

Tema III. Interfases esféricas

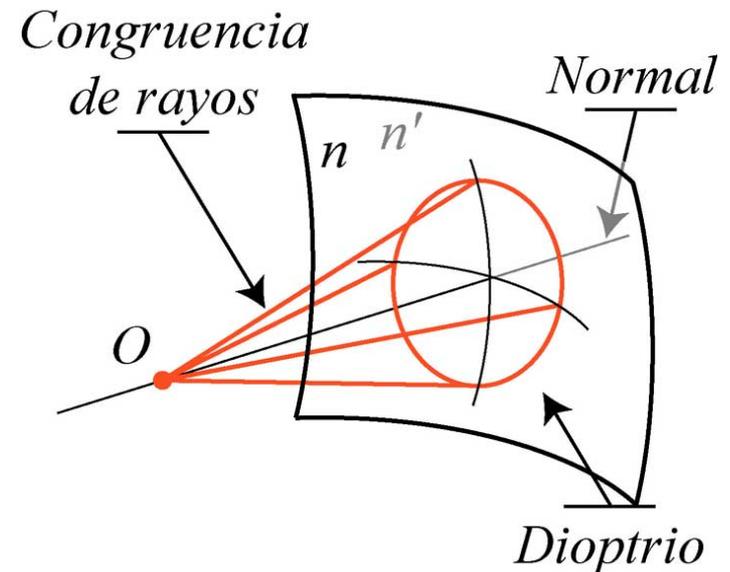
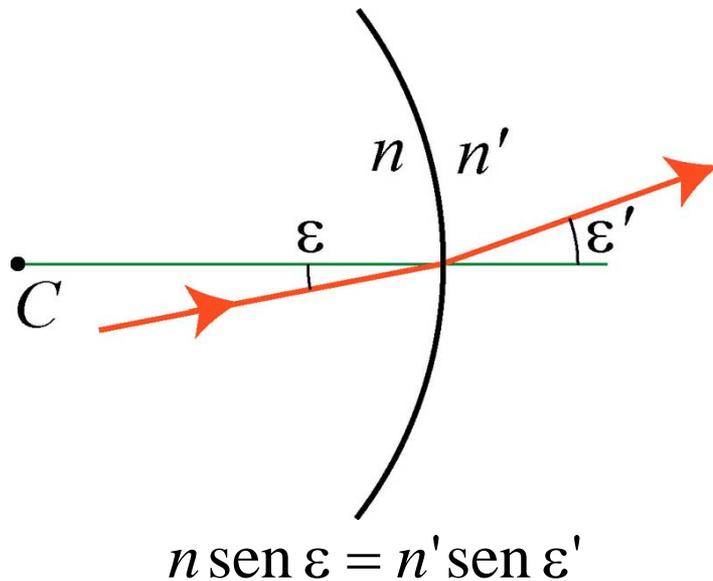
- El dioptrio esférico
- Relaciones paraxiales de la superficie esférica
- Concepto de aumento
- Introducción a las lentes esféricas
- Espejos esféricos
- Trazado gráfico de rayos



Interfases esféricas

El dioptrio esférico

- Un **dioptrio esférico** es un sistema óptico formado por dos medios dieléctricos de índices de refracción diferentes, n y n' , que están separados por una interfase esférica con centro de curvatura C .



Interfases esféricas

El dioptrio esférico

Criterio de signos:

- Para las distancias en eje y a lo largo de cualquier rayo, se toma como sentido positivo el de la luz incidente.

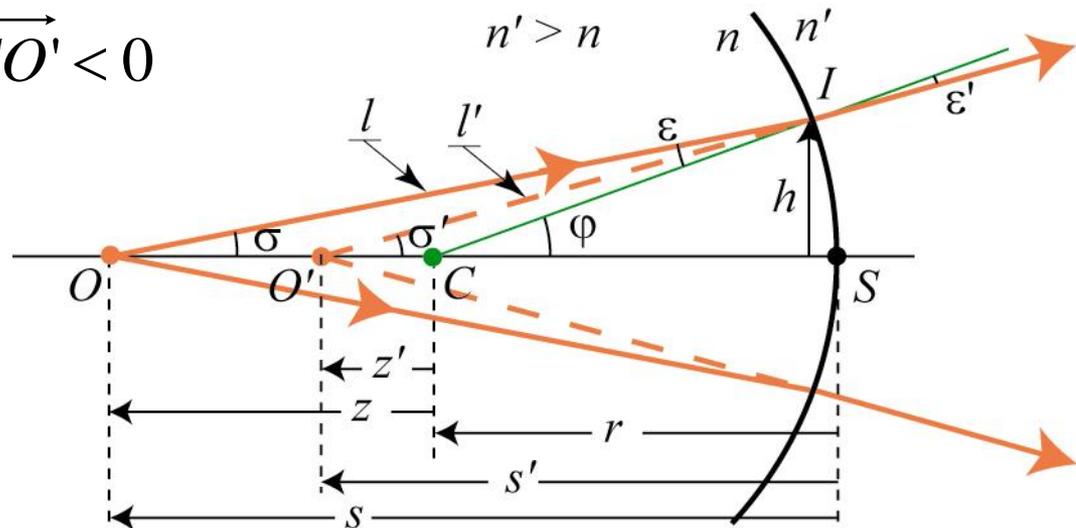
$$l = \overrightarrow{IO} < 0 \quad z = \overrightarrow{CO} < 0$$

$$l' = \overrightarrow{IO'} < 0 \quad z' = \overrightarrow{CO'} < 0$$

$$r = \overrightarrow{SC} < 0$$

$$s = \overrightarrow{SO} < 0$$

$$s' = \overrightarrow{SO'} < 0$$



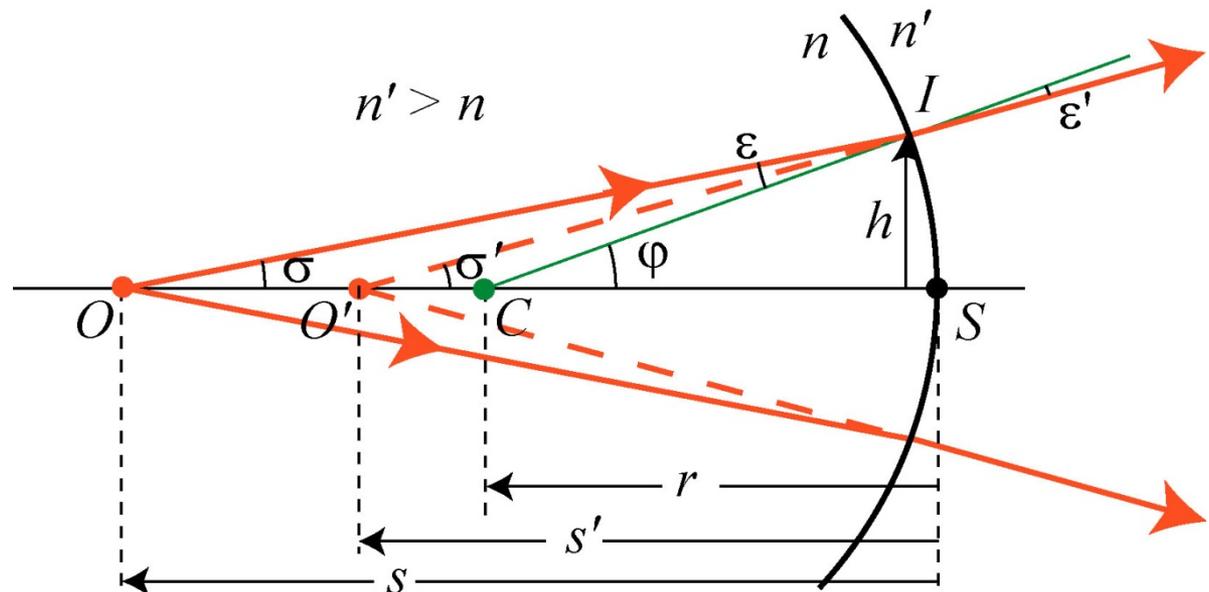
Interfases esféricas

El dioptrio esférico

Criterio de signos:

- Los segmentos normales al eje serán positivos hacia arriba y negativos hacia abajo.

