Tema 4. Obtener una solución aproximada de la integral definida de una función, $\int_a^b f(x)dx$:

Objetivos:

1. Obtener unos pesos W_k independientes de la función f(x) tales que sumando su producto por los correspondientes valores de la función en determinados nodos x_k, $\sum_{i=0}^{m} W_k f(x_k)$, proporcione la integral exacta para polinomios hasta un cierto grado, y una buena aproximación para otras funciones.
2. Aprender a acotar el error de dicha aproximación expresándolo como el producto de un factor C independiente de la función f(x) por la derivada de un cierto orden **r** de la función en algún punto ξ del intervalo de integración [a,b] , $Cf^{(r)}(\xi)$.
3. Estudiar el caso de nodos equidistantes, $x_k=a+kh$ (Fórmula de Newton-Cotes).
4. Aprender a mejorar la aproximación aumentando el número de nodos.
5. Aprender a mejorar la aproximación utilizando valores de la derivada de la función.
6. Aprender a mejorar la aproximación escogiendo de forma adecuada los nodos (integración gaussiana).
7. Aprender a valorar comparativamente distintos métodos teniendo en cuenta tanto su máximo error de aproximación como su coste de computación.

Metodología:

- Utilizar el método de coeficientes indeterminados para obtener tanto los pesos W_k como el factor C del error, a partir de la integral exacta de potencias simples y resolviendo en grupos pequeños los correspondientes sistemas de ecuaciones para exponer públicamente a continuación los resultados obtenidos.
- Aplicar las fórmulas obtenidas para aproximar la integral de determinadas funciones trabajando en grupos pequeños y exponiendo públicamente a continuación los resultados obtenidos.
- Trabajar en aula de informática elaborando programas para la aproximación de integrales por distintos métodos, valorando y comparando los resultados obtenidos.

Actividades:

Actividad 1. Teniendo en cuenta la
<u>Definición 14:</u> Siendo f:[a,b]→R una función integrable, llamaremos **integral numérica polinómica** de **f** en los nodos x_k tales que $a\leq x_0<...<x_m\leq b$ a la integral en el intervalo [a,b] del polinomio interpolador de grado menor o igual que **m** en los puntos $\{(x_k,f(x_k))\}_{k=0,1...m}$ y utilizando la expresión del polinomio interpolador proporcionada por el Método de Lagrange, justificar la existencia de unos pesos W_k independientes de la función f(x) con los cuáles $\sum_{i=0}^{m} W_k f(x_k)$ sea su integral numérica polinómica.
Actividad 2. Teniendo en cuenta que una integral numérica polinómica en **m+1** nodos es igual a la integral exacta para polinomios de grado menor o igual que **m**, encontrar un

sistema de ecuaciones para la obtención de los pesos Wk y demostrar que si para todo $i \neq k$, $x_i \neq x_k$, dicho sistema de ecuaciones tiene solución única.

Actividad 3.
Deducir la fórmula de la integral numérica polinómica tomando como nodos los extremos del intervalo (**Fórmula del Trapecio**), T=

Actividad 4.
Problema 15: Aplicar la Fórmula del Trapecio para obtener una aproximación a la integral de $(1+x^3)^{½}$ entre 0 y 10 (ver Figura en http://www.uv.es/pla/Tutoria/mniq/p15.gif).

Actividad 5. Teniendo en cuenta la expresión del error de la interpolación polinómica de grado menor o igual que **m** dada por el Teorema -12, así como que
Teorema -13: Para toda función integrable $f:[a,b]\rightarrow R$, $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.
Teorema -14: Para todo par de funciones integrables $f:[a,b]\rightarrow R$, $g:[a,b]\rightarrow R^+$, existe $\xi \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\, dx$$

Demostrar el Teorema 25: El valor absoluto del error de la integral numérica polinómica en m+1 nodos puede acotarse por el producto de dos factores, uno de los cuáles depende únicamente de los nodos, y el otro depende únicamente de la derivada de orden m+1 en algún punto ξ del intervalo de integración [a,b].

Actividad 6. Suponiendo que el error de un método de integración aproximada sea de la forma: $\varepsilon = C \cdot f^{(r)}(\xi)$ para algún punto ξ del intervalo de integración [a,b], deducir cómo utilizar la función $f(x)=x^r$ para obtener el valor de C.
NOTA: en caso de obtenerse C=0 puede inferirse que el método es exacto para dicha función, y deberá repetirse el proceso sustituyendo **r** por **r+1** .

Actividad 7.
Obtener la expresión del error para la Fórmula del Trapecio, ε_T =
Indicar para qué polinomios será exacta dicha fórmula.

Actividad 8.
Problema 16: Acotar $\int_0^{10} (1+x^3)^{½}dx$ sabiendo que $|f''(x)|<1'468$ en dicho intervalo.

