Tema IV. Sistemas ópticos centrados en aproximación paraxial

- Generalidades de los sistemas ópticos centrados
- Planos focales y planos principales
- Trazado de rayos
- Distancia focal y potencia de un sistema óptico
- Planos nodales
- Ecuaciones de correspondencia

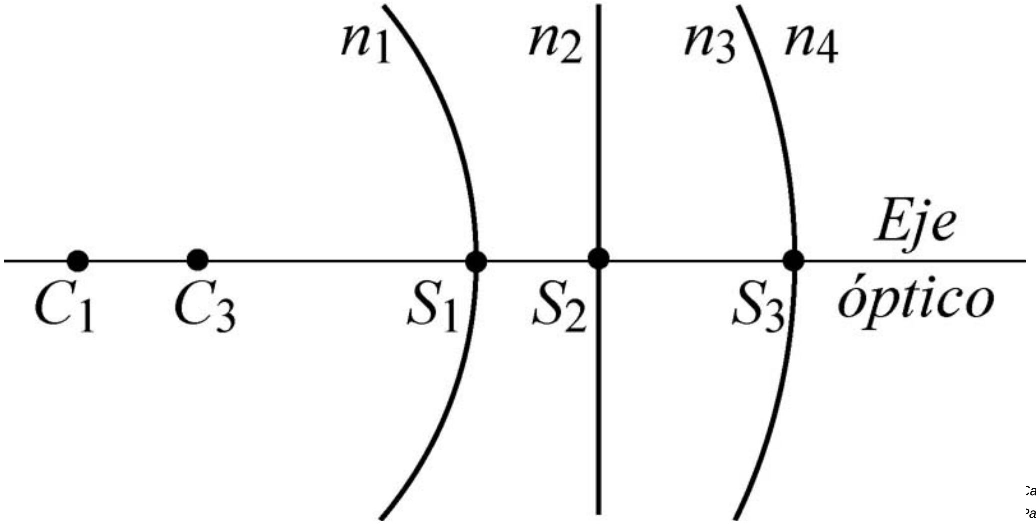
Carlos Zapata Rodríguez
Pascuala García Martínez

Sistemas ópticos centrados

Generalidades

- Un conjunto de interfases que separan medios de distintas características electromagnéticas (dioptrios y espejos) constituyen un **sistema óptico**.

- Un **sistema centrado** es todo acoplamiento de dioptrios y/o espejos esféricos (o planos) con simetría de revolución a lo largo de un eje (**eje óptico** del sistema), es decir, sus centros están alineados a lo largo del eje óptico.



Sistemas ópticos centrados

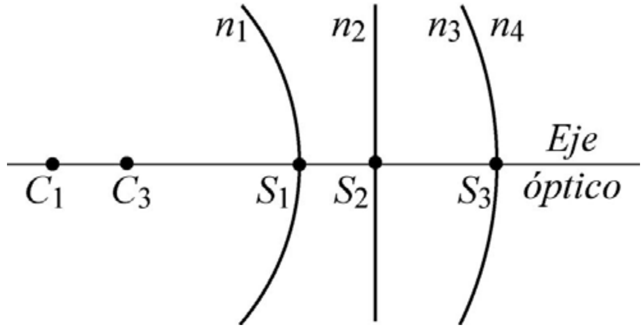
Generalidades

- El **eje óptico** de un sistema centrado queda determinado por la trayectoria de un rayo que no se desvía al atravesarlo (incidencia normal):

  - Para una interfase plana, el eje óptico es cualquier recta perpendicular a la superficie.

  - Para una interfase esférica, el eje óptico es cualquier recta que pasa por el centro de curvatura

  - Para un conjunto de interfases esféricas, existe un único eje óptico si los centros de curvatura están alineados.



Carlos Zapata Rodríguez
Pascuala García Martínez

Sistemas ópticos centrados

Generalidades

Clasificación de los sistemas ópticos formadores de imágenes:

- Un **sistema dióptrico** es aquel sistema óptico formado por superficies refractantes (dioptrios) solamente.
- Un **sistema catóptrico** es aquel sistema óptico formado sólo por espejos.
- Un **sistema catadióptrico** es un sistema óptico formado por dioptrios y espejos.

Sistemas ópticos centrados

Generalidades

Un **sistema óptico perfecto** debe cumplir las siguientes **condiciones** establecidas por **Maxwell**:

- Condición de **estigmatismo** (aproximado).
- **Correspondencia plano a plano**: Si los puntos objeto están contenidos en un plano perpendicular al eje, los puntos imagen también están contenidos en un plano perpendicular.
- Razón de **semejanza transversal** invariable: Si dos puntos objeto contenidos en un plano transversal distan una cantidad *y*, sus puntos imagen distan una cantidad *y'* que no varía independientemente de la posición de los puntos objeto.

$$\beta' = \frac{y'}{y}$$

Sistemas ópticos centrados

Generalidades

Un **sistema óptico perfecto** debe cumplir las siguientes **condiciones** establecidas por **Maxwell**:

- Condición de **estigmatismo** (aproximado)
- **Correspondencia plano a plano**
- Razón de **semejanza transversal** invariable

Sistemas ópticos centrados

Generalidades

- El *espejo plano* es un sistema óptico perfecto.

- El *dioptrio plano* también es un sistema óptico perfecto, ya que cumple la condición de estigmatismo (aproximado) bajo la aproximación de Gauss, tiene una correspondencia plano a plano y la razón de semejanza, denominado **aumento lateral**, es la unidad.

$$\beta' = \frac{y'}{y} = 1$$

- Sin embargo, no toda combinación de espejos y dioptrios planos forma un sistema óptico perfecto. Para ello exigimos que el sistema sea centrado, es decir, que se encuentre un eje óptico (Contraejemplo: Prisma óptico).

Sistemas ópticos centrados

Generalidades

Para que una sola superficie se considere sistema óptico perfecto, ya sea dioptrio o espejo, exigimos condiciones para aplicar la **aproximación de Gauss**:

- Dioptrio/espejo con superficie activa pequeña.
  - Superficie de extensión pequeña
  - Uso de **diafragmas (de apertura)**: pupila ocular
- Objeto plano perpendicular al eje óptico y centrado, de pequeña dimensión activa.
  - Objeto de extensión pequeña
  - Uso de **diafragmas (de campo)**: retina ocular

Sistemas ópticos centrados

Generalidades

Propiedades generales de los sistemas centrados dentro de la aproximación de Gauss:

- En primer lugar debemos exigir que:

    - todas las interfases tengan una superficie activa pequeña, y que

    - el objeto sea plano, perpendicular al eje óptico y centrado, con pequeña dimensión activa.

Sistemas ópticos centrados

Generalidades

Propiedades generales de los sistemas centrados dentro de la aproximación de Gauss:

- Bajo estas premisas, podemos afirmar que **el sistema acoplado** cumple las condiciones de sistema óptico perfecto:

  - Condición de **estigmatismo** (aproximado).
  - Correspondencia **plano a plano.**
  - Razón de **semejanza transversal** invariable.

$$\beta' = \frac{y_k'}{y_1} = \frac{y_k'}{y_k}\frac{y_{k-1}'}{y_{k-1}}\cdots\frac{y_2'}{y_2}\frac{y_1'}{y_1} = \beta_k'\beta_{k-1}'\ldots\beta_2'\beta_1'$$

$$y_1' = y_2$$

$$y_{k-1}' = y_k$$

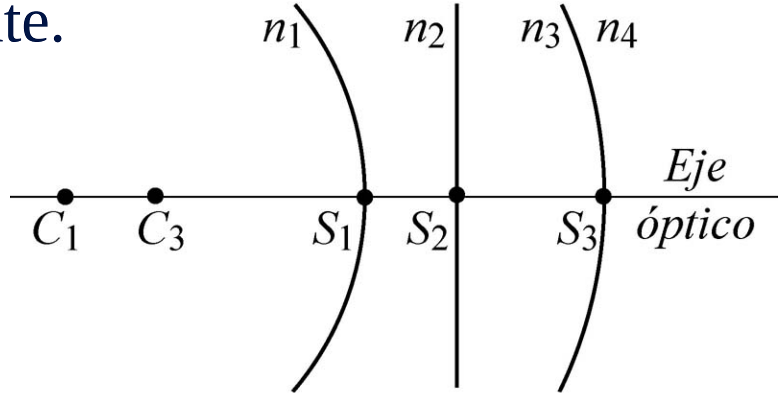
Sistemas ópticos centrados

Generalidades

Propiedades generales de los sistemas centrados dentro de la aproximación de Gauss:

- La imagen que genera un elemento del sistema óptico actúa como objeto para el siguiente sistema que la luz ha de atravesar, denominada **imagen intermedia**.

- Como consecuencia, existe una **correspondencia objeto-imagen** que es **única** dentro de todo el sistema: a cada plano objeto le corresponde un plano imagen y solo uno, y recíprocamente.



Sistemas ópticos centrados

Generalidades

Propiedades generales de los sistemas centrados dentro de la aproximación de Gauss:

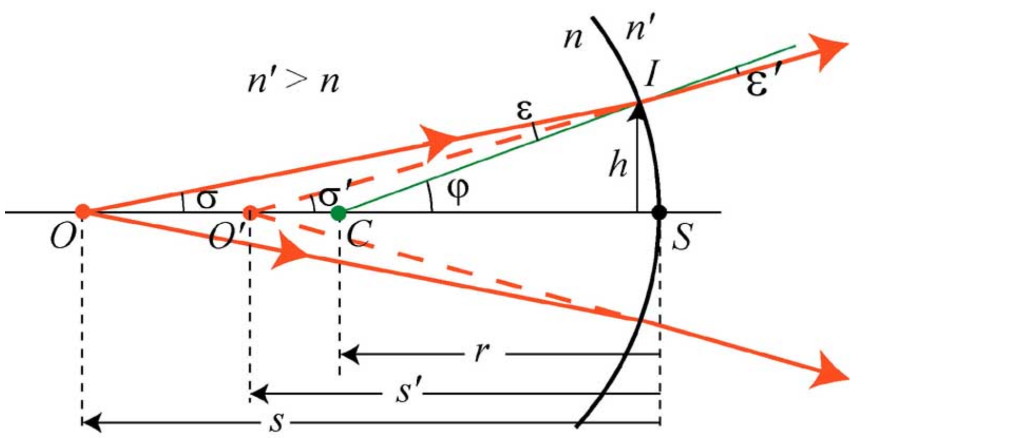
- La **relación de Lagrange-Helmholtz** se puede aplicar directamente entre el espacio objeto y el espacio imagen para un sistema de k superficies.

$$\left.\begin{aligned} n_1 y_1 \sigma_1 &= n'_1\, y'_1\, \sigma'_1 \\ n_2 y_2 \sigma_2 &= n'_2\, y'_2\, \sigma'_2 \\ &\ldots \\ n_k y_k \sigma_k &= n'_k\, y'_k\, \sigma'_k \end{aligned}\right\}$$

$$n_1' = n_2 \qquad y_1' = y_2 \qquad \sigma_1' = \sigma_2$$

$$n_{k-1}' = n_k \qquad y_{k-1}' = y_k \qquad \sigma_{k-1}' = \sigma_k$$

$$\boxed{n_1 y_1 \sigma_1 = n'_k\, y'_k\, \sigma'_k}$$



Carlos Zapata Rodríguez
Pascuala García Martínez

Universitat de València OpenCourseWare

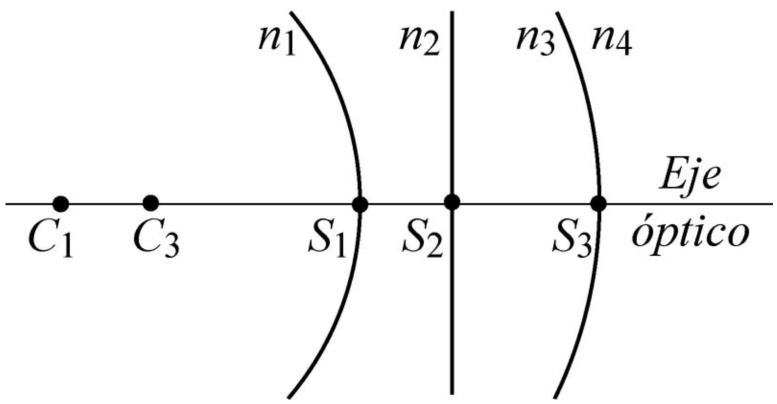
Sistemas ópticos centrados

Generalidades

- El invariante de Lagrange-Helmholtz nos da idea de que no es necesario describir la formación de imágenes **en cascada**, a través de todas las interfases que componen el sistema, para obtener la imagen final.

$$n_1 y_1 \sigma_1 = n'_k \, y'_k \, \sigma'_k$$

- Tenemos acceso al espacio imagen sin tener que pasar por los espacios intermedios.



Carlos Zapata Rodríguez
Pascuala García Martínez

Tema IV. Sistemas ópticos centrados en aproximación paraxial

- Generalidades de los sistemas ópticos centrados
- Planos focales y planos principales
- Trazado de rayos
- Distancia focal y potencia de un sistema óptico
- Planos nodales
- Ecuaciones de correspondencia

Sistemas ópticos centrados

Planos focales y principales

- En todo sistema óptico centrado existen tres pares de puntos y planos conjugados de especial relevancia:
    - los focos y planos **focales**,
    - los puntos y planos **principales**, y
    - los puntos y planos **nodales**.
- Todos ellos se denominan **elementos cardinales** del sistema.