$$h > 0$$



Interfases esféricas

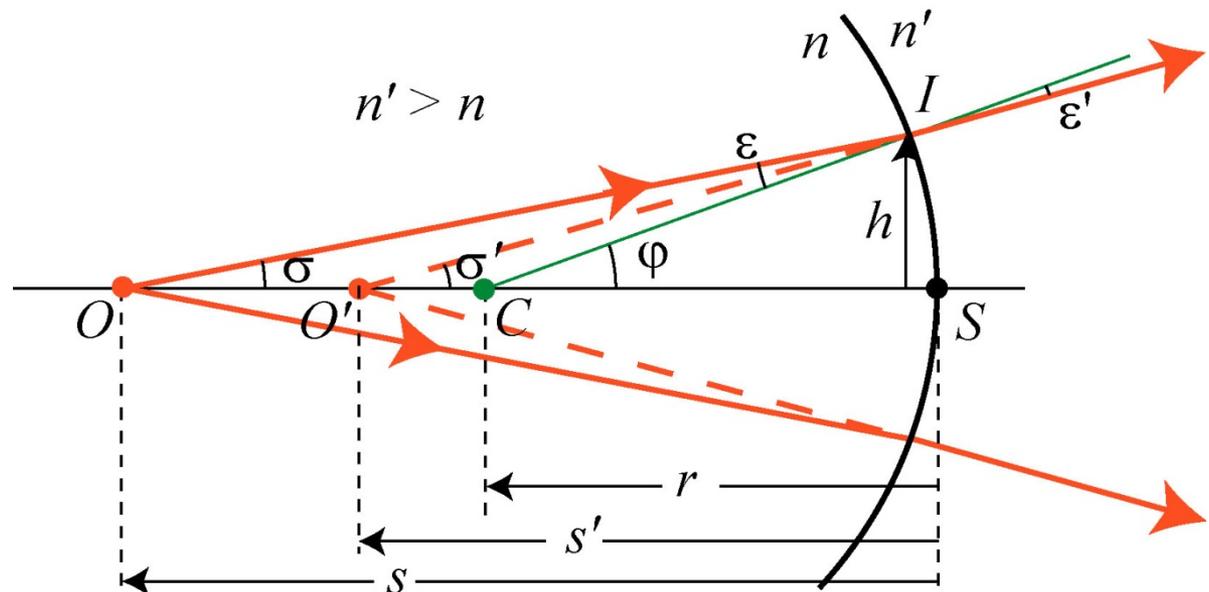
El dioptrio esférico

Criterio de signos:

- Los ángulos de incidencia y refracción son positivos si al llevar el rayo, por giro, a coincidir con la normal por el camino angular más corto se va en sentido de las agujas del reloj.

$$\varepsilon < 0$$

$$\varepsilon' < 0$$



Interfases esféricas

El dioptrio esférico

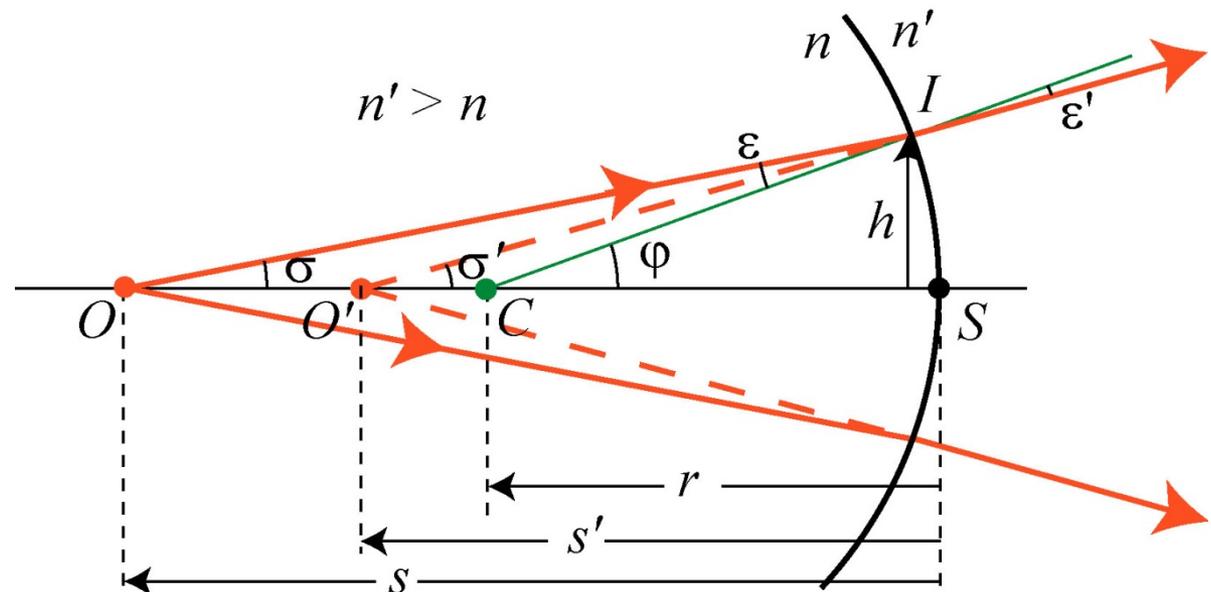
Criterio de signos:

- Los ángulos con el eje son positivos si al llevar la recta que los forma a coincidir por giro con el eje se va en sentido contrario a las agujas del reloj.

$$\varphi < 0$$

$$\sigma < 0$$

$$\sigma' < 0$$



Interfases esféricas

El dioptrio esférico

Recordamos un poco de trigonometría:

- **Ley de los senos:**

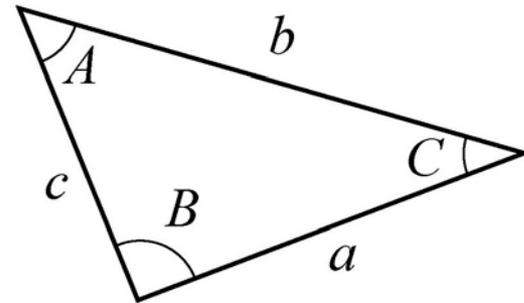
$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

- **Ley de los cosenos:**

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

- **Suma de los ángulos interiores:**

$$\pi = A + B + C$$



Interfases esféricas

El dioptrio esférico

Si aplicamos estas relaciones trigonométricas al triángulo OIC

- **Ley de los senos:**

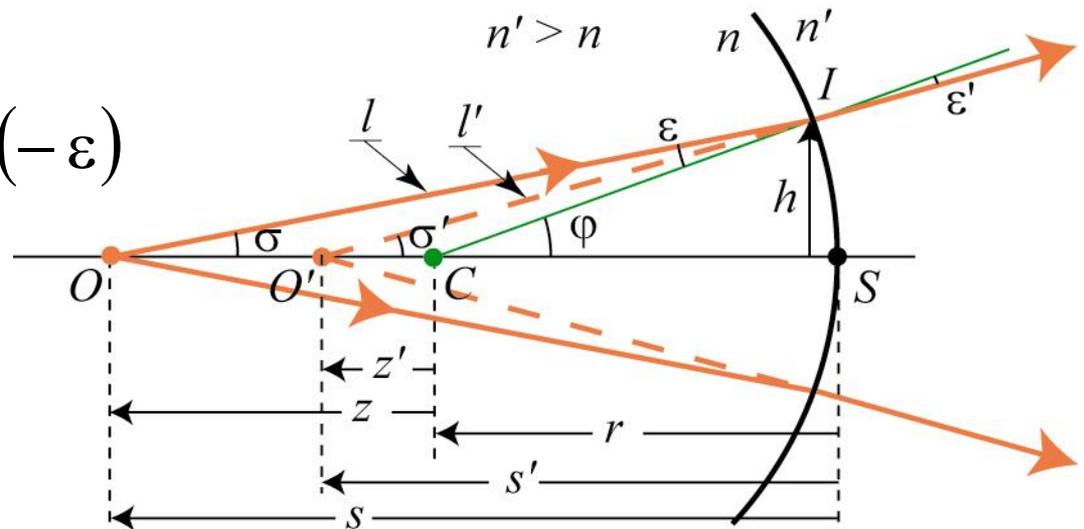
$$\frac{-l}{\text{sen}(\pi + \varphi)} = \frac{-r}{\text{sen}(-\sigma)} = \frac{-z}{\text{sen}(-\varepsilon)}$$