Actividad 9. Teniendo en cuenta el
Teorema -15: $\int_a^b f(x)\, dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))\, u'dt$, demostrar el Teorema 26: En el caso de nodos equidistantes $x_k=a+kh$, con k=0,1...m, h=(b-a)/m, demostrar que los pesos para el cálculo de la correspondiente integral numérica polinómica (pesos de **Newton-Cotes**) tienen la forma $W_k=hW'_k(m)$, donde $W'_k(m)$, que son los pesos correspondientes al caso h=1, sólo dependen de **k** y de **m** (pero no de **a** y de **b**).
Puede utilizarse para la demostración la expresión de los pesos W_k obtenida en la Actividad 1, aplicando en la correspondiente integral el cambio de variable x=a+th .
Actividad 10. Obtener los pesos de Newton-Cotes para m=2 y el intervalo [0,2]. A partir de los mismos, obtener la fórmula general (**Fórmula de Simpson**) para la integral

numérica polinómica en los nodos $\{a, a+h, a+2h\} = \{a, (a+b)/2, b\}$,
S =

Actividad 11.
Problema 17: Aproximar mediante la Fórmula de Simpson $\int_{-1}^{1} e^{x2}\, dx$.

Actividad 12. Teniendo en cuenta el

Teorema -16: Para todo $f \in C^r(R\to R)$, $x \in C^1(R\to R)$, $\frac{d^r f}{dt^r}(x(t)) = (dx/dt)^r \frac{d^r f}{dx^r}(x)$

Así como el Teorema -15 y el Teorema 26, demostrar el Teorema 27: Si la expresión del error para aproximar $\int_0^m f(t)dt$ con nodos equidistantes y h=1 es:

$\varepsilon' = (C'\, d^r f / dt^r)(\zeta)$ para algún $\zeta \in [0,m]$,
Entonces la expresión general del error para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ con nodos equidistantes y $h=(b-a)/m$ será:

$$\varepsilon = C \frac{d^r f}{dx^r}(\xi) \text{ para algún } \xi \in [a,b] \text{ con } C=h^{r+1} C'$$

Actividad 13. Obtener la expresión del error para la Fórmula de Simpson para el intervalo [0,2] (con h=1), y a partir de ella obtener la expresión general del error para la Fórmula de Simpson para el intervalo [a,b] (con h=(b-a)/2),
ε_S =
Indicar para qué polinomios será exacta dicha fórmula.

Actividad 14.
Problema 18: Acotar el error de la Fórmula de Simpson aplicada a $\int_{-1}^{1} e^{x2}\, dx$.
Valorarlo.

Actividad 15. Teniendo en cuenta la Definición 15: Siendo $f:[a,b]\to R$ una función integrable, llamaremos **integral numérica compuesta** de grado **m** en los mM+1 nodos $\{a+kh\}_{k=0,1\ldots mM}$, con $h=(b-a)/(mM)$, a: $\sum_{i=0}^{M-1} N_m(i)$, donde $N_m(i)$ es la fórmula de Newton-Cotes de grado **m** para la integración numérica polinómica de la función f(x) en el intervalo [a+imh,a+(i+1)mh] ,
demostrar el Teorema 28: Para toda función integrable $f:[a,b]\to R$, su integral numérica compuesta de grado 2 en los 2M+1 nodos $\{a+kh\}_{k=0,1\ldots 2M}$, con $h=(b-a)/(2M)$ (**regla de Simpson**), viene dada por

$$[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + \ldots + 2f(b-2h) + 4f(b-h) + f(b)]\, h/3$$
$$= [f(a) + f(b) + \sum_{i=1}^{M-1} 2f(a+2ih) + \sum_{i=0}^{M-1} 4f(a+(2i+1)h)](b-a)/(6M)$$

Actividad 16. Teniendo en cuenta el
Teorema -17: Para toda función continua $f:[a,b]\to R$ y todo conjunto de puntos $\xi_i \in [a,b]$, $i=1...n$, existe $\xi \in [a,b]$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = nf(\xi)$$

Demostrar el Teorema 29: Para toda $f \in C^4([a,b],R)$, el error de la regla de Simpson para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ viene dado por:
$\varepsilon_{RS} = - f^{(4)}(\xi)(b-a)^5/(2880M^4)$ para algún $\xi \in [a,b]$

Actividad 17.
Problema 19: ¿Qué incremento **h** deberemos tomar para obtener una aproximación a $\int_{-1}^{1} e^{x2} dx$ con un error menor a 0'01 mediante la regla de Simpson?

Actividad 18. Calcular los pesos adecuados para que $W'_0 f(0)+W'_1 f(1)+W'_2 f'(0)+W'_3 f'(1)$ nos dé el valor exacto de $\int_0^1 f(t)dt$ para polinomios hasta el tercer grado. A partir de dichos pesos, y teniendo en cuenta el Teorema -18: Para todo $f \in C^r(R\to R)$, $x \in C^1(R\to R)$, $df/dt = (df/dx)\cdot(dx/dt)$, obtener la fórmula general (**Fórmula del Trapecio Corregida**) que resulta de sustituir la integral $\int_a^b f(x)dx$ por la integral del polinomio interpolador de Hermite para el que coinciden los valores de la función y de su primera derivada en los extremos del intervalo,
TC=
Comparar con la fórmula obtenida en la Actividad 3 y justificar por qué se llama Fórmula del Trapecio *Corregida*. ¿En qué caso ambas fórmulas coincidirán?