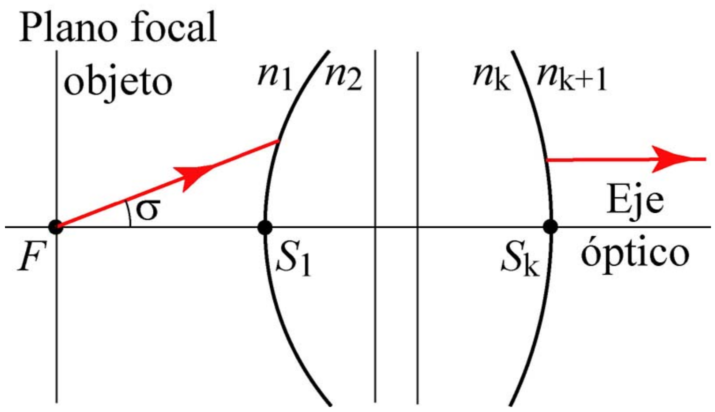
Sistemas ópticos centrados

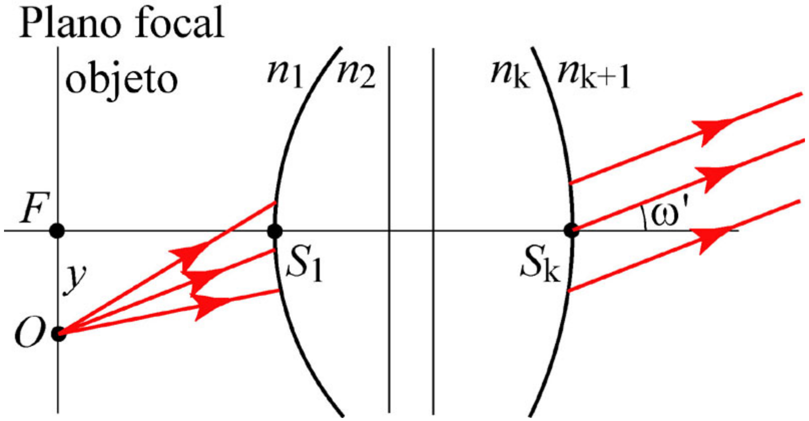
Planos focales y principales

- Para un sistema óptico, el **punto focal objeto** es aquel que, emergiendo los rayos del mismo, a la salida del sistema se propagan paralelos al eje.

$$\forall \sigma, \sigma' = 0$$

$$\gamma' = 0 \ y \ \beta' \rightarrow \infty$$





Carlos Zapata Rodríguez
Pascuala García Martínez

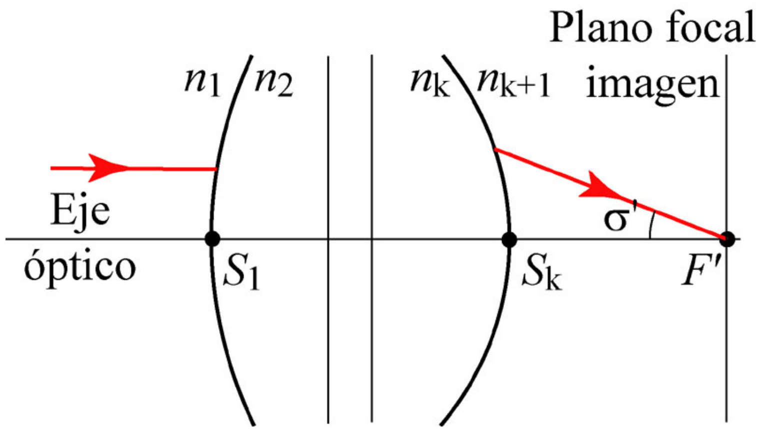
Sistemas ópticos centrados

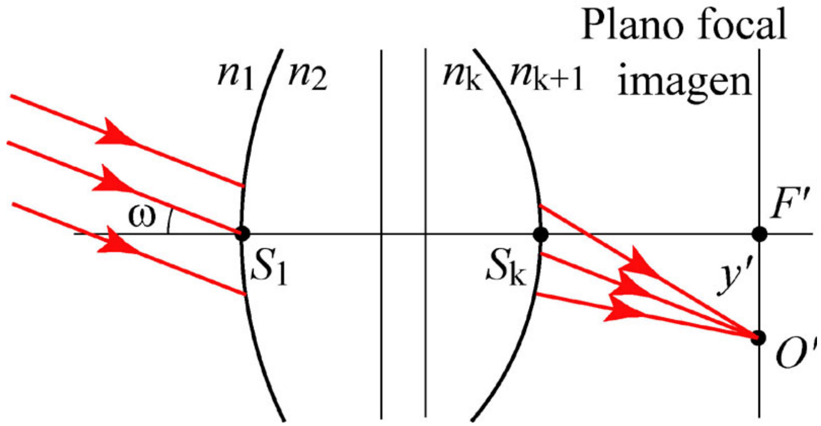
Planos focales y principales

- Para un sistema óptico, el **punto focal imagen** es la imagen de un punto objeto en eje situado a distancia infinita del sistema.

$$\forall \sigma', \sigma = 0$$

$$\gamma' \to \infty \ y \ \beta' = 0$$



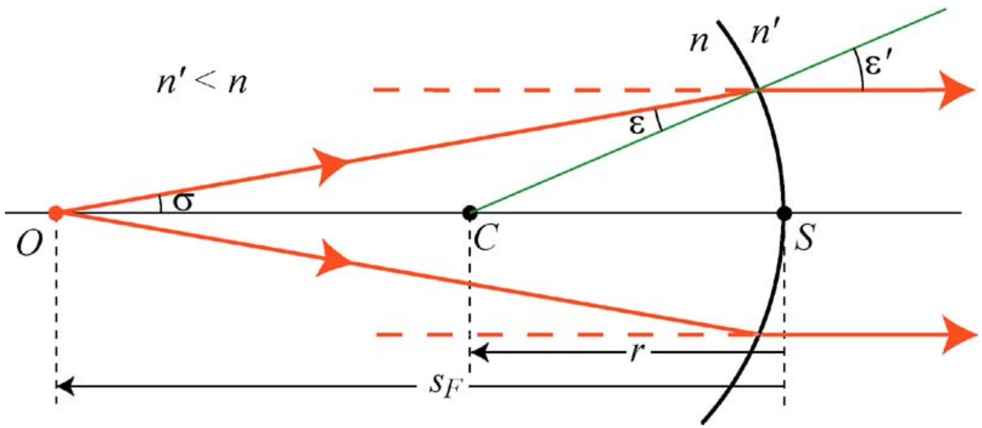


Carlos Zapata Rodríguez
Pascuala García Martínez

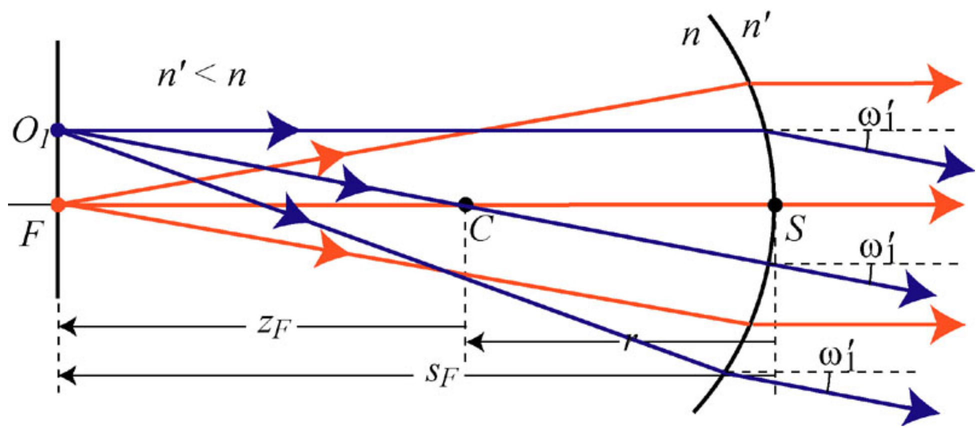
Sistemas ópticos centrados

Planos focales y principales

- Ya conocemos el **punto focal objeto** de un dioptrio esférico:



$$s_F = \frac{n}{n-n'}\,r$$



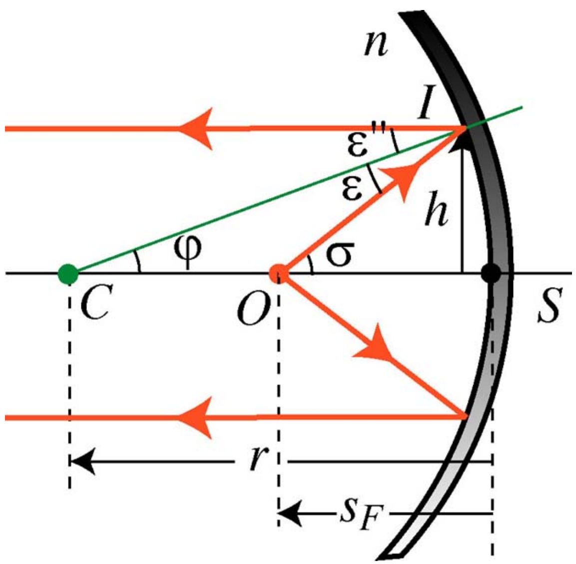
$$\omega'_1 = \left(1 - \frac{n}{n'}\right)\frac{y}{r}$$

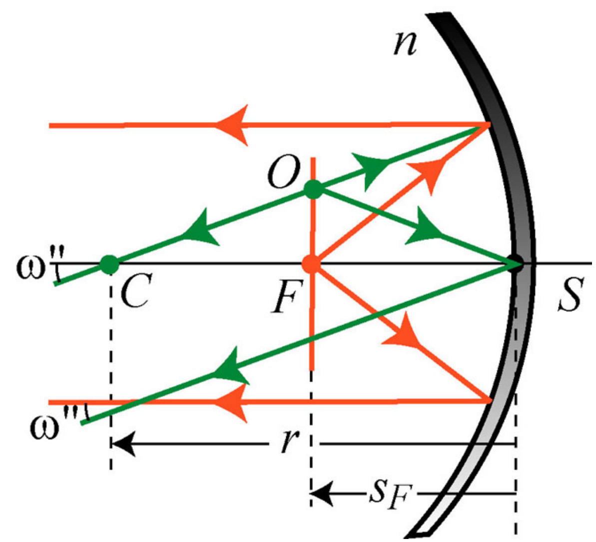
Carlos Zapata Rodríguez
Pascuala García Martínez

Sistemas ópticos centrados

Planos focales y principales

- Ya conocemos el **punto focal objeto** de un espejo esférico:





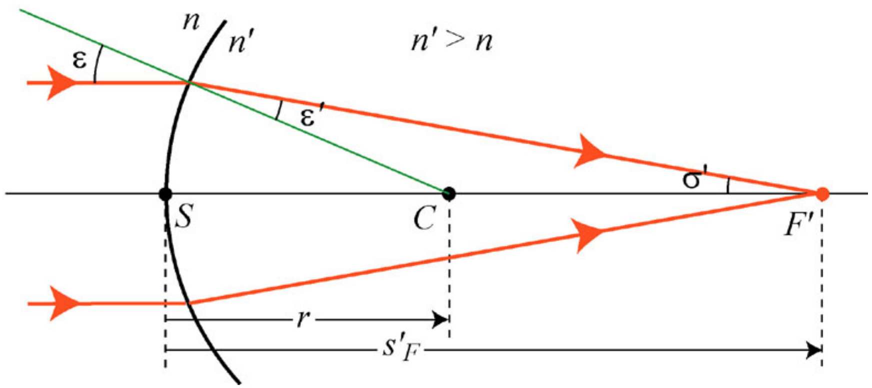
$$s_F = \frac{r}{2}$$

$$\omega'' = 2\frac{y}{r}$$

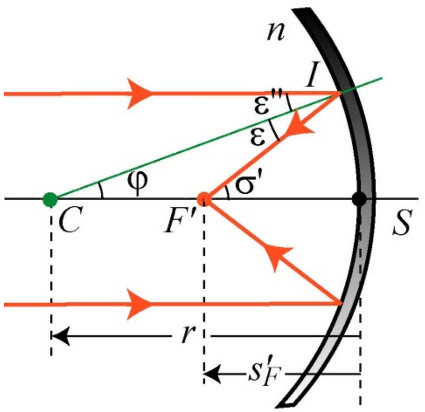
Sistemas ópticos centrados

Planos focales y principales

- El **punto focal imagen** de una interfase esférica:



$$\left.\begin{aligned} s'_F &= \frac{n'}{n'-n}\,r \\ \omega_1 &= \left(1-\frac{n'}{n}\right)\frac{y'}{r} \end{aligned}\right\}$$

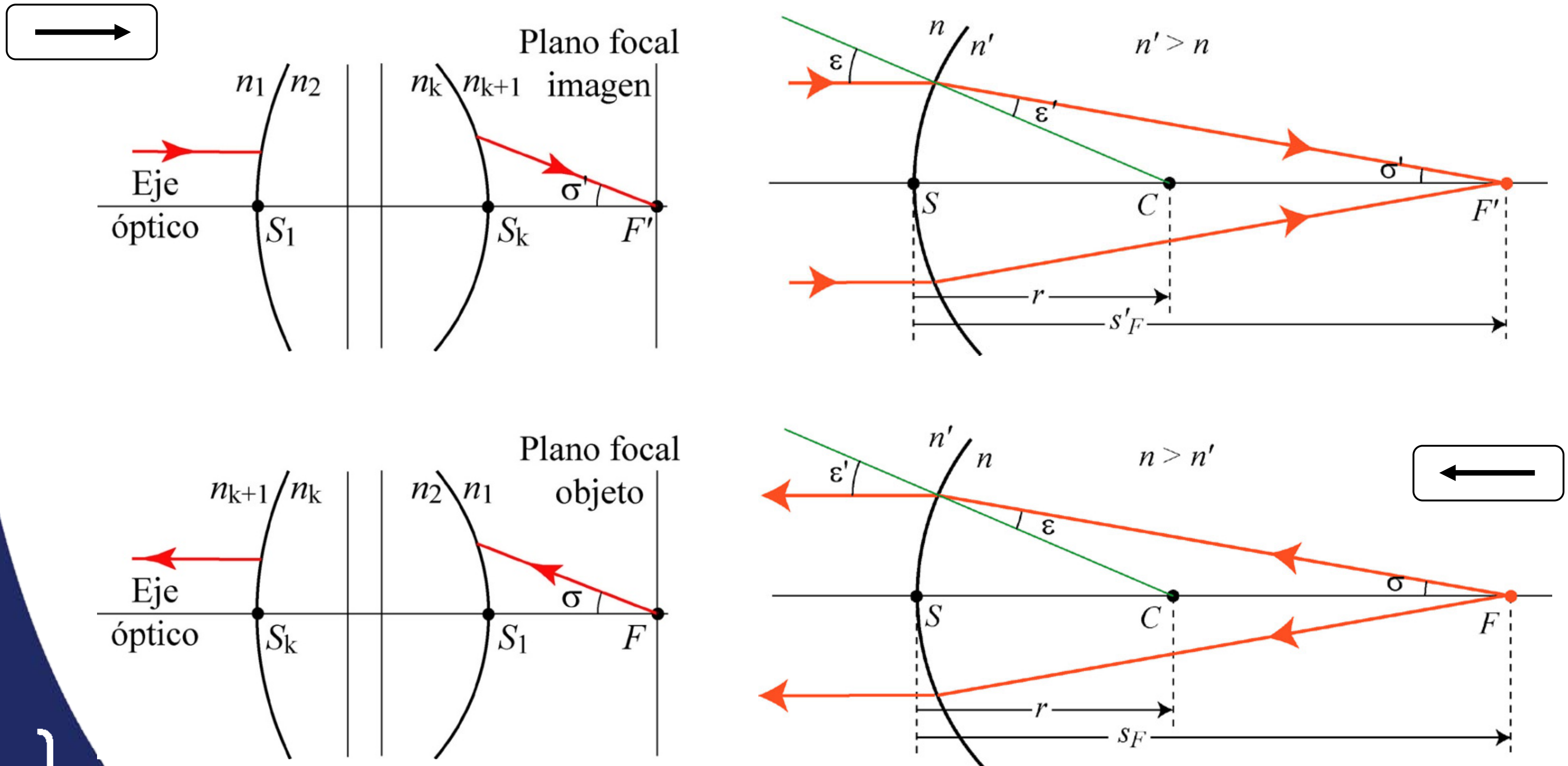


$$\left.\begin{aligned} s'_F &= \frac{r}{2} \\ \omega &= 2\,\frac{y'}{r} \end{aligned}\right\}$$

Sistemas ópticos centrados

Planos focales y principales

- La posición del punto focal objeto (*F*) y del punto focal imagen (*F'*) dependen del sentido de propagación de la luz:



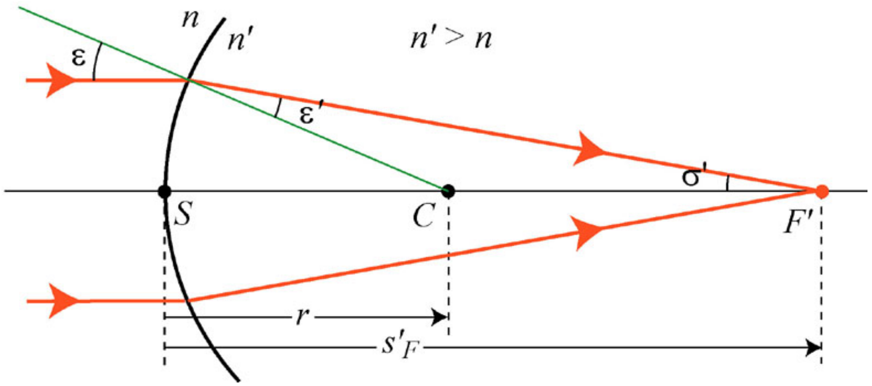
Sistemas ópticos centrados

Planos focales y principales

- Definición:

  - Un sistema **convergente** es aquel sistema formador de imágenes cuyo foco imagen (*F’*) es real.