- **Ley de los cosenos:**

$$z^2 = r^2 + l^2 - 2rl \cos(-\varepsilon)$$

- **Suma de ángulos:**

$$\pi = -\sigma - \varepsilon + (\pi + \varphi)$$



Interfases esféricas

El dioptrio esférico

Si aplicamos estas relaciones trigonométricas al triángulo $O'IC$

- **Ley de los senos:**

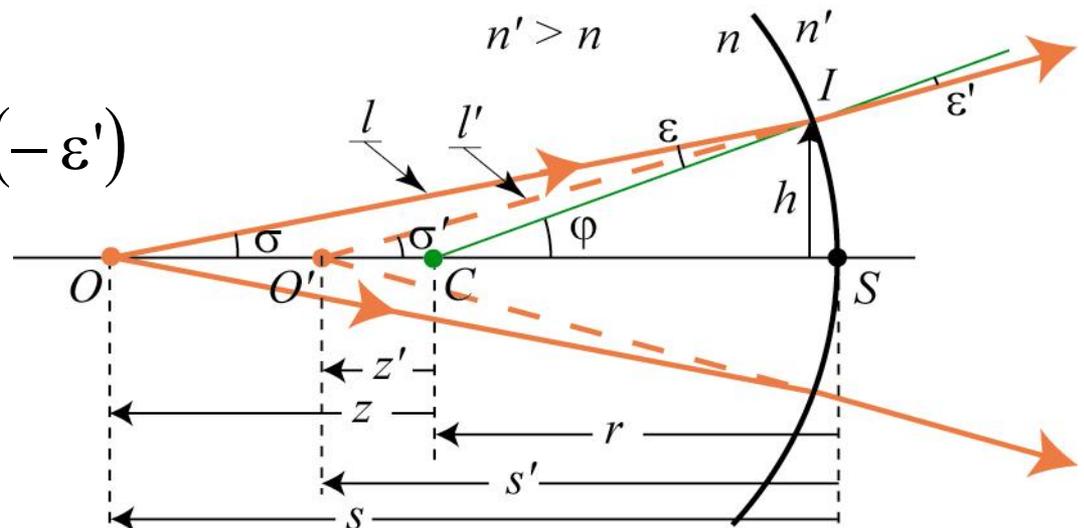
$$\frac{-l'}{\text{sen}(\pi + \varphi)} = \frac{-r}{\text{sen}(-\sigma')} = \frac{-z'}{\text{sen}(-\varepsilon')}$$

- **Ley de los cosenos:**

$$z'^2 = r^2 + l'^2 - 2rl' \cos(-\varepsilon')$$

- **Suma de ángulos:**

$$\pi = -\sigma' - \varepsilon' + (\pi + \varphi)$$



Interfases esféricas

El dioptrio esférico

Resumen de las expresiones encontradas:

$$\frac{l}{\text{sen } \varphi} = \frac{r}{\text{sen } \sigma} = \frac{z}{\text{sen } \varepsilon}$$

$$\frac{l'}{\text{sen } \varphi} = \frac{r}{\text{sen } \sigma'} = \frac{z'}{\text{sen } \varepsilon'}$$

$$z^2 = r^2 + l^2 - 2rl \cos \varepsilon$$

$$z'^2 = r^2 + l'^2 - 2rl' \cos \varepsilon'$$

$$\varphi = \sigma + \varepsilon$$

$$\varphi = \sigma' + \varepsilon'$$

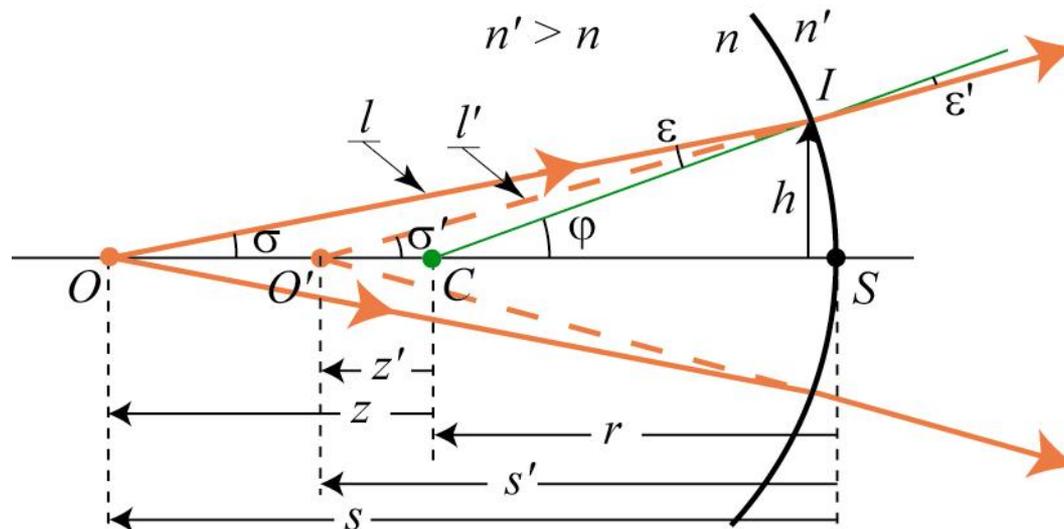


Interfases esféricas

El dioptrio esférico

Una relación geométrica útil:

$$\left. \begin{aligned} \frac{l}{\sin \varphi} = \frac{r}{\sin \sigma} = \frac{z}{\sin \varepsilon} &\Rightarrow r \sin \varphi = l \sin \sigma \\ \frac{l'}{\sin \varphi} = \frac{r}{\sin \sigma'} = \frac{z'}{\sin \varepsilon'} &\Rightarrow r \sin \varphi = l' \sin \sigma' \end{aligned} \right\} l \sin \sigma = l' \sin \sigma'$$



Interfases esféricas

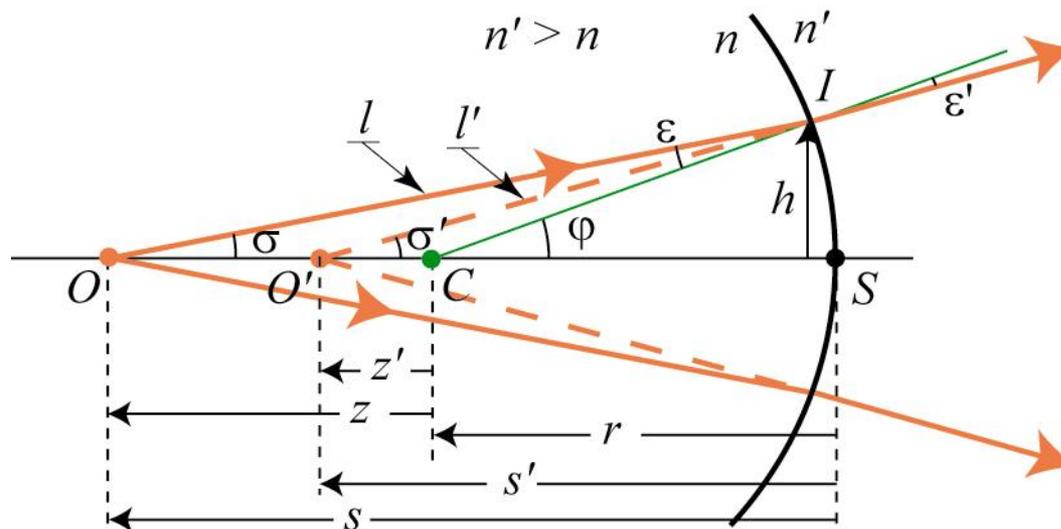
El dioptrio esférico

Otra relación óptico-geométrica útil:

$$\left. \begin{aligned} \frac{l}{\sin \varphi} = \frac{r}{\sin \sigma} = \frac{z}{\sin \varepsilon} &\Rightarrow \sin \varphi = \frac{l}{z} \sin \varepsilon \\ \frac{l'}{\sin \varphi} = \frac{r}{\sin \sigma'} = \frac{z'}{\sin \varepsilon'} &\Rightarrow \sin \varphi = \frac{l'}{z'} \sin \varepsilon' \end{aligned} \right\} \frac{l}{z} \sin \varepsilon = \frac{l'}{z'} \sin \varepsilon'$$

$$n \sin \varepsilon = n' \sin \varepsilon'$$

$$\frac{1}{n} \frac{l}{z} = \frac{1}{n'} \frac{l'}{z'}$$



Interfases esféricas

El dioptrio esférico

Deducimos que la cantidad $n z / l$ es una cantidad invariante en la refracción sobre un dioptrio esférico. Esta cantidad recibe el nombre de **invariante fundamental**.

