to \infty} x_n$
& $f(\alpha)=0$ & $f'(\alpha) \neq 0$ (*raíz simple*)
& $f''(\alpha) \neq 0$
Entonces el método de Newton tiene orden de convergencia 2. ¿Qué podría pasar si $f''(\alpha)=0$?

Actividad 12. Demostrar el Teorema 18: Para todo subconjunto A de R y toda $f \in C^2(A,R)$, $\alpha, x_0 \in A$, si para todo $n \in N$:
$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) \in A$
& $\alpha = \lim_{n \to \infty} x_n$
& $f(\alpha)=0$ & $f'(\alpha)=0$ (*raíz múltiple*)
Entonces el método de Newton tiene orden de convergencia 1.

Actividad 13. Utilizando la expresión del desarrollo en serie de Taylor hasta el orden m+1,
Teorema -7: Para todo intervalo [a,b] de números reales, toda función real continua y derivable hasta orden m+1 en dicho intervalo, $f \in C^{m+1}([a,b],R)$, y todo par de números $\alpha, x \in [a,b]$, existe $\xi \in [\alpha, x]$ tal que:

$f(x) = \sum_{i=0}^{m} f^{(i)}(\alpha)/m! + f^{(m+1)}(\xi)(x-\alpha)^{m+1}/(m+1)!$

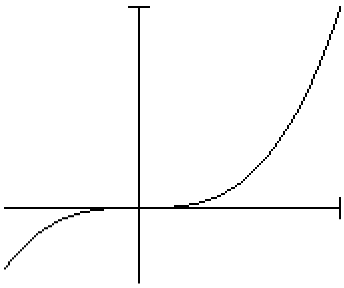
y recordando que: Teorema -8: Para todo $m \in N$, $(m+1)! = (m+1)\, m!$, demostrar el:
Teorema 19: Para todo subconjunto A de R y toda $f \in C^{m+1}(A,R)$, $\alpha, x_0 \in A$, si para todo $n \in N$,

$x_{n+1} = x_n - m \cdot f(x_n)/f'(x_n) \in A$ (**método de Newton modificado**)
& $\alpha = \lim_{n \to \infty} x_n$
& para todo i=0,1,...m-1, $f^{(i)}(\alpha)=0$ & $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$ (*raíz de multiplicidad* m)
& $f^{(m+1)}(\alpha) \neq 0$

Entonces la sucesión $(x_n)_{n \in N}$ tiene orden de convergencia 2. ¿Qué podría pasar si $f^{(m+1)}(\alpha)=0$?

Actividad 14.

Problema 9: Aplicar el método de Newton (modificado en su caso) a la ecuación $f(x) = x^3 = 0$, representada en la figura adjunta.
¿Cuál podría ser su orden de convergencia?



Trabajo 3 (para su realización en equipo)**:**
Obtener algebraicamente las soluciones de la ecuación $x^2-5x+6=0$.
Aplicar el método de Newton para aproximarse a una solución α a partir del valor inicial $x_0=1$ hasta llegar a una distancia menor a 0'1 de dicha solución.
Calcular:
$\lim_{x_n\to\alpha} (x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)^2$ para comprobar que la sucesión generada por el método de Newton a partir de $x_0=1$ tiene orden de convergencia 2 .