  - Un sistema **divergente** es aquel sistema óptico cuyo punto focal imagen es virtual.



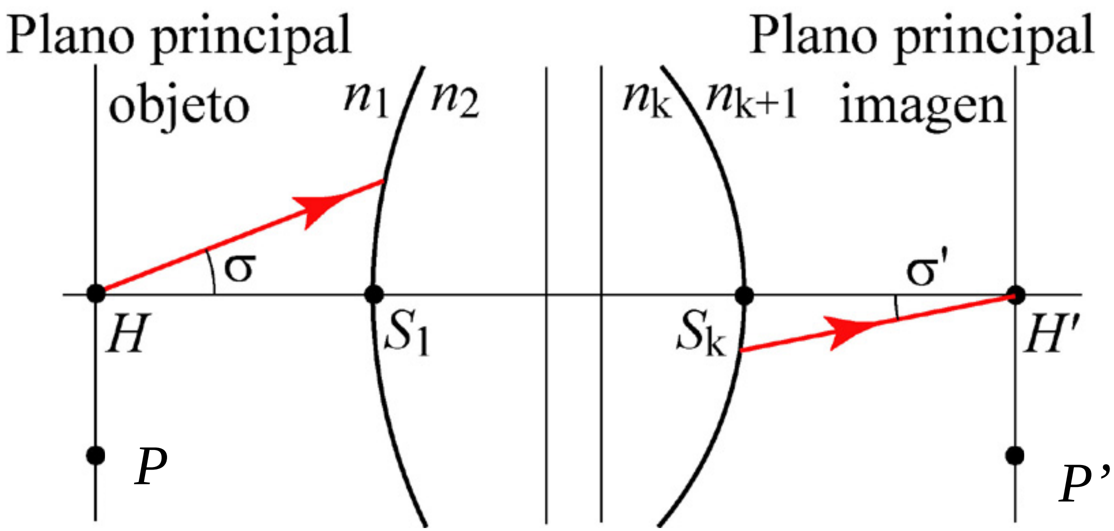
Sistema convergente

Ejercicio: Demuéstrese que este mismo dioptrio esférico es divergente si *n’* < *n*

Sistemas ópticos centrados

Planos focales y principales

- Los **planos principales (*H*,*H'*)** son planos objeto e imagen <u>conjugados</u> a través del sistema óptico caracterizados por tener un aumento lateral unidad (β' = 1).



$$\beta' = 1$$

$$\beta'\gamma' = \frac{n_1}{n_{k+1}}$$

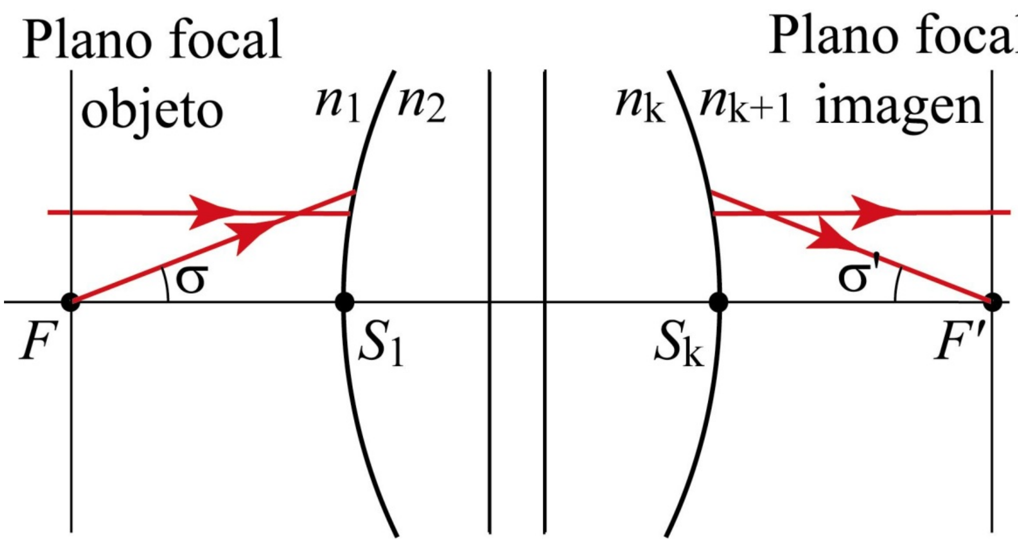
$$\gamma' = \frac{n}{n'}$$

- Los **puntos principales** objeto, ***H***, e imagen, ***H'***, son puntos en eje que pertenecen a los planos principales. *H* y *H'* son <u>puntos conjugados</u> a través del sistema.

Sistemas ópticos centrados

Planos focales y principales

- **Método gráfico** para la obtención de los planos focales

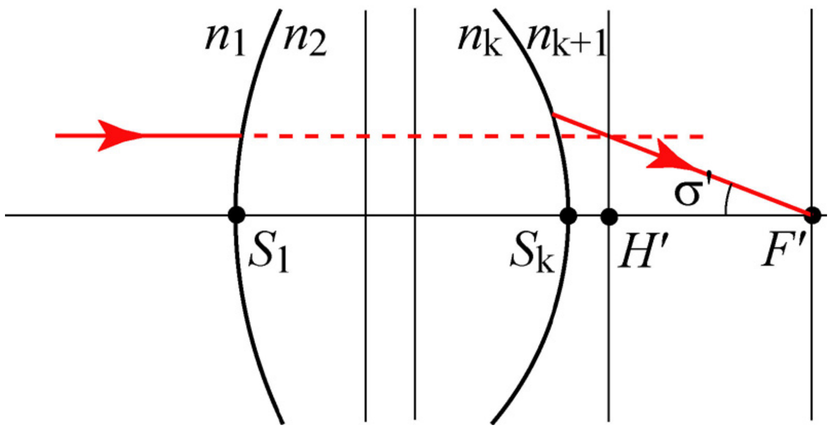


-Para hallar el plano focal objeto hacemos uso de que *F’* cuando la luz viaja de derecha a izquierda coincide con *F* en sentido contrario de la propagación de la luz.

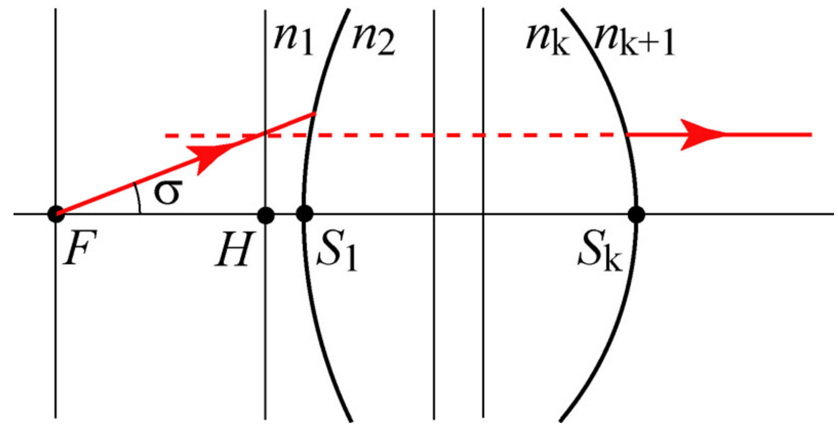
Sistemas ópticos centrados

Planos focales y principales

- **Método gráfico** para la obtención de los planos principales.



Obtención de *H'*



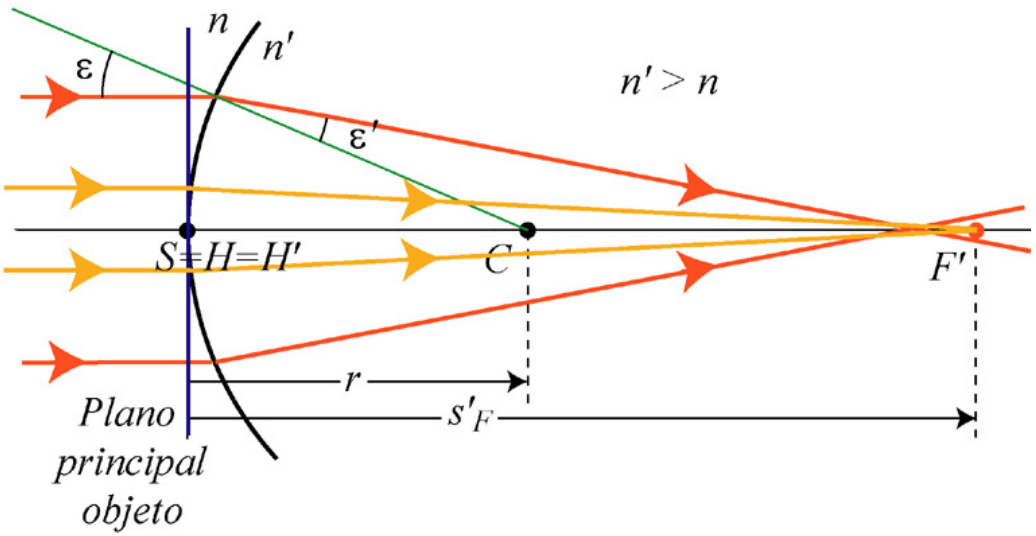
Obtención de *H*

- Para hallar el plano principal objeto hacemos uso de que *H'* cuando la luz viaja de derecha a izquierda coincide con *H* en sentido contrario de la propagación de la luz.

Sistemas ópticos centrados

Planos focales y principales

- Planos principales en un dioptrio esférico:



$$\left.\begin{array}{l} \beta' = \dfrac{z'}{z} = 1 \quad \Rightarrow \quad z = z' \\ \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{r}\right) = \dfrac{1}{n'}\left(\dfrac{1}{z'} + \dfrac{1}{r}\right) \end{array}\right\}$$

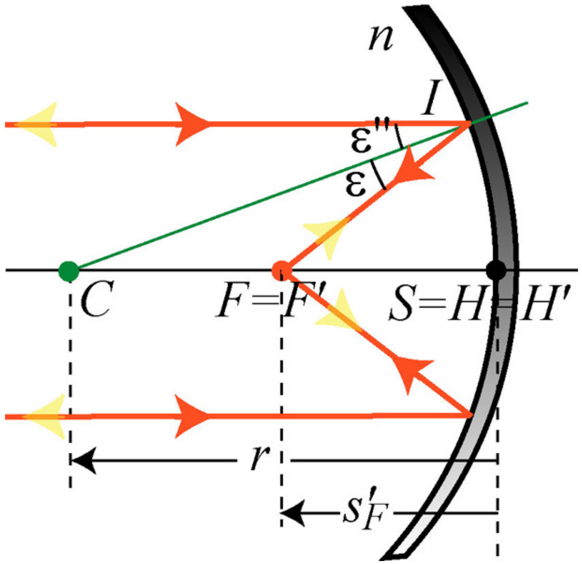
- Los puntos principales *H* y *H'* coinciden con el vértice *S* de la superficie ($z = z' = -r$).

- Los conceptos de punto focal imagen y de *plano* principal imagen pertenecen a la **óptica paraxial**.

Sistemas ópticos centrados

Planos focales y principales

- Planos principales en un espejo esférico:



$$\left.\begin{aligned} \beta' = \frac{z'}{z} = 1 \quad &\Rightarrow \quad z = z' \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{z'} &= -\frac{2}{r} \end{aligned}\right\}$$

- Los puntos principales *H* y *H'* coinciden con el vértice *S* de la superficie ($z = z' = -r$).

- Los conceptos de punto focal imagen y de *plano* principal imagen pertenecen a la **óptica paraxial**.