- El único **invariante óptico** es la ley de Snell de la refracción:

$$n \operatorname{sen} \varepsilon = n' \operatorname{sen} \varepsilon' \quad \Rightarrow \quad C_1 = n \operatorname{sen} \varepsilon$$

- Además de las constantes geométricas r y φ , ya hemos obtenido el **invariante geométrico**:

$$l \operatorname{sen} \sigma = l' \operatorname{sen} \sigma' \quad \Rightarrow \quad C_2 = l \operatorname{sen} \sigma$$

- y a partir de C_1 y C_2 podemos obtener otros invariantes óptico-geométricos:



Interfases esféricas

El dioptrio esférico

Utilizando la relación

$$\frac{r}{\text{sen } \sigma} = \frac{z}{\text{sen } \varepsilon}$$

podemos deducir otros invariantes óptico-geométricos:

$$C_3 = r \frac{C_1}{C_2} = r \frac{n}{l} \left(\frac{\text{sen } \varepsilon}{\text{sen } \sigma} \right) = r \frac{n}{l} \left(\frac{z}{r} \right) = n \frac{z}{l}$$

$$C_4 = r C_1 = \left(z \frac{\text{sen } \sigma}{\text{sen } \varepsilon} \right) n \text{sen } \varepsilon = nz \text{sen } \sigma$$



Interfases esféricas

El dioptrio esférico

Otro invariante óptico-geométrico:

$$C_5 = C_1 \sqrt{\frac{1}{C_2^2} - \frac{1}{r^2}} = n \sqrt{\frac{1}{l^2} \left(\frac{\sin \varepsilon}{\sin \sigma} \right)^2 - \frac{\sin^2 \varepsilon}{r^2}}$$



$$\frac{r}{\sin \sigma} = \frac{z}{\sin \varepsilon}$$

$$z^2 = r^2 + l^2 - 2rl \cos \varepsilon$$



$$C_5 = n \left(\frac{1}{l} - \frac{\cos \varepsilon}{r} \right)$$



Interfases esféricas

El dioptrio esférico

Resumen de los invariante óptico-geométricos más importantes:

$$C_1 = n \operatorname{sen} \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n \operatorname{sen} \varepsilon = n' \operatorname{sen} \varepsilon'$$

$$C_2 = l \operatorname{sen} \sigma \quad \Rightarrow \quad l \operatorname{sen} \sigma = l' \operatorname{sen} \sigma'$$

$$C_3 = n \frac{z}{l} \quad \Rightarrow \quad n \frac{z}{l} = n' \frac{z'}{l'}$$

$$C_4 = nz \operatorname{sen} \sigma \quad \Rightarrow \quad nz \operatorname{sen} \sigma = n' z' \operatorname{sen} \sigma'$$

$$C_5 = n \left(\frac{1}{l} - \frac{\cos \varepsilon}{r} \right) \quad \Rightarrow \quad n \left(\frac{1}{l} - \frac{\cos \varepsilon}{r} \right) = n' \left(\frac{1}{l'} - \frac{\cos \varepsilon'}{r} \right)$$



Interfases esféricas

El dioptrio esférico

Observamos que la posición del punto O' , caracterizada por la distancia l' , depende de:

- La **posición** del punto **objeto** O caracterizada por l .
- El cociente de **índices de refracción** n'/n :
- El **ángulo de incidencia** ε de los rayos.
- El **radio de curvatura** r del dioptrio esférico.

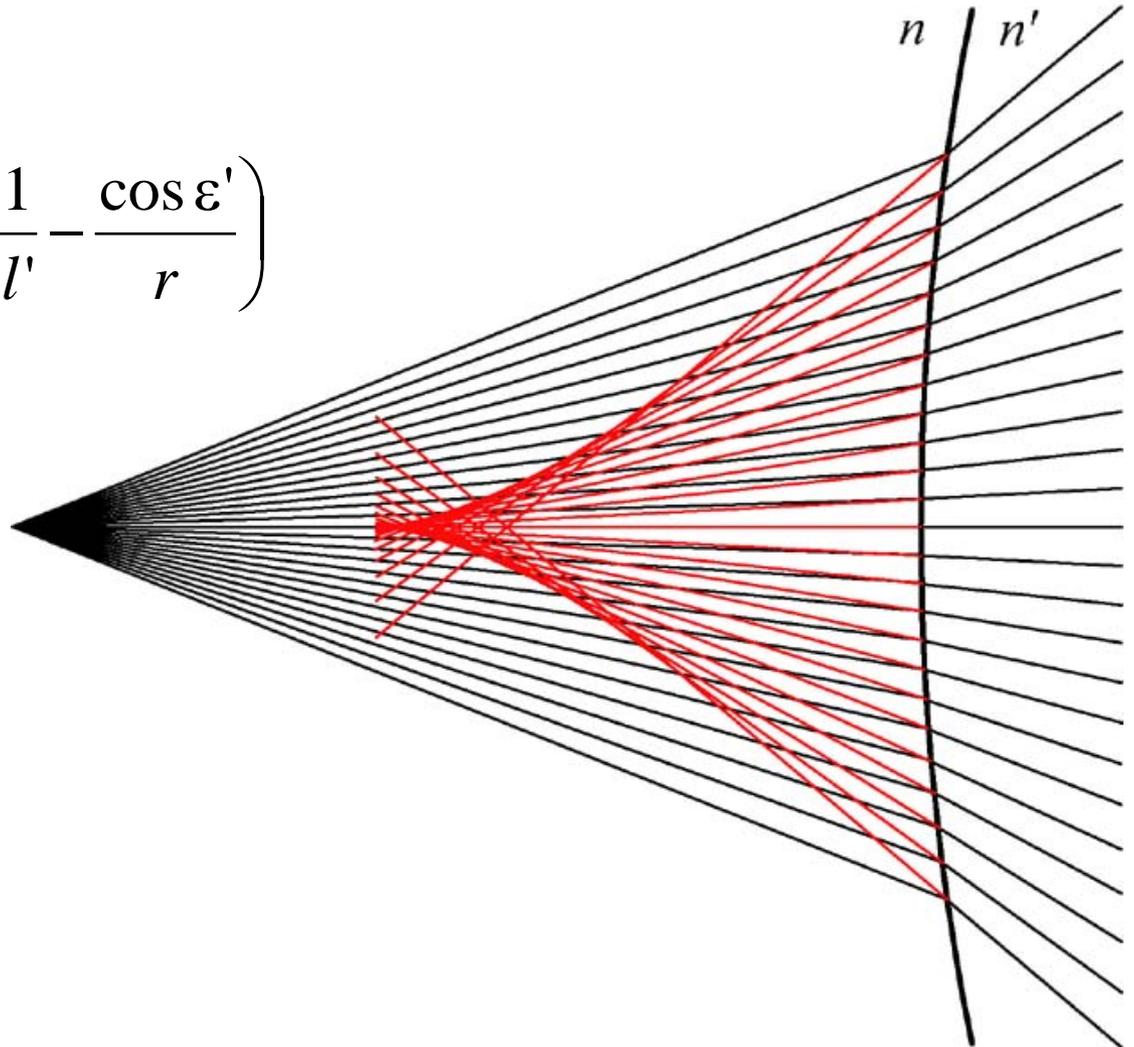
$$n\left(\frac{1}{l} - \frac{\cos \varepsilon}{r}\right) = n'\left(\frac{1}{l'} - \frac{\cos \varepsilon'}{r}\right)$$



Interfases esféricas

El dioptrio esférico

$$n \left(\frac{1}{l} - \frac{\cos \varepsilon}{r} \right) = n' \left(\frac{1}{l'} - \frac{\cos \varepsilon'}{r} \right)$$



