Tema 0: Estimar los distintos tipos de error que se producen en la resolución de problemas por métodos numéricos:

Objetivos:

1. Comprender la diferencia entre errores intrínsecos e instrumentales.
2. Comprender los conceptos de error absoluto y error relativo.
3. Entender cómo tratan los ordenadores los números no enteros.
4. Estimar cuántas cifras significativas se conocen de una determinada cantidad.

Metodología:

- Debatir un texto en grupos pequeños, poniendo posteriormente en común el resultado del debate.
- Realización de tareas en grupos pequeños, exponiendo públicamente a continuación sus conclusiones.

Actividades:

Actividad 1. Debatir en grupos pequeños el siguiente texto, escogiendo previamente un portavoz de cada grupo para exponer posteriormente las conclusiones y en su caso las dudas suscitadas:

*Los métodos numéricos permiten obtener soluciones aproximadas a determinados problemas. Por evaluar estas soluciones, es importante tener una estimación del **error**.*

*Hay errores **intrínsecos** al método utilizado. Normalmente estos errores se pueden hacer tan pequeños como se quiera, a través de aproximaciones sucesivas. Aun así, al disponer de un tiempo finito por realizar los cálculos, debemos conformarse con aproximar con un cierto margen de error. Hará falta, pues, un compromiso entre la cota de error admitida y el tiempo máximo de cálculo que nos podemos permitir.*

*Naturalmente, serán preferibles aquellos métodos que permitan aproximar hasta una determinada cota de error en menos tiempo, los cuales diremos que tienen una **velocidad de convergencia** mayor. En los métodos que aproximan iterativamente a través de una serie de pasos sucesivos, podemos mesurar esta velocidad por la inversa del número de pasos necesarios. Aun así, desde el punto de vista del tiempo de cálculo hace falta valorar también la complejidad de los cálculos a realizar en cada paso.*

*A los efectos anteriores, normalmente trabajaremos con el **error absoluto**, definido como el valor absoluto de la diferencia entre el valor exacto* **x** *y la aproximación* **x**, Definición 1: |□ ε = | x - x

Naturalmente, al desconocer el valor exacto el único que podremos hacer es estimar el error, dando una cota superior para el mismo.

Hay también ***errores instrumentales*** *debidos al instrumento de cálculo utilizado. En particular, las calculadoras y ordenadores digitales trabajan con un número finito de cifras y por lo tanto no utilizan números con infinitas cifras decimales, como los irracionales o los fraccionarios "decimales periódicos". Por ejemplo, aproximarían* 1/3 = 0' 3 ≈ 0'333333 *, con un número de cifras decimales dependiente de la precisión del instrumento.*

Por aproximar el cálculo de los números racionales y reales, los ordenadores trabajan con números decimales en ***punto flotante****, tratando por separado las cifras significativas (****mantisa****) y el orden de magnitud (****característica****). Por ejemplo,* 0'0000000000000235410347= $2'35410347.10^{-14}$ *se expresará como* 2.35410347E-14.

Comoquiera que la principal limitación está en el número de cifras significativas admitidas, lo que nos importará será el ***error relativo*** *del valor aproximado* □**x**□ *respecto del valor exacto* **x***, definido cómo*

Definición 2: ε_r | / | x |□= | x – x

Actividad 2. Obtener una fórmula que conociendo el error relativo y la mantisa nos proporcione el número de cifras significativas exactas que conocemos, de acuerdo con la Definición 3: Diremos que **x**=aEb (con 1≤ a□<10) aproxima a **x** con un número entero de **k** cifras significativas si y sólo si $\varepsilon_r < 0'5 \cdot 10^{-k+1}/a$ (sugerencia: despejar **k** en esta inecuación y tomar su parte entera) La obtención de dicha fórmula nos permitirá completar el enunciado del siguiente: Teorema 1: **x**=aEb aproximará a□ **x** con un número de cifras significativas exactas **k** igual al mayor número entero menor que ¿Como podríamos interpretar el caso en que **k** resultara negativo?

Actividad 3.

Problema 1: calcular el error absoluto y relativo en los siguientes casos:

= 2.35410347E-14, x =□a) x 2.35410343E-14

= 2.35410347E16, x =□b) x 2.35410343E16

¿Con cuántas cifras significativas aproxima **x** a□ **x**?

Trabajo 1 (para su realización en equipo)**:**

a) Ampliar la clasificación de los errores planteada en la Actividad 1 a partir de la bibliografía recomendada.

b) Poner distintos ejemplos de aproximación de **x** a□ **x** con distintos errores absolutos y relativos y calcular el número de cifras significativas con que se aproxima en cada caso. Evaluar de qué depende dicho número. Considerar algún caso en que el error relativo sea mayor a 0'5 y valorarlo.