Tema IV. Sistemas ópticos centrados en aproximación paraxial

- Generalidades de los sistemas ópticos centrados
- Planos focales y planos principales
- Trazado de rayos
- Distancia focal y potencia de un sistema óptico
- Planos nodales
- Ecuaciones de correspondencia

Sistemas ópticos centrados

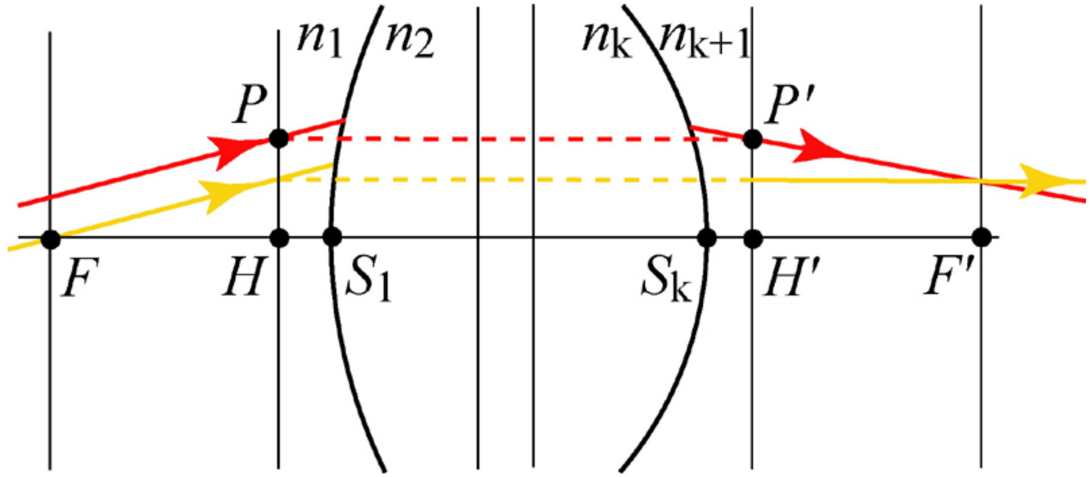
Trazado de rayos

- El conocimiento de las posiciones de los planos principales y focales de un sistema óptico es de gran utilidad para resolver los problemas que se presentan en óptica paraxial:
    - Trayectoria de un **rayo paraxial**
    - Formación de **imágenes paraxiales**. Puntos extraaxiales

Sistemas ópticos centrados

Trazado de rayos

- Trayectoria de un **rayo paraxial (Caso 1)**:

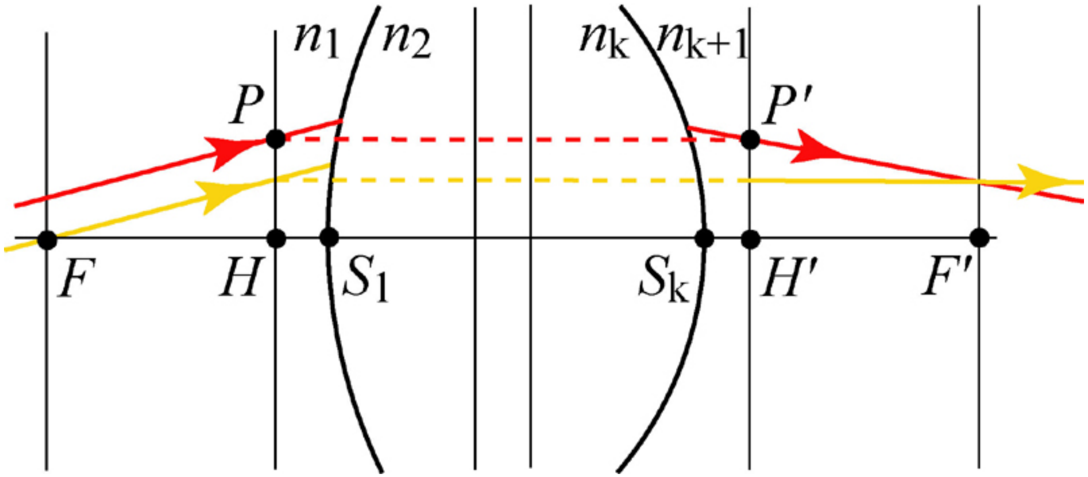


- Un **rayo auxiliar** (rayo amarillo) es aquel que su trayectoria es conocida mediante los elementos cardinales *H*, *H'*, *F y F'*.
- En este caso, el rayo auxiliar pasa por *F*, por lo tanto debe emerger paralelo al eje del sistema.

Sistemas ópticos centrados

Trazado de rayos

- Trayectoria de un **rayo paraxial** **(Caso 1)**: :



- El **rayo problema** (rayo rojo):

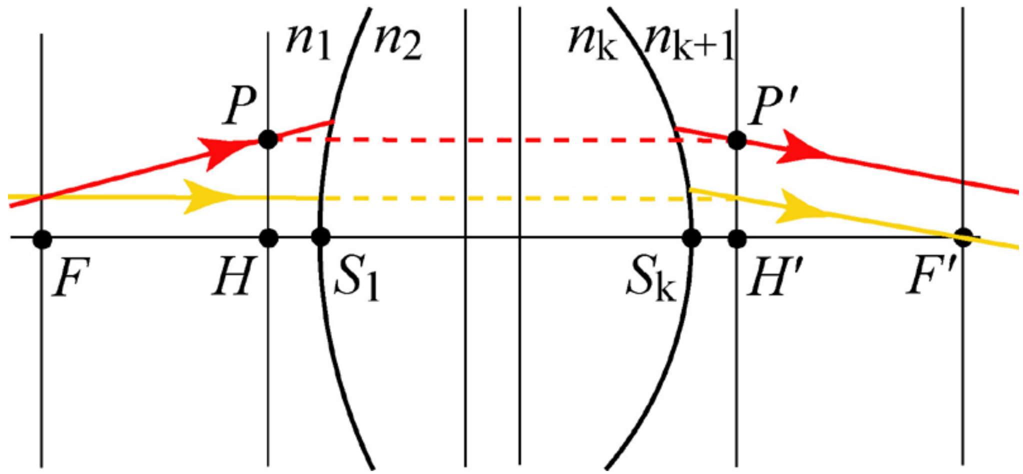
  • es paralelo al rayo auxiliar ➡ cortan en el mismo punto del plano focal imagen.

  • pasa por *P* en el espacio objeto ➡ pasa por *P'* en el espacio imagen.

Sistemas ópticos centrados

Trazado de rayos

- Trayectoria de un **rayo paraxial (Caso 2)**:

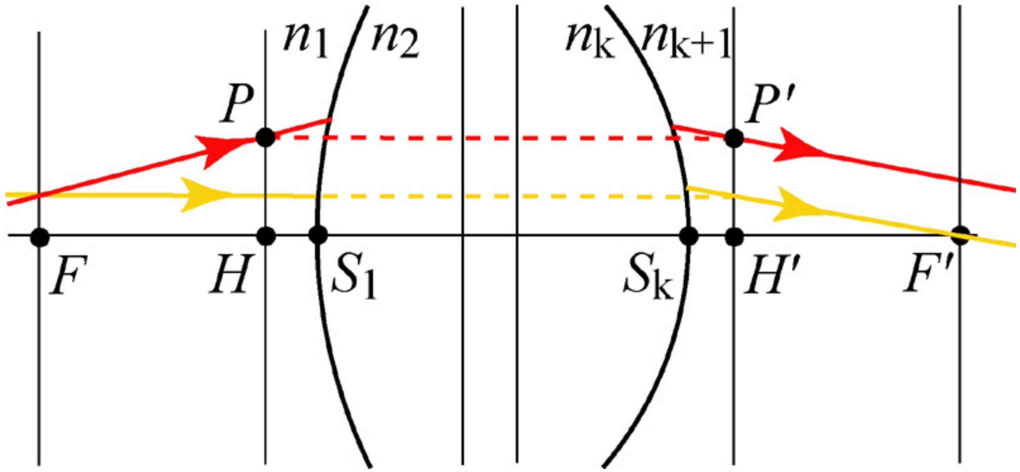


- En este caso, el rayo auxiliar incide en el sistema paralelo al eje óptico, por lo tanto debe emerger pasando por el punto focal imagen *F’*.

Sistemas ópticos centrados

Trazado de rayos

- Trayectoria de un **rayo paraxial (Caso 2)**:



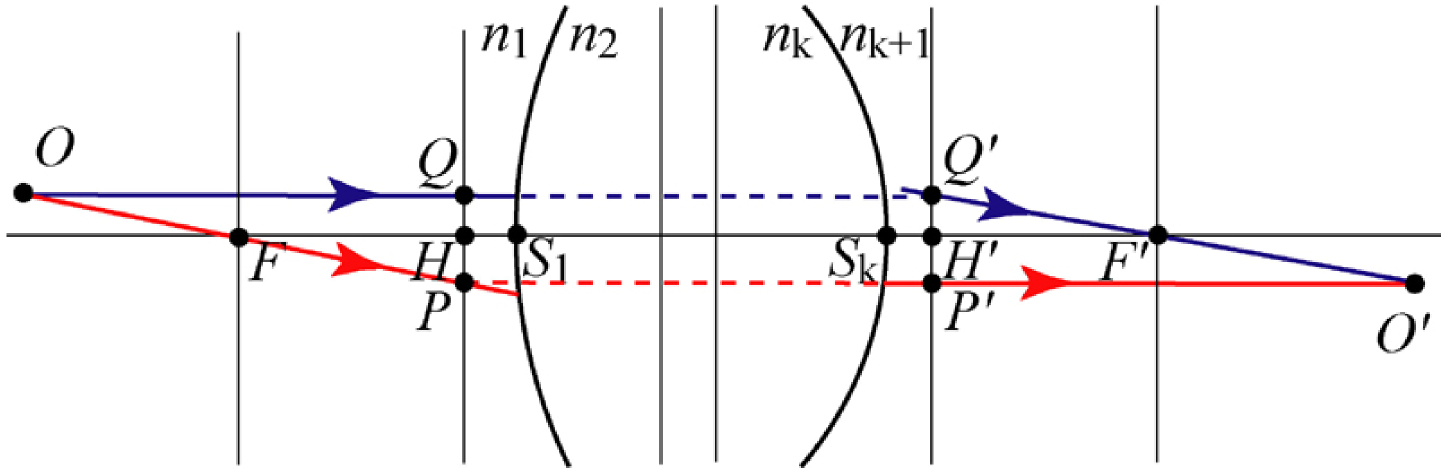
- El **rayo problema** (rayo rojo):
  - corta en el mismo punto del plano focal objeto que el rayo auxiliar ➡ ambos rayos emergen paralelos.
  - pasa por *P* en el espacio objeto ➡ pasa por *P'* en el espacio imagen.

Carlos Zapata Rodríguez
Pascuala García Martínez

Sistemas ópticos centrados

Trazado de rayos

- Formación de imágenes de **puntos extraaxiales**:



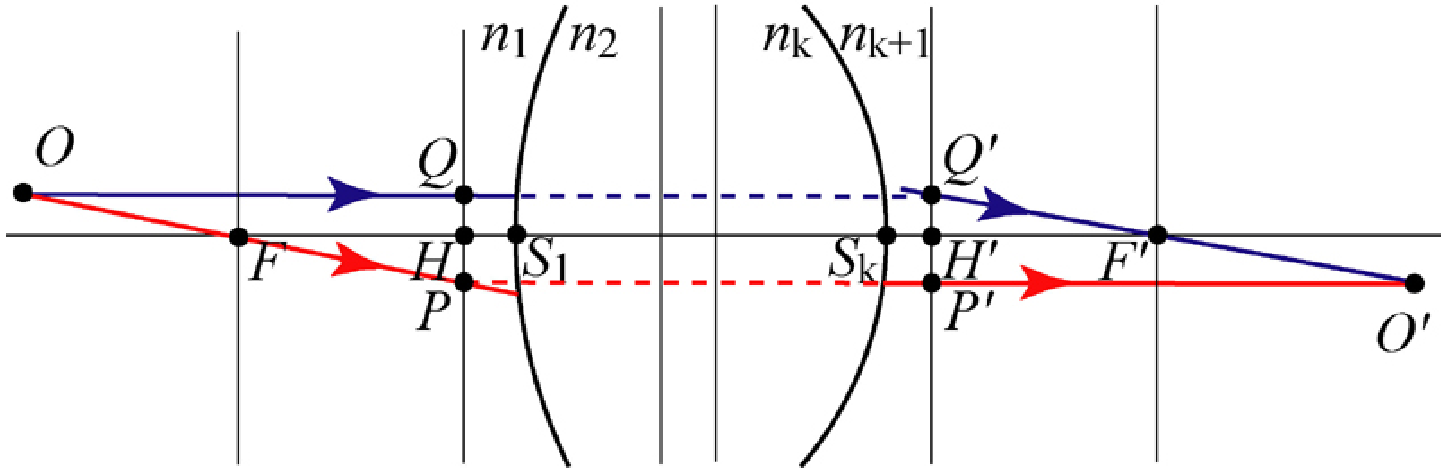
- Necesitamos conocer la trayectoria de (al menos) dos rayos que emergen de *O*.

- Utilizamos el rayo auxiliar (rojo) que, en el espacio objeto, pasa por *F*, y el rayo auxiliar (azul) que incide paralelo al eje óptico del sistema.

Sistemas ópticos centrados

Trazado de rayos

- Formación de imágenes de **puntos extraaxiales**:



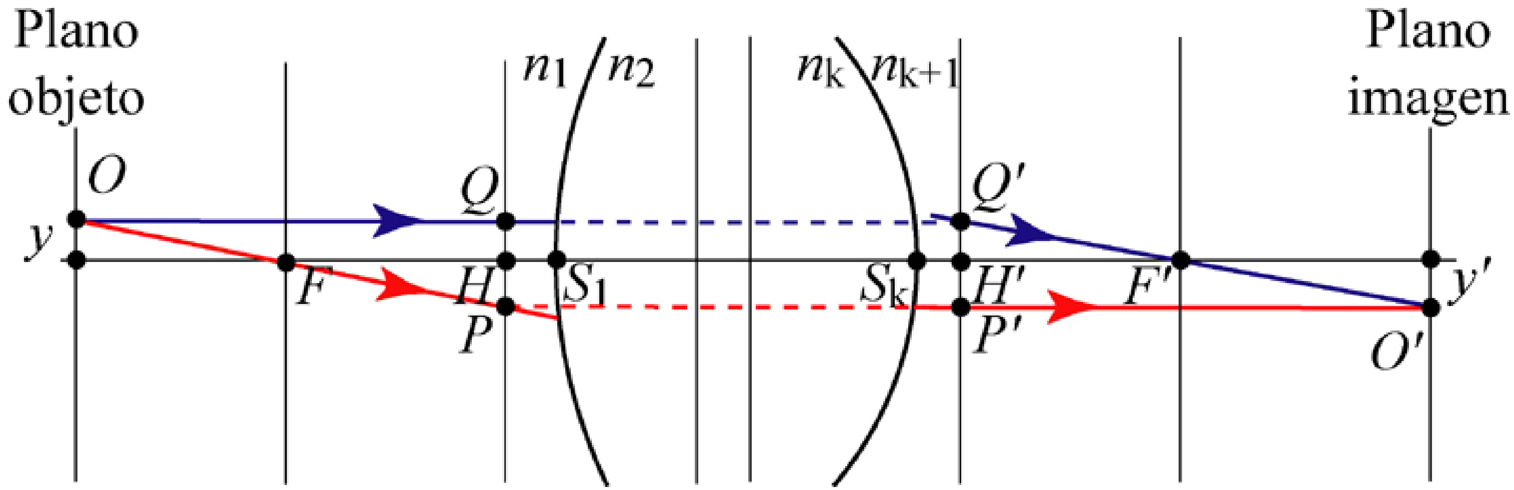
- El **rayo auxiliar rojo** pasa en el espacio objeto por *P* y por *F*, entonces en el espacio imagen pasa por *P'* y se propaga paralelo al eje óptico.

- El **rayo auxiliar azul** pasa por *Q* y se propaga paralelo al eje óptico en el espacio objeto, entonces en el espacio imagen pasa por *Q'* y por *F'*.

Sistemas ópticos centrados

Trazado de rayos

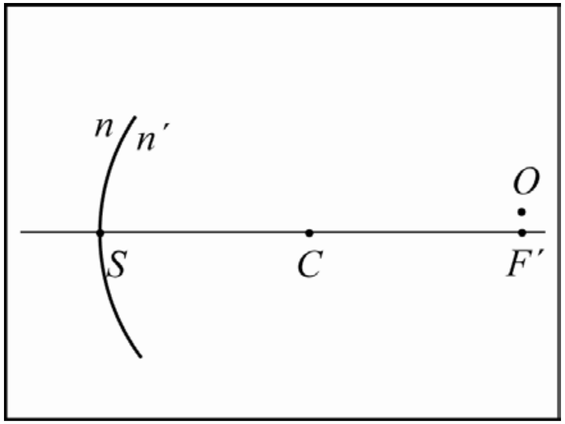
- Este estudio gráfico nos permite evaluar, dado un plano objeto:
  - la **posición** del plano **imagen**,
  - el **aumento lateral** β' del sistema óptico.