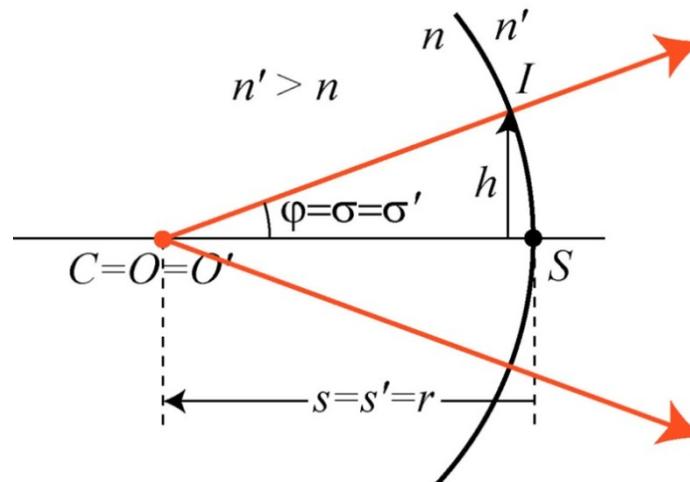
Interfases esféricas

El dioptrio esférico

Queremos estudiar el dioptrio esférico como **superficie estigmática**: Debemos encontrar para qué valores de z (posición del punto O), el valor de z' no depende de ε (posición fija para O')

$$nz \sin \sigma = n' z' \sin \sigma' \Rightarrow z = z' = 0$$

- Toda esfera es estigmática para su centro.



$$\varepsilon = \varepsilon' = 0$$

$$\varphi = \sigma = \sigma'$$

$$s = s' = r$$

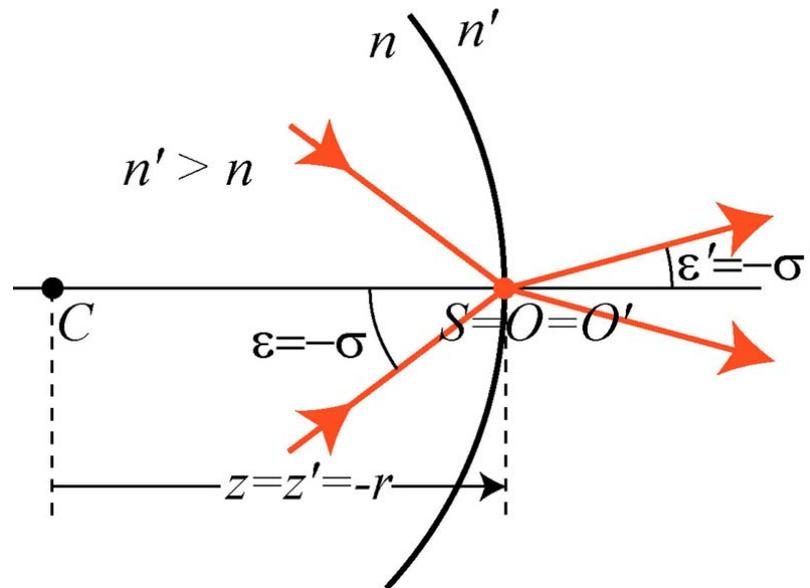


Interfases esféricas

El dioptrio esférico

$$l \operatorname{sen} \sigma = l' \operatorname{sen} \sigma' \Rightarrow l = l' = 0$$

- Para los puntos de la superficie esférica, la imagen se confunde con el objeto.



$$\varepsilon \neq \varepsilon'$$

$$\varphi = 0$$

$$s = s' = 0$$



Interfases esféricas

El dioptrio esférico

- **Condición del seno de Abbe:**

$$nz \operatorname{sen} \sigma = n' z' \operatorname{sen} \sigma' \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\operatorname{sen} \sigma'} = \frac{n' z'}{nz} = \text{cte.}$$

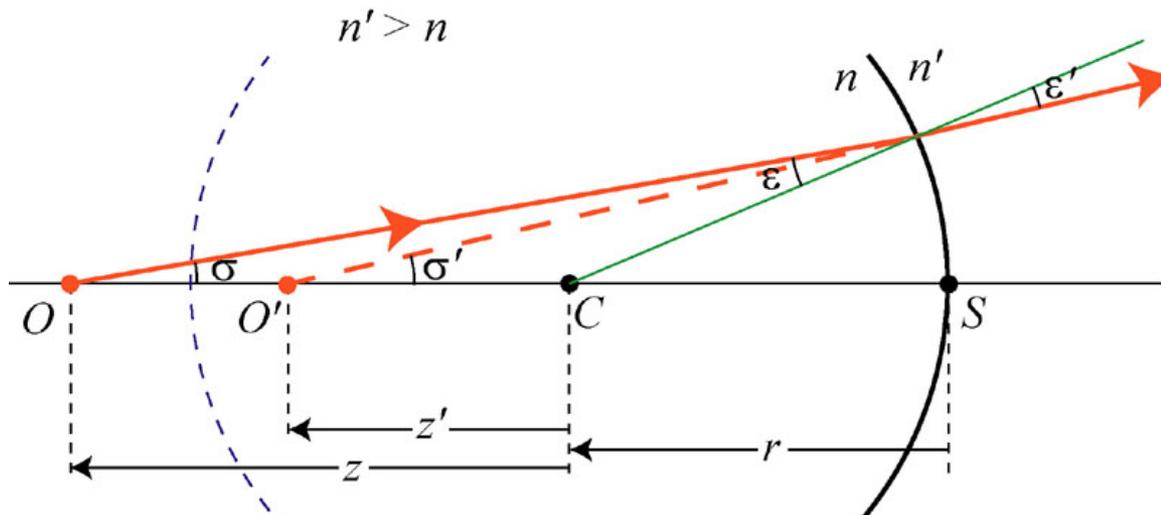
$$\left. \begin{array}{l} z = \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{\operatorname{sen} \sigma} r \\ z' = \frac{\operatorname{sen} \varepsilon'}{\operatorname{sen} \sigma'} r \end{array} \right\} \xrightarrow{\sigma=\varepsilon' \text{ y } \sigma'=\varepsilon} \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{\operatorname{sen} \varepsilon'} r = \frac{n'}{n} r \\ z' = \frac{\operatorname{sen} \varepsilon'}{\operatorname{sen} \varepsilon} r = \frac{n}{n'} r \end{array} \right.$$

- Las variables axiales z y z' tienen el mismo signo que r . Los puntos objeto O e imagen O' que cumplen la anterior relación se denominan **puntos de Young** o **puntos de Weierstrass**.