Actividad 19. Obtener la expresión del error para la Fórmula del Trapecio Corregida para el intervalo [0,1] (con h=1), y a partir de ella obtener la expresión general del error para la Fórmula del Trapecio Corregida para el intervalo [a,b] (con h=b-a),
ε_{TC} =
Indicar para qué polinomios será exacta dicha fórmula.

Actividad 20.
Problema 20: Acotar $\int_0^{10} (1+x^3)^{½}dx$ sabiendo que $|f^{(4)}(x)|<10$ en dicho intervalo (ver Figura en http://www.uv.es/pla/Tutoria/mniq/p15.gif).

Actividad 21. Demostrar el Teorema 30: Para toda $f \in C^4([a,b],R)$,
$[f(a)+f(b)]h/2 + [f'(a)-f'(b)]h^2/12 + h\sum_{i=1}^{M-1} f(a+ih)$ con $h=(b-a)/M$ (**regla del Trapecio Corregida**). Da una aproximación a $\int_a^b f(x)dx$ con un error $\varepsilon_{RTC} = f^{(4)}(\xi)(b-a)^5/(720M^4)$ para algún $\xi \in [a,b]$.

Actividad 22. Teniendo en cuenta que el coste computacional del cálculo numérico aproximado de una integral puede medirse por el número de veces que se evalúa la función f(x) o su derivada f '(x), comparar el coste computacional de la regla de Simpson y la regla del Trapecio Corregida con el mismo valor de M. ¿Cuál sería el coste computacional de la regla de Simpson con M=11? ¿Para qué valor de M la regla del Trapecio Corregida tendría el mismo coste computacional? Comparar la estimación de los errores de ambas reglas con el mismo coste computacional.

Actividad 23.
Problema 21: ¿Qué incremento **h** deberemos tomar para obtener una aproximación a $\int_{-1}^{1} e^{x^2} dx$ con un error menor a 0'01 mediante la regla del Trapecio Corregida? Comparar su coste computacional con el del Problema 19 (Actividad 17).
¿En qué casos será preferible utilizar la regla del Trapecio Corregida?

Actividad 24. Calcular los pesos W'_0 y W'_1 y el valor de **c** para los cuáles $W'_0 f(-c) + W'_1 f(c)$ da el valor exacto de $\int_{-1}^{1} f(t)dt$ para polinomios hasta el segundo grado.
Comprobar que {-c, c} son las **raíces del polinomio de Legendre** de 2º grado,
$P_2(t)=(3t^2-1)/2$, que cumple las condiciones de ortogonalidad.
$\int_{-1}^{1} P_2(t)P_1(t)dt = 0$
$\int_{-1}^{1} P_2(t)P_0(t)dt = 0$
con $P_0(t)=1$ y $P_1(t)=t$ polinomios de Legendre que cumplen a su vez
$\int_{-1}^{1} P_1(t)P_0(t)dt = 0$

Actividad 25. Obtener la expresión del error de la integral numérica polinómica de $\int_{-1}^{1} f(t)dt$ en las raíces del polinomio de Legendre de 2º grado. Indicar para qué polinomios será exacto dicho método.

Actividad 26. Obtener una fórmula general para la integración de $\int_a^b f(x)dx$ realizando el cambio $x=(a+b)/2 + (b-a)t/2$ y utilizando la integral numérica polinómica de $\int_{-1}^{1} f(t)dt$ en las raíces del polinomio de Legendre de 2º grado,

L2 =
con un error
ε_{L2} =

Actividad 27.
Problema 22: Aproximar, utilizando la fórmula derivada de la integración numérica polinómica en las raíces del polinomio de Legendre de 2º grado,
a) $\int_{-1}^{1} e^{x^2} dx$
b) $\int_0^{10} (1+x^3)^{½}dx$
Acotar los correspondientes errores.

Actividad 28. Demostrar el
Teorema 31: Para toda $f \in C^4([a,b],R)$,

$(h/2)\sum_{i=0}^{M-1} [f(a+(i+1/2-1/(2\cdot 3^{½}))h) + f(a+(i+1/2+1/(2\cdot 3^{½}))h)]$ con $h=(b-a)/M$

Da una aproximación a $\int_a^b f(x)dx$ con un error: $\varepsilon_{RL2} = f^{(4)}(\xi)(b-a)^5/(4320M^4)$ para algún $\xi \in [a,b]$
Valorar para qué valores de M puede ser preferible utilizar esta fórmula.

Trabajo 4 (para su realización en equipo)**:**
Obtener los coeficientes W_0, W_1, W_2 y W_3 que hacen que

$$W_0\, f(a) + W_1\, f(a+h) + W_2\, f(a+2h) + W_3\, f(b),$$

con h=(b-a)/3, dé el resultado exacto de la integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

si f(x) es un polinomio de grado menor o igual que 3 (Fórmula de Newton-Cotes para m=3). Obtener la expresión del error para cualquier función analítica f(x).