Sistemas ópticos centrados

Trazado de rayos

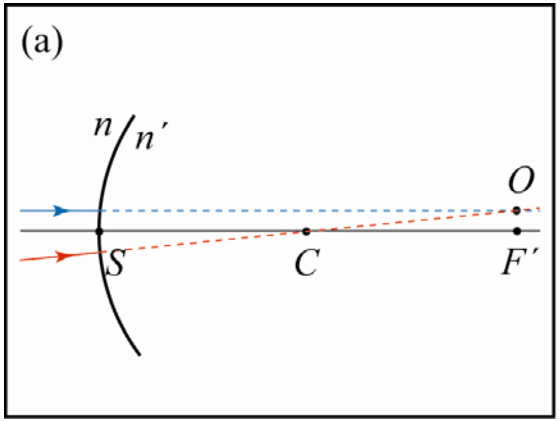
-*Problema*: Halla gráficamente la imagen del punto O que genera el dioptrio siguiente. Elige una de estas 3 opciones:

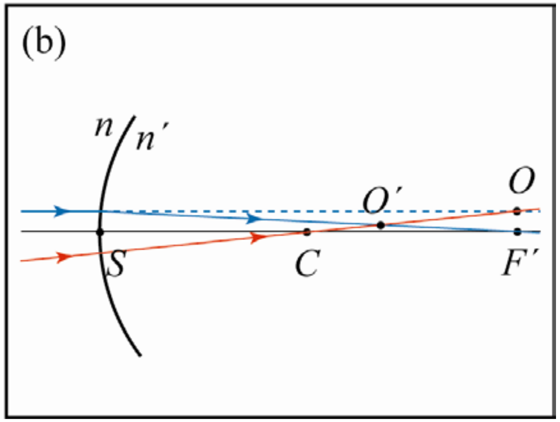


a) La imagen es real y directa

b) La imagen es real e invertida

c) La imagen es virtual e invertida





Solución al problema

Tema IV. Sistemas ópticos centrados en aproximación paraxial

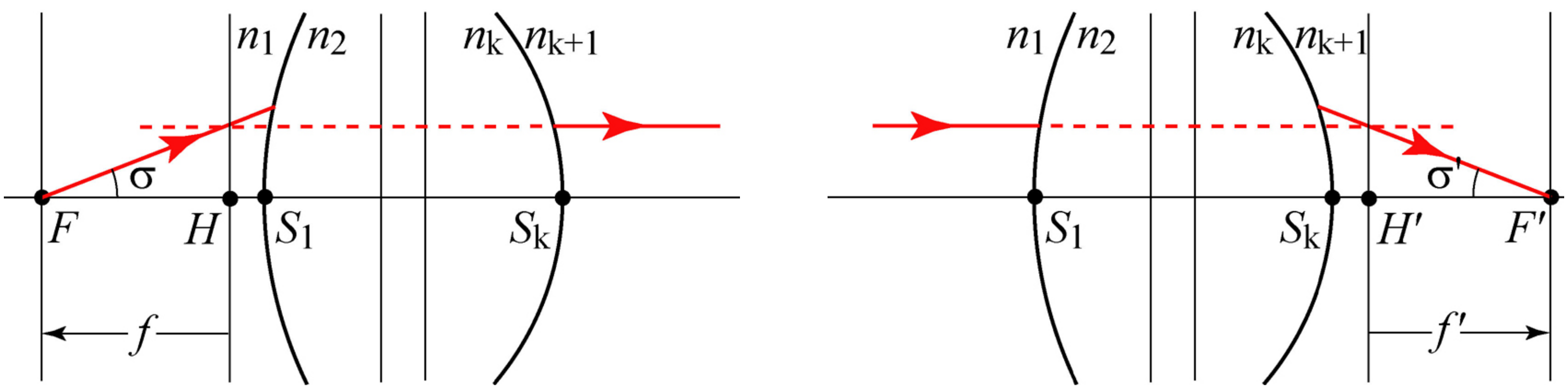
- Generalidades de los sistemas ópticos centrados
- Planos focales y planos principales
- Trazado de rayos
- Distancia focal y potencia de un sistema óptico
- Planos nodales
- Ecuaciones de correspondencia

Sistemas ópticos centrados

Distancia focal y potencia

- La **distancia focal imagen** (*f'*) es la distancia comprendida entre el punto principal imagen *H'* y el punto focal imagen *F'*.

- La **distancia focal objeto** (*f*) es la distancia comprendida entre el punto principal objeto *H* y el punto focal objeto *F*.



Carlos Zapata Rodríguez
Pascuala García Martínez

Sistemas ópticos centrados

Distancia focal y potencia

- La **distancia focal imagen** (*f'*) es la distancia comprendida entre el punto principal imagen *H'* y el punto focal imagen *F'*.

- La **distancia focal objeto** (*f*) es la distancia comprendida entre el punto principal objeto *H* y el punto focal objeto *F*.

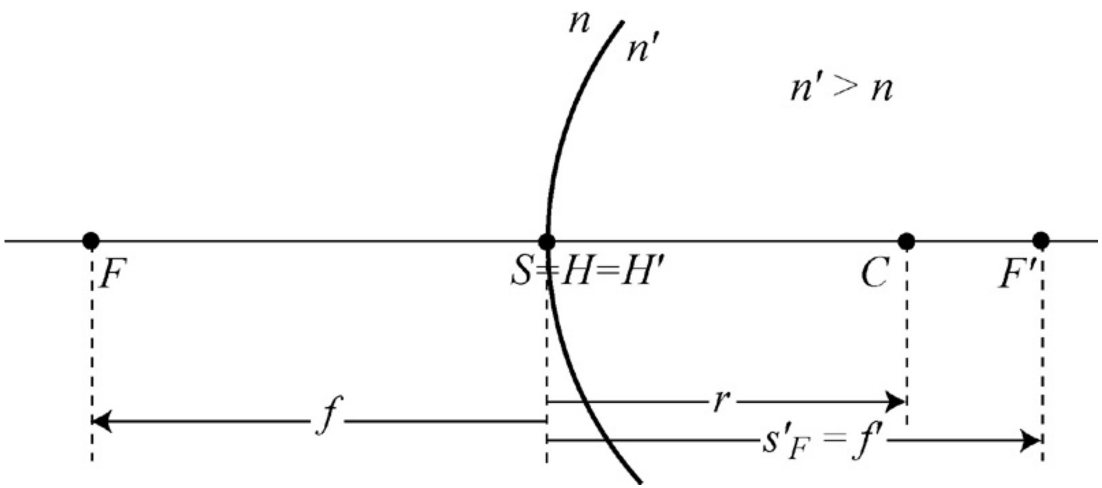
- La **potencia** (imagen) de un sistema óptico es la inversa de su distancia focal imagen: $\varphi' = 1/f'$

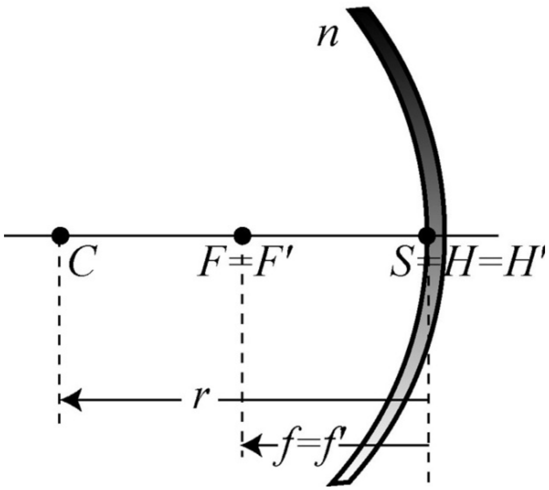
- En el S.I. la distancia focal se mide en metros (*m*) y la potencia se mide en **dioptrías** ($D = m^{-1}$)

Sistemas ópticos centrados

Distancia focal y potencia

- Ejemplos:





$$\left.\begin{aligned} f' &= \frac{n'}{n'-n}\,r \\ f &= \frac{n}{n-n'}\,r \end{aligned}\right\} \quad \frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}$$

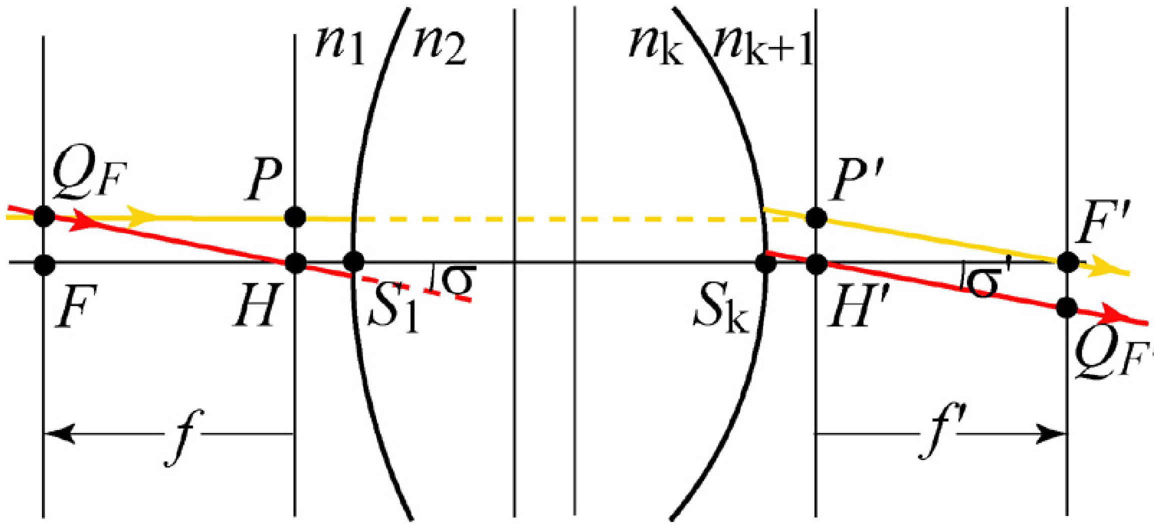
$$f = f' = \frac{r}{2}$$

Sistemas ópticos centrados

Distancia focal y potencia

- Relación entre *f* y *f'*:

$$\overline{FQ_F} = \overline{HP} = \overline{H'P'} = \overline{Q_{F'}F'} = h$$



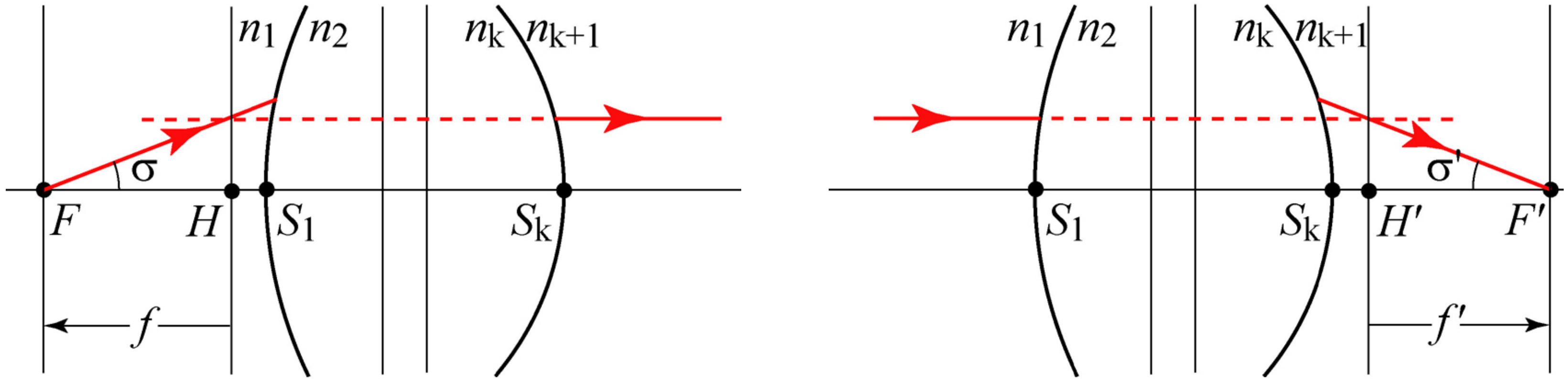
$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\sigma' &= \frac{h}{f'} \cong \sigma' \\ \operatorname{tg}\sigma &= \frac{h}{-f} \cong \sigma \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{\sigma'}{\sigma} &= -\frac{f}{f'} \\ \frac{\sigma'}{\sigma} &= \gamma' = \frac{1}{\beta'}\frac{n_1}{n_{k+1}} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\beta'=1} \frac{f'}{f} = -\frac{n_{k+1}}{n_1}$$

Carlos Zapata Rodríguez
Pascuala García Martínez

Sistemas ópticos centrados

Distancia focal y potencia

- Relación entre *f* y *f'*: **Casos particulares.**



- Sistema óptico en un mismo medio dieléctrico:

$$n_{k+1} = n_1 \quad \Longrightarrow \quad f' = -f$$

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n_{k+1}}{n_1}$$

- Sistemas catadióptricos:

$$n_{k+1} = -n_1 \quad \Longrightarrow \quad f' = f$$

Carlos Zapata Rodríguez
Pascuala García Martínez

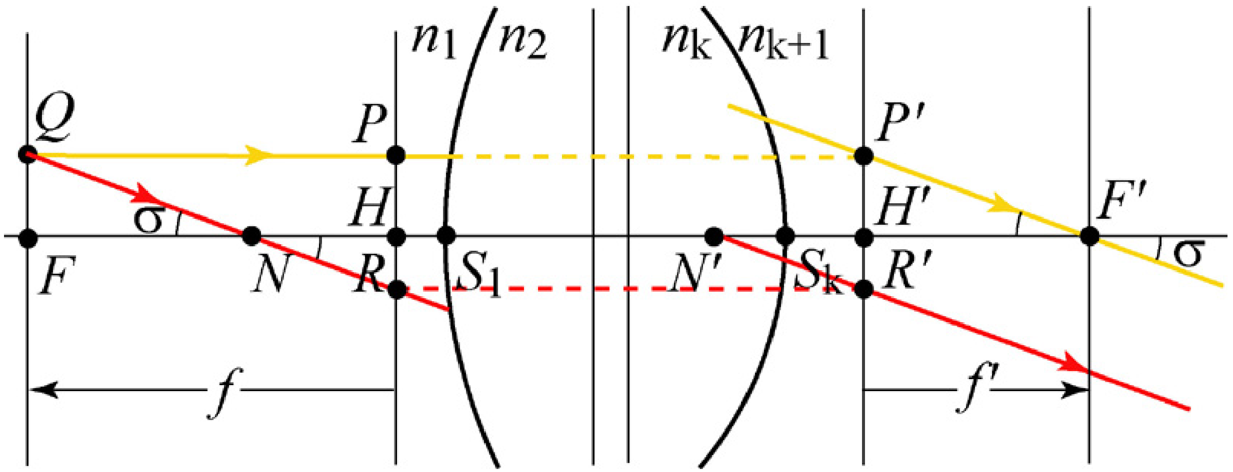
Tema IV. Sistemas ópticos centrados en aproximación paraxial