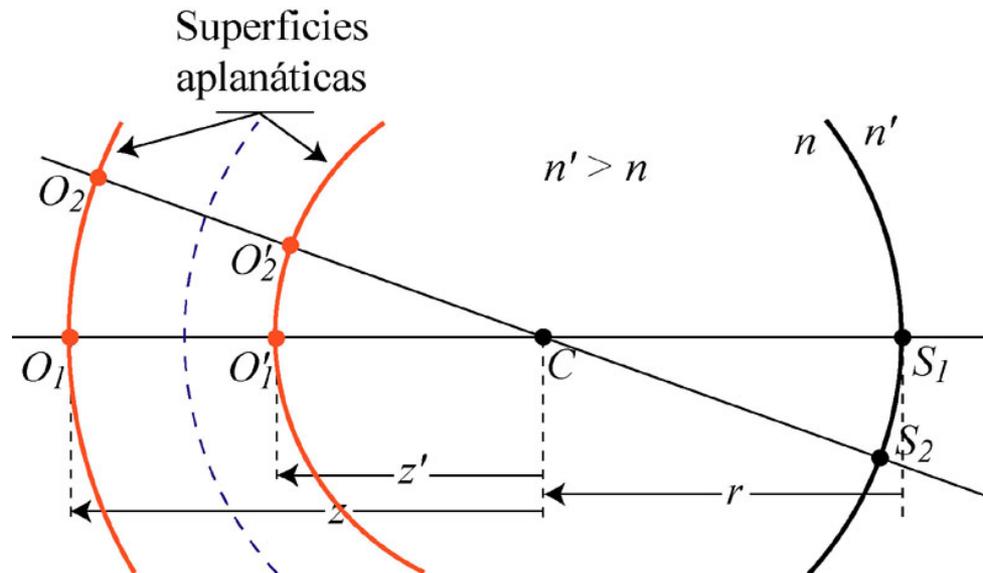
Interfases esféricas

El dioptrio esférico



$$z = \frac{n'}{n} r$$

$$z' = \frac{n}{n'} r$$



$$\epsilon = \sigma'$$

$$\epsilon' = \sigma$$

$$\varphi = \epsilon + \epsilon'$$



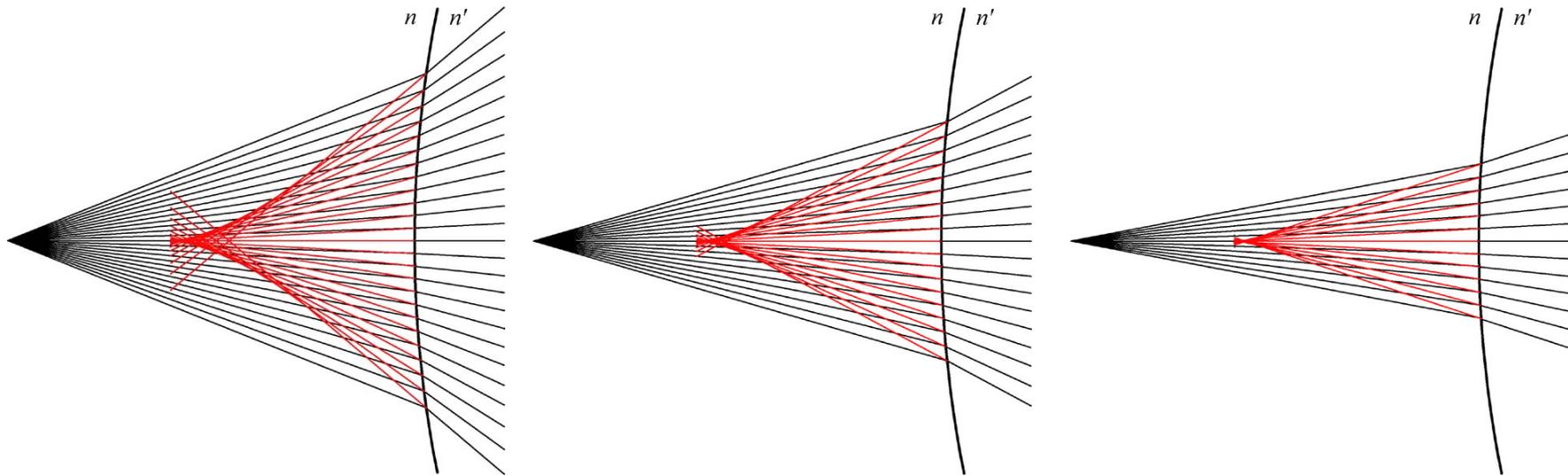
Tema III. Interfases esféricas

- El dioptrio esférico
- Relaciones paraxiales de la superficie esférica
- Concepto de aumento
- Introducción a las lentes esféricas
- Espejos esféricos
- Trazado gráfico de rayos



Interfases esféricas

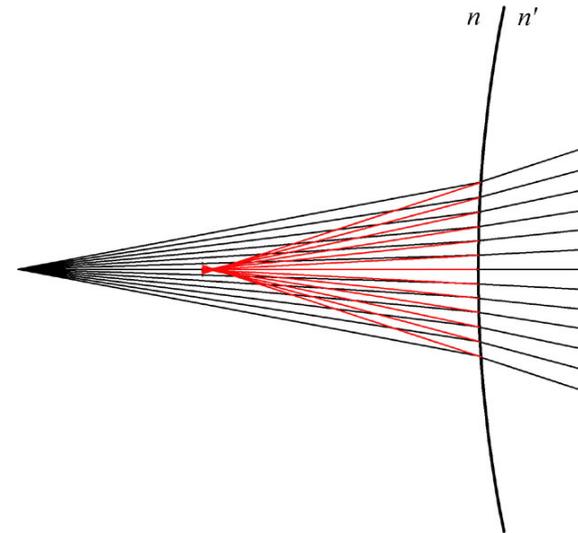
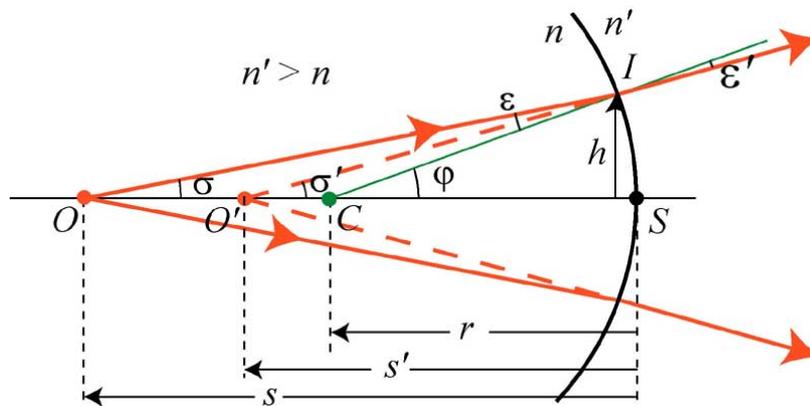
Relaciones paraxiales de la superficie esférica



Interfases esféricas

Relaciones paraxiales de la superficie esférica

- Para una posición fija del punto objeto O (s fijo), se obtiene una **posición distinta del punto O'** .
- Sin embargo, para **ángulos** de incidencia y emergencia **pequeños** ($\varepsilon, \varepsilon' < 5^\circ$), la posición de O' es prácticamente invariable.



- En este caso, se debe cumplir que φ , σ y σ' sean pequeños.



Interfases esféricas

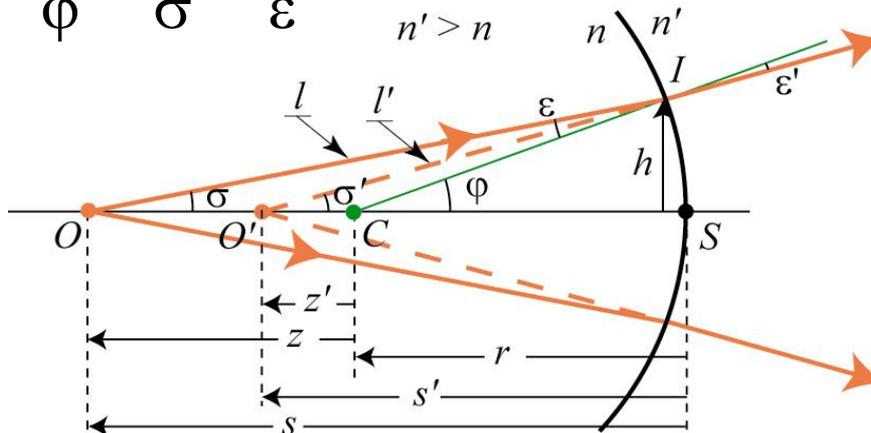
Relaciones paraxiales de la superficie esférica

A partir de las expresiones encontradas para el dioptrio esférico:

$$\frac{l}{\sin \varphi} = \frac{r}{\sin \sigma} = \frac{z}{\sin \varepsilon} \qquad z^2 = r^2 + l^2 - 2rl \cos \varepsilon$$

podemos obtener expresiones compatibles con la aproximación paraxial:

$$\frac{l}{\varphi} = \frac{r}{\sigma} = \frac{z}{\varepsilon} \qquad z^2 = r^2 + l^2 - 2rl = (r - l)^2 \Rightarrow z = -r + l$$



$$z = -r + s$$

$$l \approx s$$

$$l' \approx s'$$



Interfases esféricas

Relaciones paraxiales de la superficie esférica

Resumen de los invariante óptico-geométricos más importantes en la aproximación paraxial:

$$C_1 = n \operatorname{sen} \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n\varepsilon = n'\varepsilon'$$

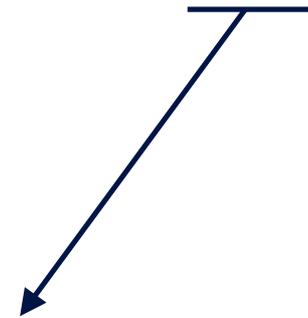
$$C_2 = l \operatorname{sen} \sigma \quad \Rightarrow \quad s\sigma = s'\sigma'$$

$$C_3 = n \frac{z}{l} \quad \Rightarrow \quad n \frac{z}{s} = n' \frac{z'}{s'}$$

$$C_4 = nz \operatorname{sen} \sigma \quad \Rightarrow \quad nz\sigma = n'z'\sigma'$$

$$C_5 = n \left(\frac{1}{l} - \frac{\cos \varepsilon}{r} \right) \quad \Rightarrow \quad n \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r} \right) = n' \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{r} \right)$$

Invariante de Abbe



Interfases esféricas

Relaciones paraxiales de la superficie esférica

Invariante de Abbe:

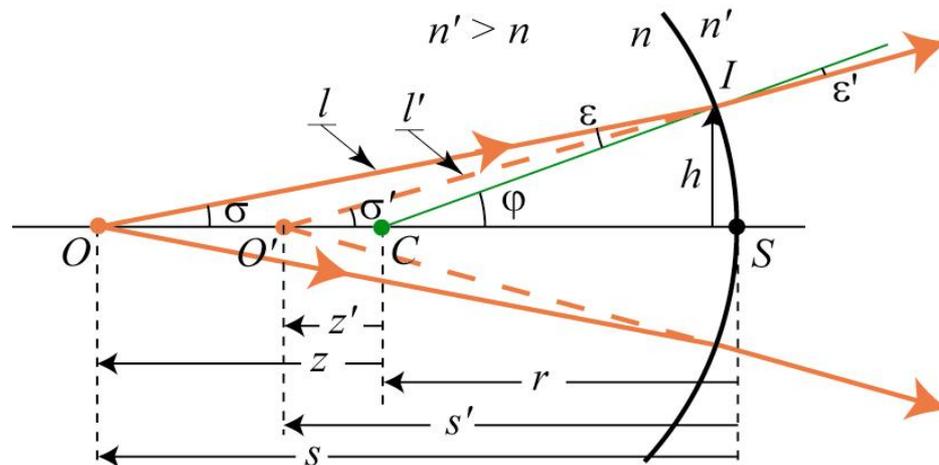
Caso particular: dioptrio plano

$$n \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r} \right) = n' \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{r} \right) \quad r \rightarrow \infty \Rightarrow s' = \frac{n'}{n} s$$

Si nos interesa trabajar con las variables axiales z y z' :

$$\left. \begin{array}{l} s = r + z \\ s' = r + z' \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{n} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{n'} \left(\frac{1}{z'} + \frac{1}{r} \right)$$

$n' > n$

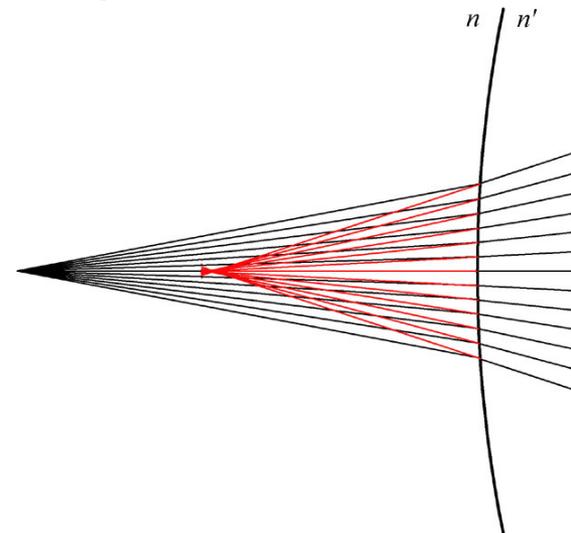


Interfases esféricas

Relaciones paraxiales de la superficie esférica

- Ahora s' no depende de ε .
- Existe una condición de **estigmatismo aproximado** si consideramos rayos con ángulos de incidencia ε y emergencia ε' pequeños (**rayos paraxiales**).
- En la práctica se consigue con la inserción de **diafragmas** que elimina los rayos que no cumplen la condición de estigmatismo aproximado.

$$n \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r} \right) = n' \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{r} \right)$$

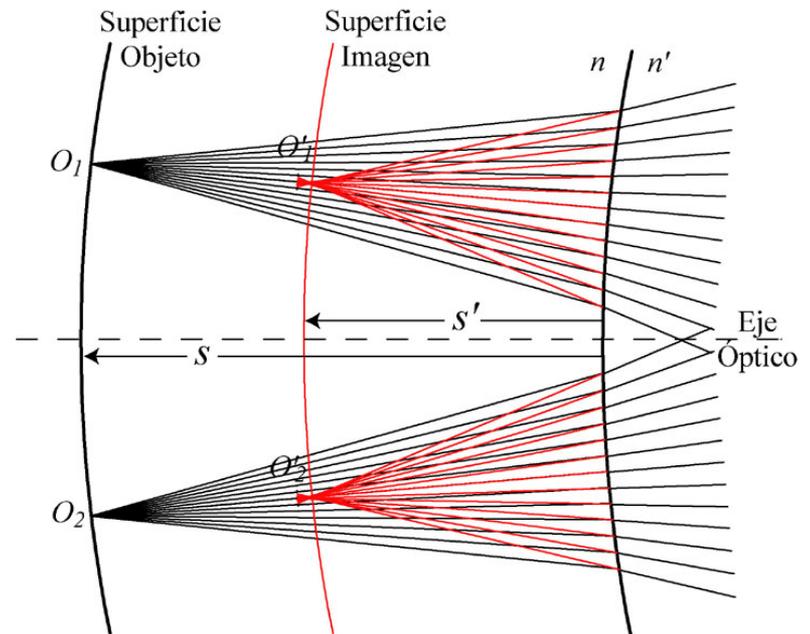
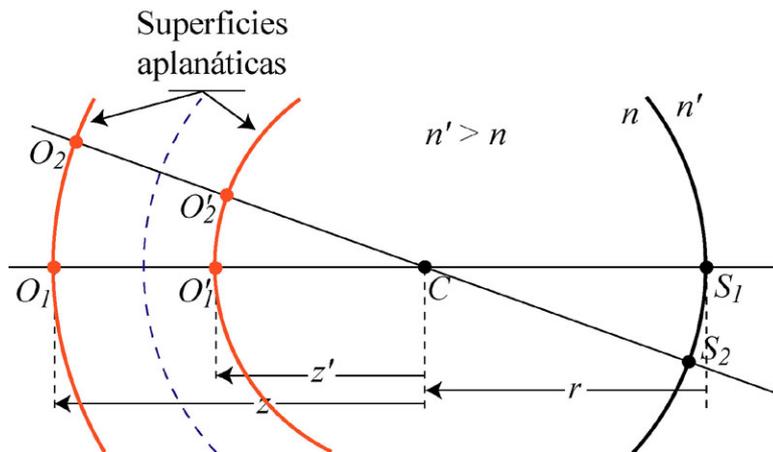


Interfases esféricas

Relaciones paraxiales de la superficie esférica

Imagen de un objeto plano perpendicular al eje óptico:

- El **eje de un sistema óptico** queda determinado por la trayectoria de un rayo que no se desvía al refractarse.
- Si el objeto extenso es plano y perpendicular al eje óptico, la **imagen no es plana**.



Interfases esféricas

Relaciones paraxiales de la superficie esférica

Para que la condición de estigmatismo aproximado sea válida, se ha de cumplir la **aproximación de Gauss**:

- Dioptrio con superficie activa pequeña.

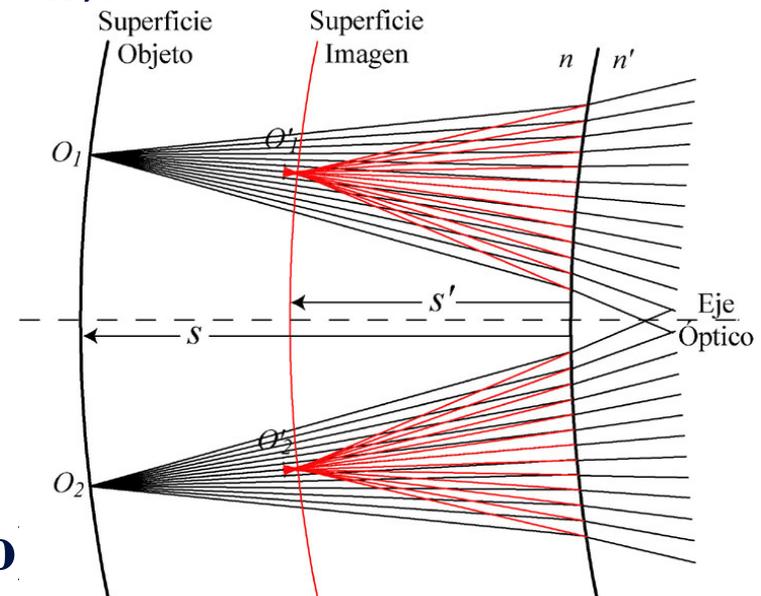
- Superficie de extensión pequeña

- Uso de **diafragmas (de abertura)**: pupila ocular

- Objeto plano perpendicular al eje óptico y centrado, de pequeña dimensión activa.