- Generalidades de los sistemas ópticos centrados
- Planos focales y planos principales
- Trazado de rayos
- Distancia focal y potencia de un sistema óptico
- Planos nodales
- Ecuaciones de correspondencia

Sistemas ópticos centrados

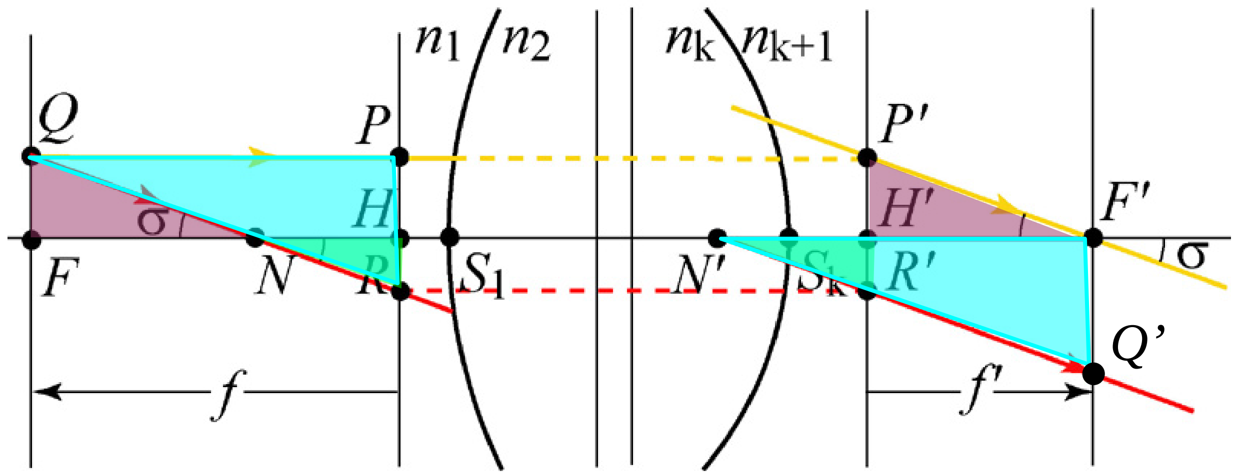
Planos nodales

- Los **planos nodales** son planos conjugados a través de un sistema óptico caracterizados por γ’ = 1. Los **puntos nodales**, *N* y *N’*, son los puntos en eje de los planos nodales.



Sistemas ópticos centrados

Planos nodales



$$\frac{\overline{HR}}{\overline{HN}}=\frac{\overline{H'R'}}{\overline{H'N'}}\xrightarrow{\overline{HR}=\overline{H'R'}}\overline{HN}=\overline{H'N'}$$

$$\frac{\overline{QF}}{\overline{FN}}=\frac{\overline{P'H'}}{\overline{H'F'}}\xrightarrow{\overline{QF}=\overline{P'H'}}\overline{FN}=\overline{H'F'}=f'$$

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}=\frac{\overline{F'Q'}}{\overline{F'N'}}\xrightarrow{\overline{PR}=\overline{F'Q'}}\overline{F'N'}=\overline{PQ}=f$$

$$\overline{HN}=\overline{HF}+\overline{FN}$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{HN}=f+f'$$

$$\overline{H'N'}=f+f'$$

Carlos Zapata Rodríguez
Pascuala García Martínez

Sistemas ópticos centrados

Planos nodales

- En el caso particular que: $n_{k+1} = n_1$ ➡ $f' = -f$

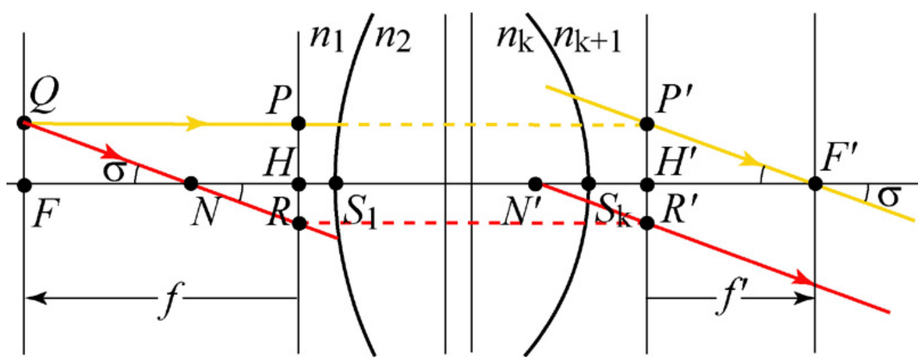
$$\overline{HN} = f + f' = 0$$

$$\overline{H'N'} = f + f' = 0$$

- Los puntos principales y los puntos nodales coinciden.

- *Nota*: Este hecho se podría haber deducido de la expresión:

$$\beta'\gamma' = \frac{n_1}{n_{k+1}} = 1 \xrightarrow{\gamma'=1} \beta' = 1$$

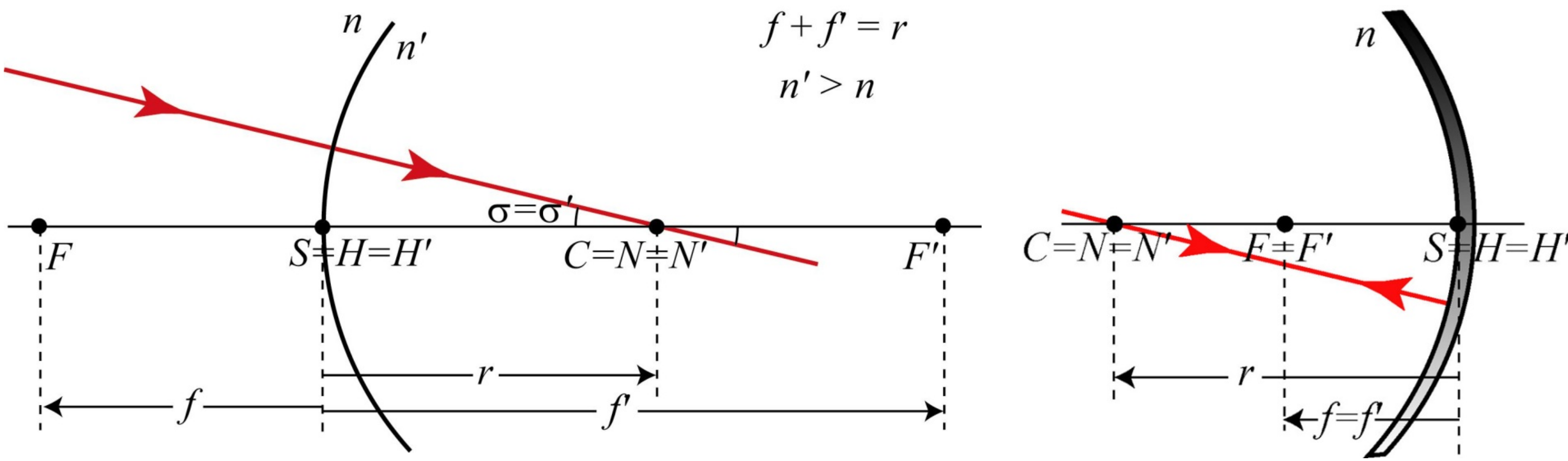


Carlos Zapata Rodríguez
Pascuala García Martínez

Sistemas ópticos centrados

Planos nodales

- Ejemplos:



$$H \equiv H' \equiv S$$

$$N \equiv N' \equiv C$$

$$\overline{HN} = f + f' = r$$

- En este caso, la cantidad *f* + *f'* no depende de los índices de refracción *n* y *n'*.

Carlos Zapata Rodríguez
Pascuala García Martínez

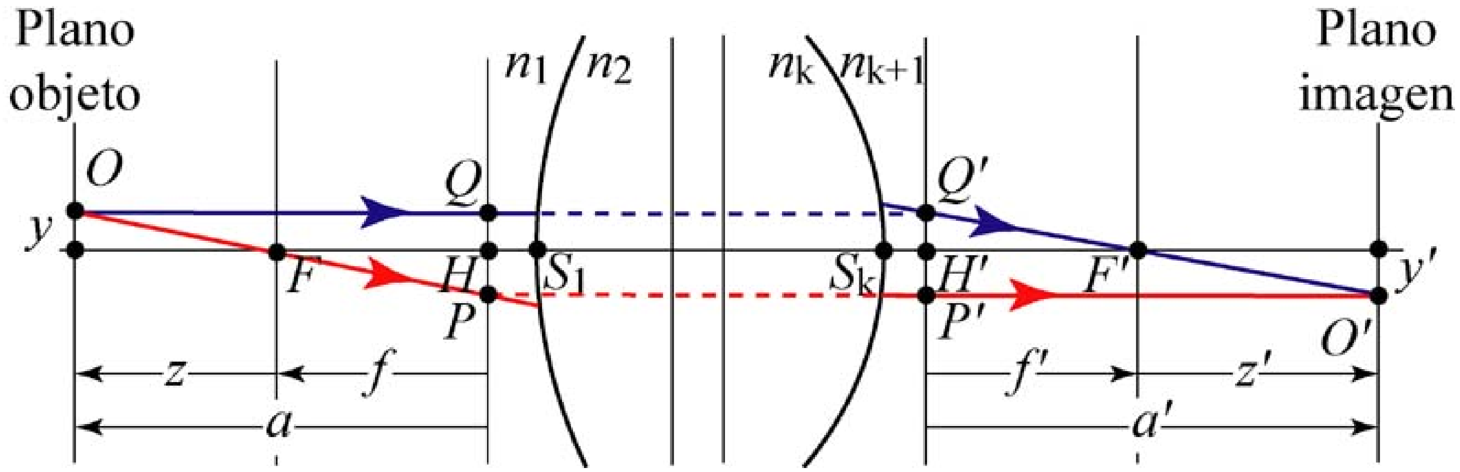
Tema IV. Sistemas ópticos centrados en aproximación paraxial

- Generalidades de los sistemas ópticos centrados
- Planos focales y planos principales
- Trazado de rayos
- Distancia focal y potencia de un sistema óptico
- Planos nodales
- Ecuaciones de correspondencia

Sistemas ópticos centrados

Ecuaciones de correspondencia

- Consideremos un sistema óptico centrado, compuesto por una serie de dióptrios y espejos, de tal manera que
  - la primera y última superficies son dioptrios (no es estrictamente necesario),
  - coincide el sentido de propagación de la luz incidente y emergente



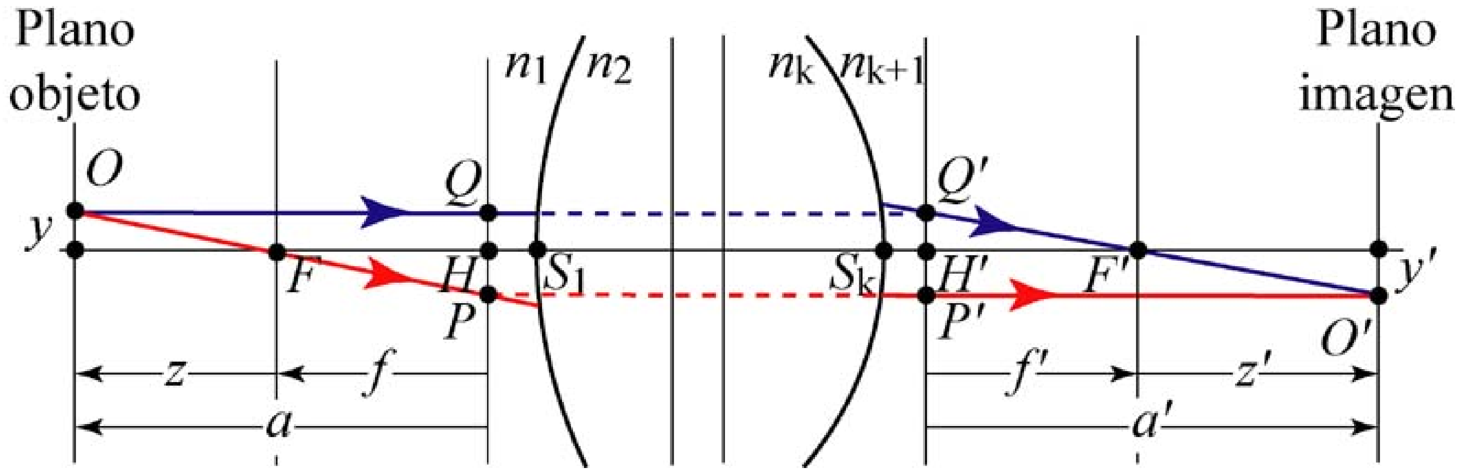
Sistemas ópticos centrados

Ecuaciones de correspondencia

$$\frac{y}{-z}=\frac{-y'}{-f}=\frac{y-y'}{-a} \qquad \frac{-y'}{z'}=\frac{y}{f'}=\frac{y-y'}{a'}$$

$$\left(\frac{y}{-z}\right)\left(\frac{-y'}{z'}\right)=\left(\frac{-y'}{-f}\right)\left(\frac{y}{f'}\right) \Rightarrow zz'=ff'$$

Ecuación de correspondencia de Newton



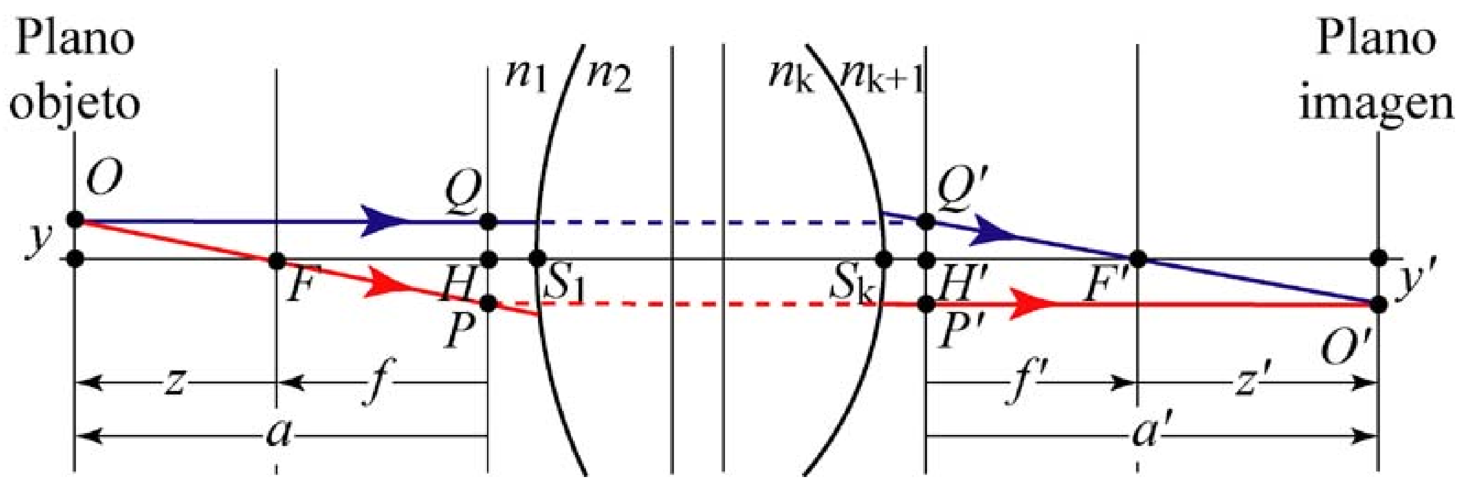
Sistemas ópticos centrados

Ecuaciones de correspondencia

$$\frac{y}{-z}=\frac{-y'}{-f}=\frac{y-y'}{-a} \qquad \frac{-y'}{z'}=\frac{y}{f'}=\frac{y-y'}{a'}$$

$$1=\left(\frac{y}{-z}\right)\Big/\left(\frac{-y'}{-f}\right) \Rightarrow \beta'=-\frac{f}{z}$$

Aumento lateral



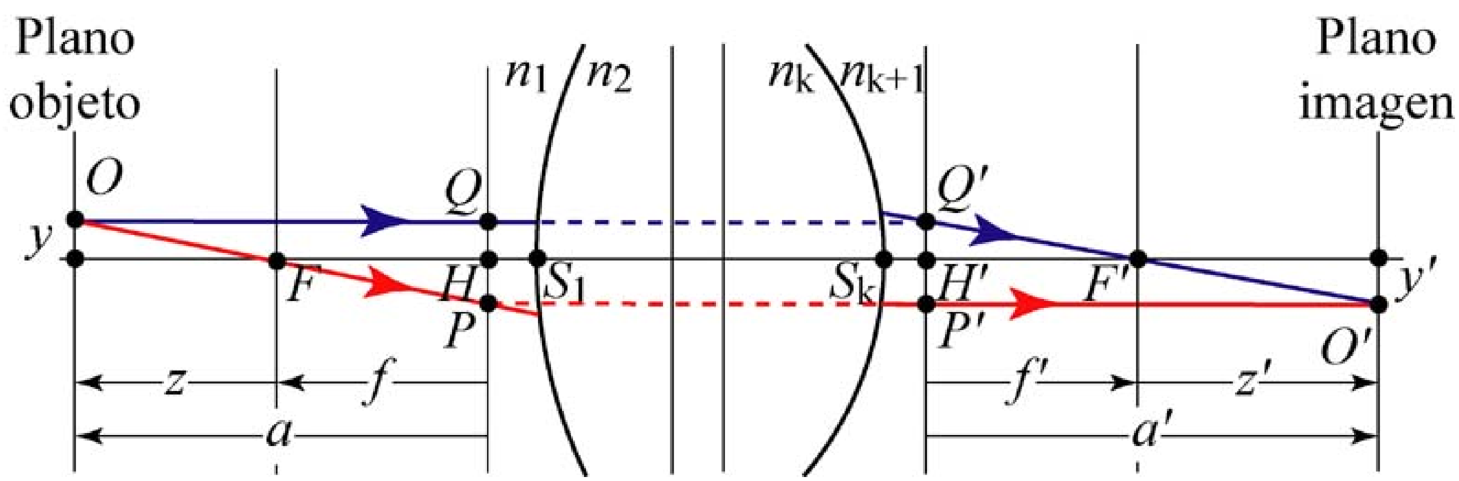
Sistemas ópticos centrados

Ecuaciones de correspondencia

$$\frac{y}{-z} = \frac{-y'}{-f} = \frac{y-y'}{-a} \qquad \frac{-y'}{z'} = \frac{y}{f'} = \frac{y-y'}{a'}$$

$$1 = \left(\frac{-y'}{z'}\right) \Big/ \left(\frac{y}{f'}\right) \Rightarrow \beta' = -\frac{z'}{f'}$$

Aumento lateral



Sistemas ópticos centrados

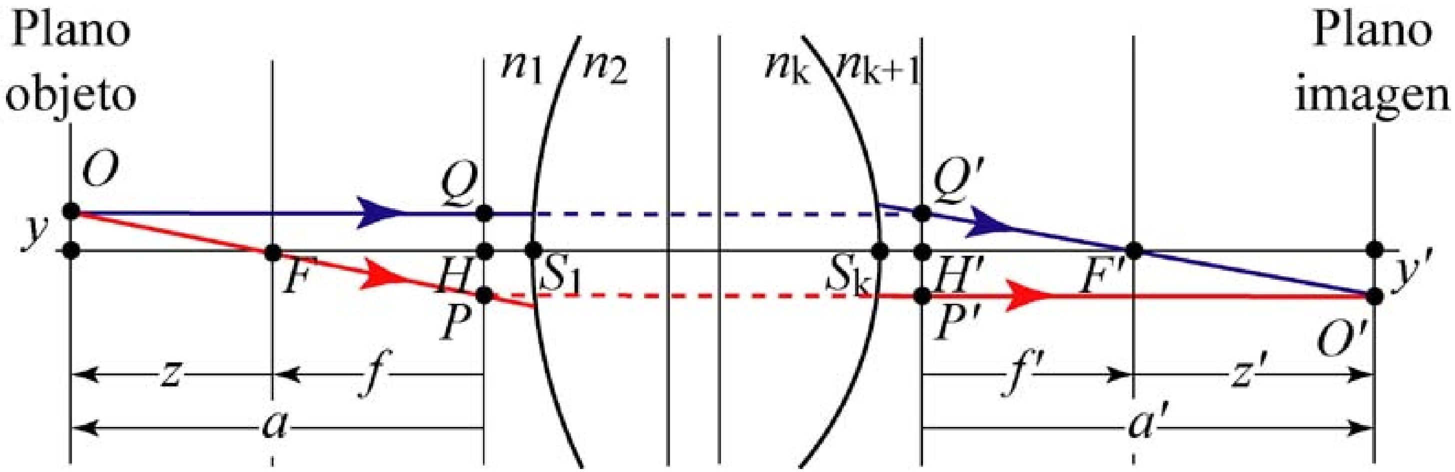
Ecuaciones de correspondencia

- Resumen:

$$zz' = ff' \qquad \beta' = -\frac{f}{z} \qquad \beta' = -\frac{z'}{f'}$$

- En el caso particular que $n_1 = n_{k+1}$ ($f = -f'$):

$$zz' = -f'^2 \qquad \beta' = \frac{f'}{z} \qquad \beta' = -\frac{z'}{f'}$$



Carlos Zapata Rodríguez
Pascuala García Martínez

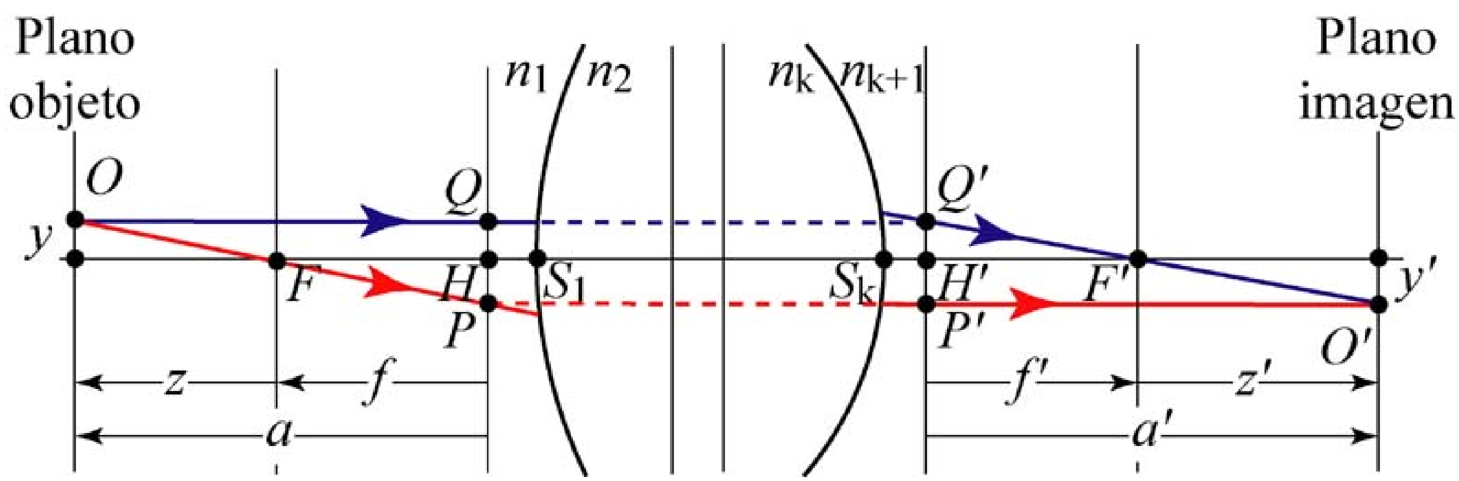
Sistemas ópticos centrados

Ecuaciones de correspondencia

$$\frac{y}{-z} = \frac{-y'}{-f} = \frac{y-y'}{-a} \qquad \frac{-y'}{z'} = \frac{y}{f'} = \frac{y-y'}{a'}$$

Ecuación de correspondencia de Gauss

$$(-f)\left(\frac{y-y'}{-a}\right) + (f')\left(\frac{y-y'}{a'}\right) = (-f)\left(\frac{-y'}{-f}\right) + (f')\left(\frac{y}{f'}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1$$



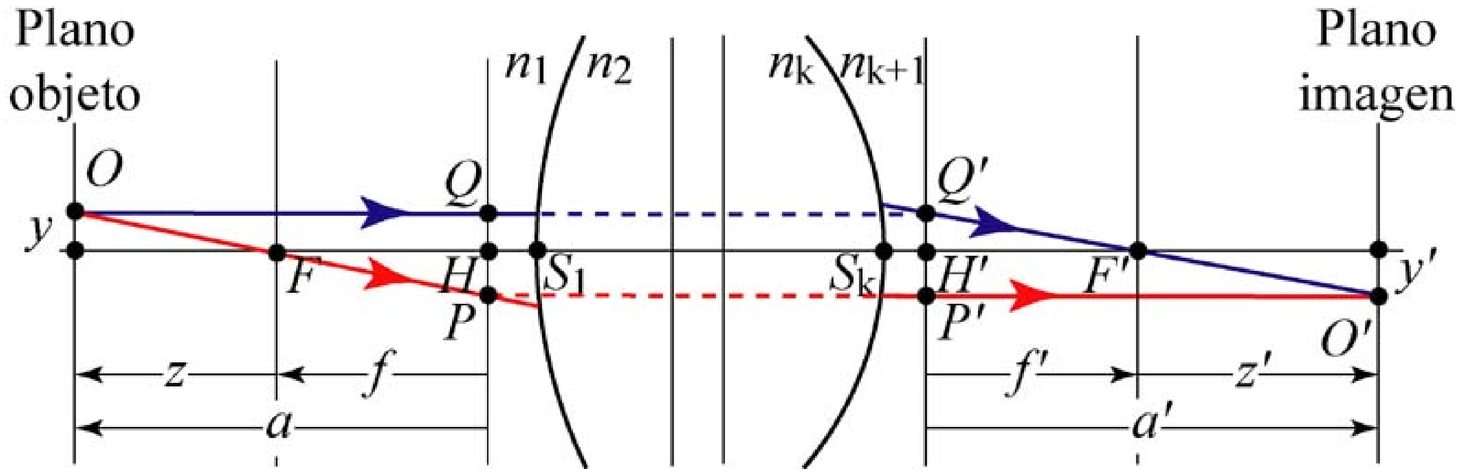
Carlos Zapata Rodríguez
Pascuala García Martínez

Sistemas ópticos centrados

Ecuaciones de correspondencia

$$\frac{y}{-z}=\frac{-y'}{-f}=\frac{y-y'}{-a} \qquad \frac{-y'}{z'}=\frac{y}{f'}=\frac{y-y'}{a'}$$

$$\left(\frac{-y'}{-f}\right)\bigg/\left(\frac{y}{f'}\right)=\left(\frac{y-y'}{-a}\right)\bigg/\left(\frac{y-y'}{a'}\right) \Rightarrow \beta'=-\frac{f}{f'}\frac{a'}{a}$$



Carlos Zapata Rodríguez
Pascuala García Martínez

Sistemas ópticos centrados

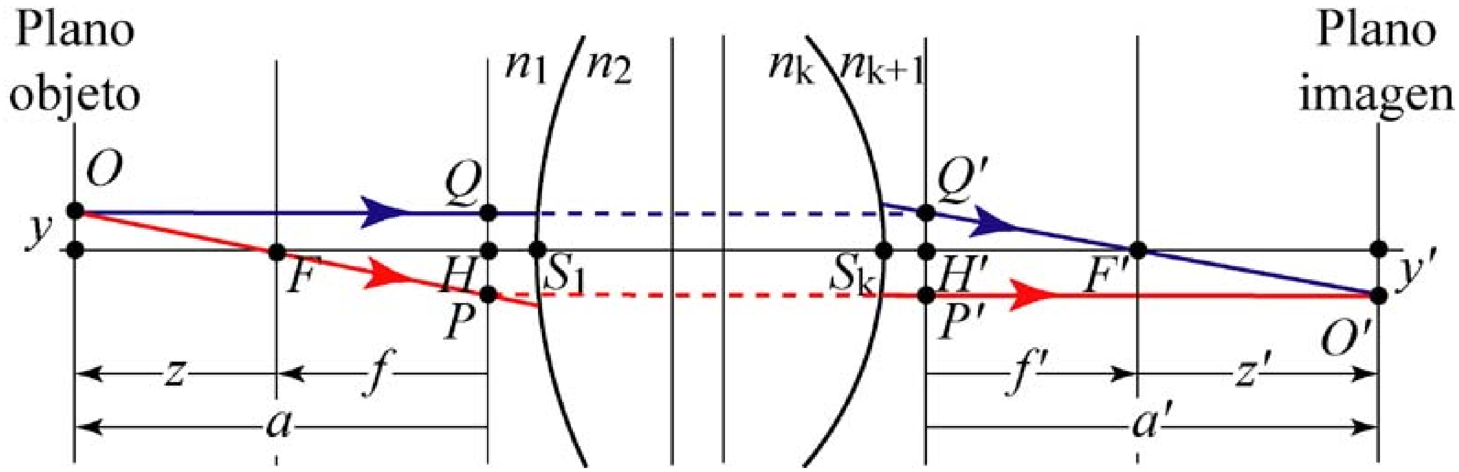
Ecuaciones de correspondencia

- Resumen:

$$\frac{f}{a}+\frac{f'}{a'}=1 \qquad \beta'=-\frac{f}{f'}\frac{a'}{a}$$

- En el caso particular que $n_1 = n_{k+1}$ ($f = -f'$):

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{f'} \qquad \beta'=\frac{a'}{a}$$



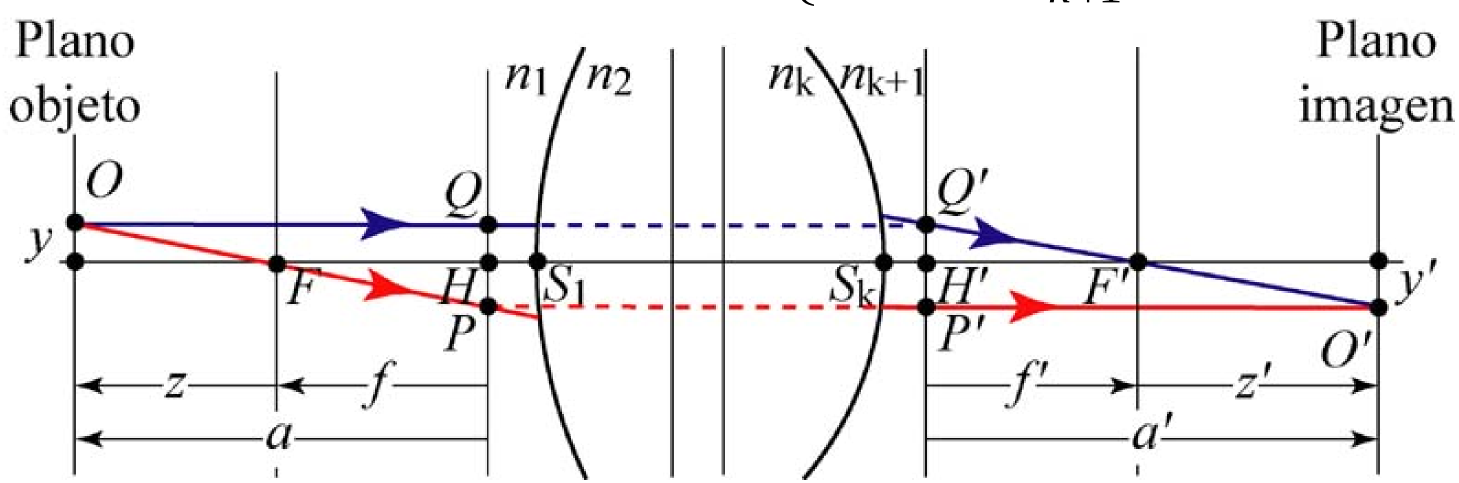
Carlos Zapata Rodríguez
Pascuala García Martínez

Sistemas ópticos centrados

Ecuaciones de correspondencia

- Habitualmente la ecuación de correspondencia de Gauss se expresa en función de la distancia focal imagen *f'* y de los índices de refracción de los medios extremos, n_1 y n_{k+1}

$$\left.\begin{aligned} \frac{f}{a}+\frac{f'}{a'}=1 \\ \beta'=-\frac{f}{f'}\frac{a'}{a} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{f=-\frac{n_1}{n_{k+1}}f'} \left\{\begin{aligned} -\frac{n_1}{a}+\frac{n_{k+1}}{a'}=\frac{n_{k+1}}{f'} \\ \beta'=\frac{n_1}{n_{k+1}}\frac{a'}{a} \end{aligned}\right.$$

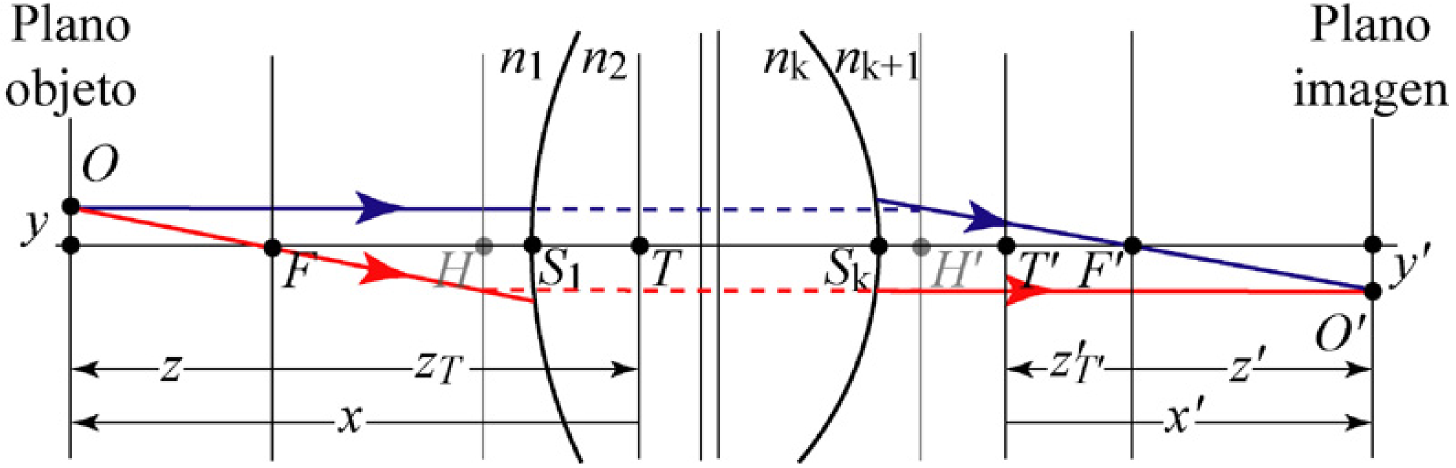


Carlos Zapata Rodríguez
Pascuala García Martínez

Sistemas ópticos centrados

Ecuaciones de correspondencia

- En el caso general, la ecuación de correspondencia (generalizada) de Gauss puede utilizar distancias axiales cuyo origen no sean *H* y *H'*, sino cualquier pareja de puntos conjugados en eje (*T* y *T'*)
    - Trabajamos con las distancias z_T y $z'_{T'}$ en vez de f y f'.
    - Trabajamos con las distancias x y x' en vez de a y a'.

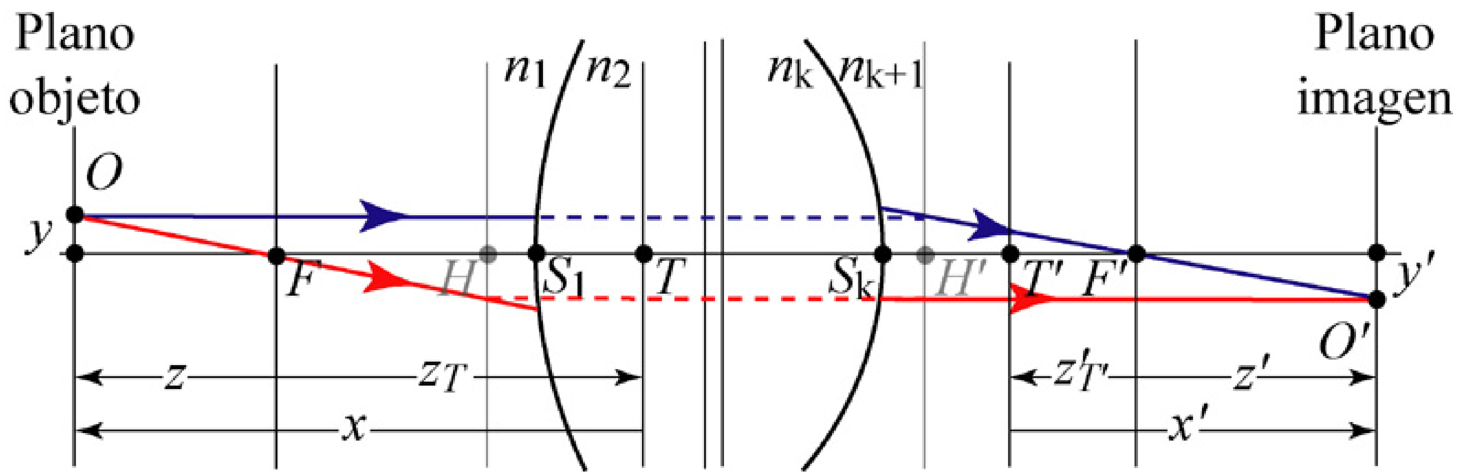


Sistemas ópticos centrados

Ecuaciones de correspondencia

$$\left.\begin{aligned} z &= z_T + x \\ z' &= z'_{T'} + x' \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} zz' &= ff' \\ z_T z'_{T'} &= ff' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{(-z_T)}{x} + \frac{(-z'_{T'})}{x'} = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \beta'_T &= -\frac{f}{z_T} = -\frac{z'_{T'}}{f'} \\ f &= -\frac{n_1}{n_{k+1}} f' \end{aligned}\right\} \Rightarrow -\frac{1}{\beta'_T}\frac{n_1}{x} + \beta'_T \frac{n_{k+1}}{x'} = \frac{n_{k+1}}{f'}$$



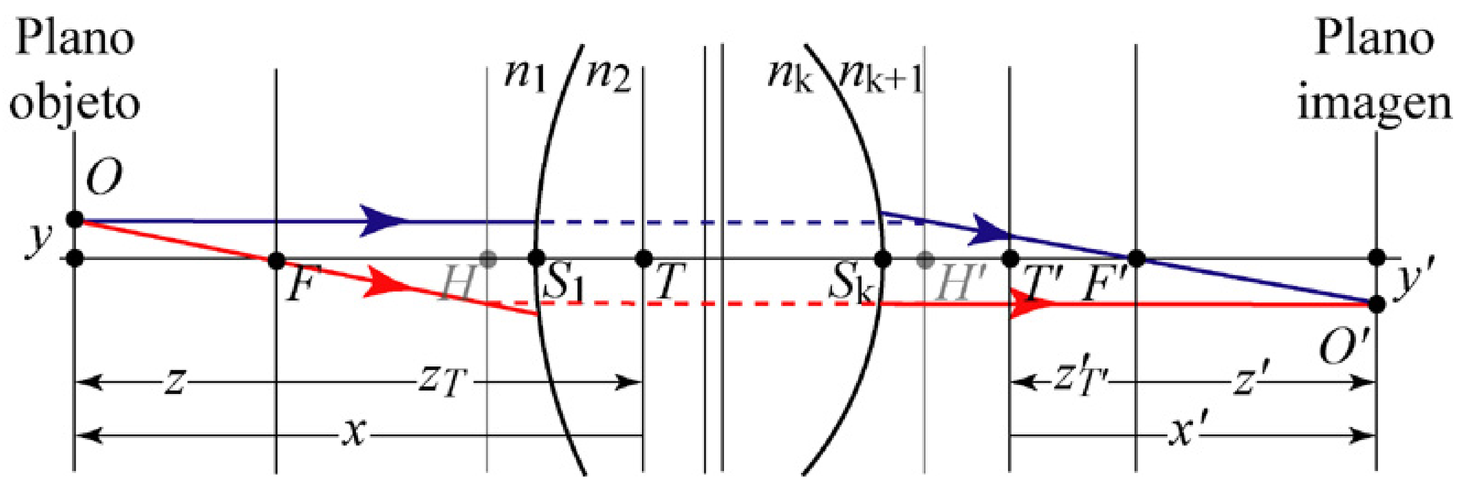
Sistemas ópticos centrados

Ecuaciones de correspondencia

$$\left(\frac{x'}{n_{k+1}}\right)\left(-\frac{1}{\beta'_T}\frac{n_1}{x}+\beta'_T\frac{n_{k+1}}{x'}\right)=\left(\frac{x'}{n_{k+1}}\right)\left(\frac{n_{k+1}}{f'}\right) \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{\beta'_T}\frac{n_1}{n_{k+1}}\frac{x'}{x}+\beta'_T=\frac{x'}{f'}$$

$$\beta'=-\frac{z'}{f'}=-\frac{z'_{T'}+x'}{f'}=\beta'_{T'}-\frac{x'}{f'}$$

$$\beta'=\frac{1}{\beta'_T}\frac{n_1}{n_{k+1}}\frac{x'}{x}$$



Carlos Zapata Rodríguez
Pascuala García Martínez

Sistemas ópticos centrados

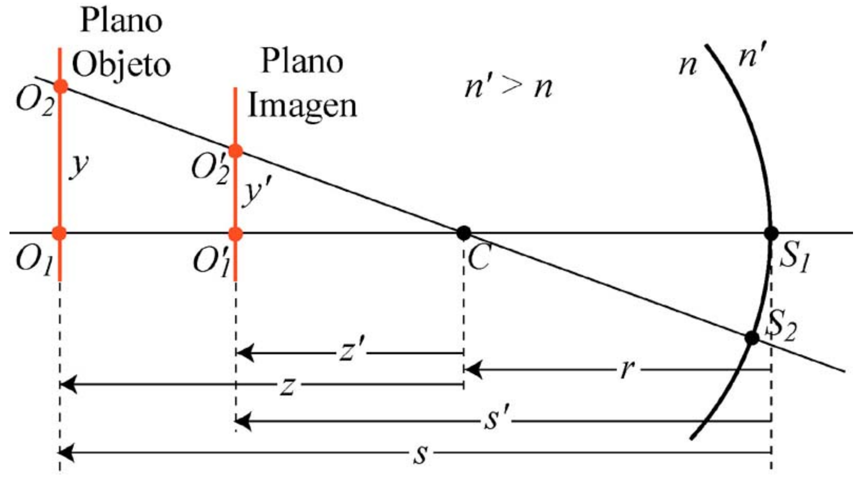
Ecuaciones de correspondencia

- Caso particular: **el dioptrio esférico**.

  - En este caso $S = H = H'$, si utilizo la ecuación de correspondencia de Gauss, y sabiendo que $a = s$ y $a' = s'$.

$$\left.\begin{aligned} -\frac{n}{a}+\frac{n'}{a'}=\frac{n'}{f'} \\ f'=\frac{n'}{n'-n}\,r \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad n\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{r}\right)=n'\left(\frac{1}{s'}-\frac{1}{r}\right)$$

$$\beta'=\frac{n}{n'}\frac{a'}{a} \quad \Rightarrow \quad \beta'=\frac{n}{n'}\frac{s'}{s}$$



Carlos Zapata Rodríguez
Pascuala García Martínez

Sistemas ópticos centrados

Ecuaciones de correspondencia

- Caso particular: **el dioptrio esférico**.

  • Si utilizo la ecuación de correspondencia generalizada de Gauss, donde $C = T = T'$, y sabiendo que $x = z$ y $x' = z'$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\beta'_T}\frac{n}{x}+\beta'_T\frac{n'}{x'}=\frac{n'}{f'} \\ f'=\frac{n'}{n'-n}r \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\beta'_T = n/n'} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{n'}\left(\frac{1}{z'}+\frac{1}{r}\right)$$

$$\beta'=\frac{1}{\beta'_T}\frac{n}{n'}\frac{x'}{x} \quad \Rightarrow \quad \beta'=\frac{z'}{z}$$