- Objeto de extensión pequeña

- Uso de **diafragmas (de campo)** retina ocular



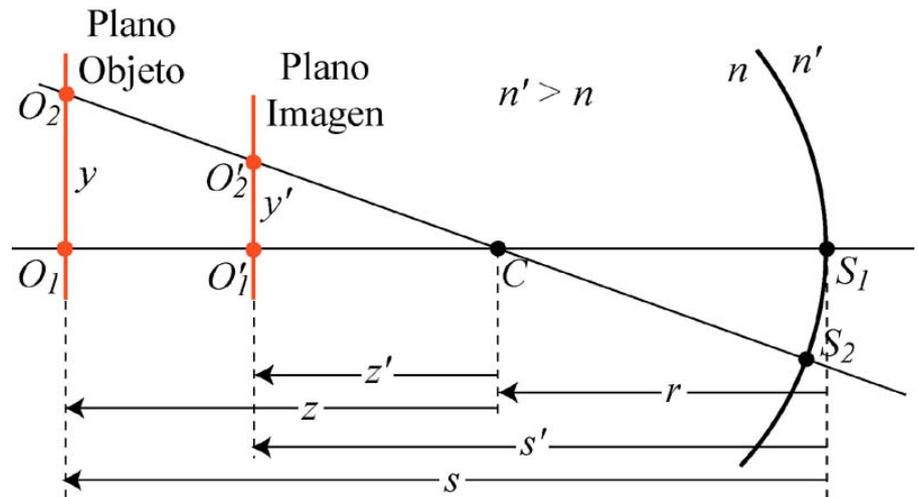
Interfases esféricas

Relaciones paraxiales de la superficie esférica

Hasta ahora hemos obtenido las siguientes **ecuaciones de conjugación**:

$$n \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r} \right) = n' \left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{r} \right)$$

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{n'} \left(\frac{1}{z'} + \frac{1}{r} \right)$$



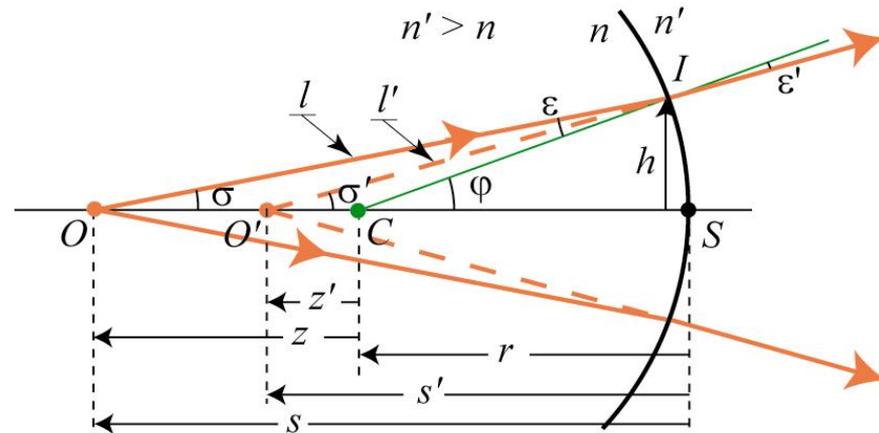
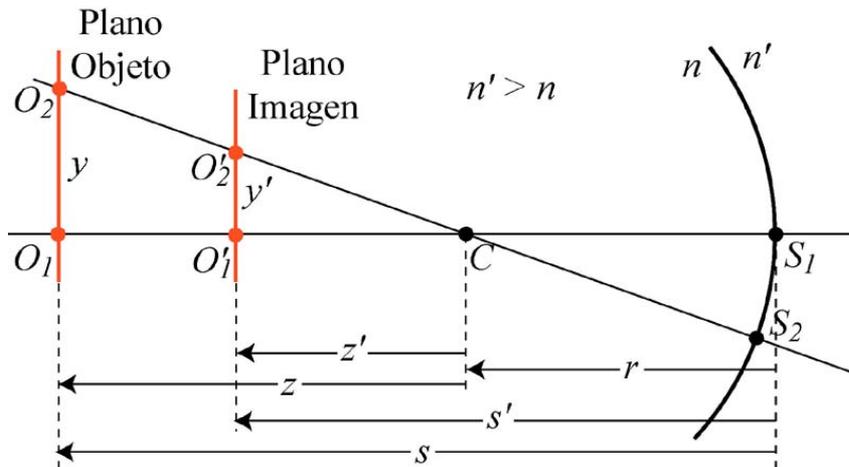
- La **ecuación de Lagrange-Helmholtz** relaciona el índice de refracción, n , el tamaño del objeto, y , y el ángulo σ correspondiente a un rayo que parte del punto en eje del plano objeto, con las magnitudes homólogas de la imagen.



Interfases esféricas

Relaciones paraxiales de la superficie esférica

Relación de Lagrange-Helmholtz:



$$\left. \begin{aligned} y &= \overline{O_1 O_2} \\ y' &= \overline{O'_1 O'_2} \end{aligned} \right\}$$

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} \neq 1$$

$$nz\sigma = n'z'\sigma'$$

$$\Downarrow z' = \frac{y'}{y}z$$

$$ny\sigma = n'y'\sigma'$$

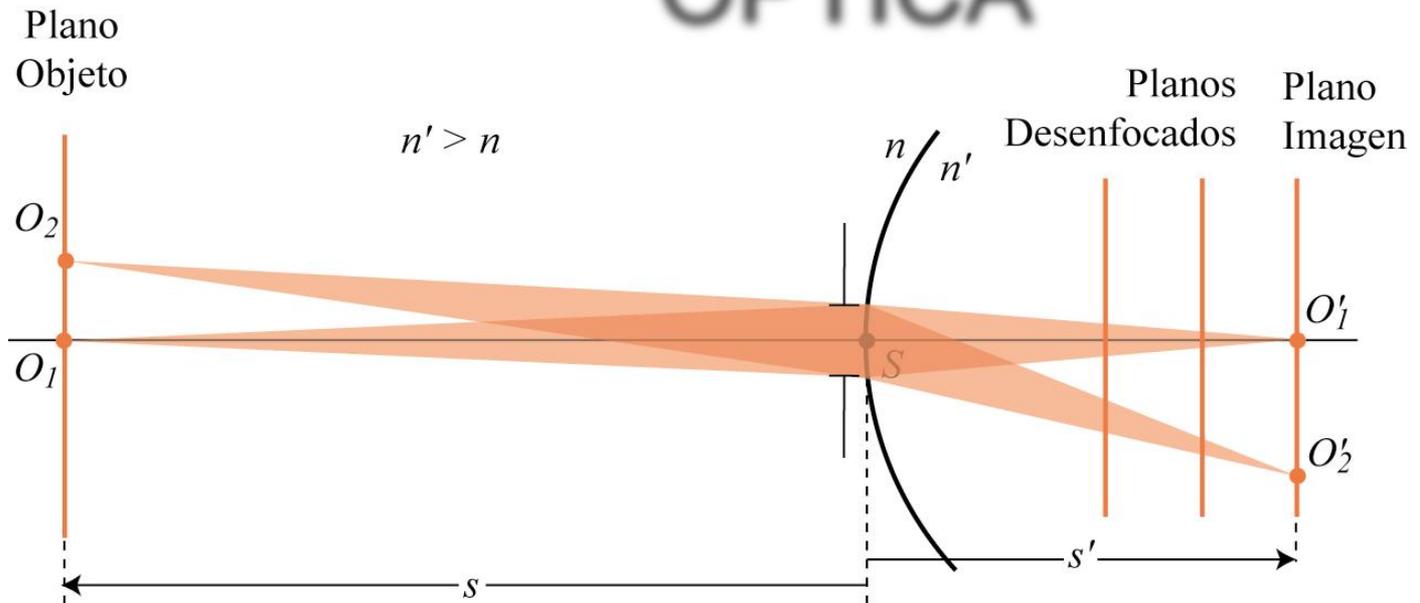


Interfases esféricas

Relaciones paraxiales de la superficie esférica

Aplicaciones: Imagen retiniana en el modelo de ojo esquemático de Emsley

OPTICA
OPTICA
OPTICA



Tema III. Interfases esféricas

- El dioptrio esférico
- Relaciones paraxiales de la superficie esférica
- **Concepto de aumento**
- Introducción a las lentes esféricas
- Espejos esféricos
- Trazado gráfico de rayos

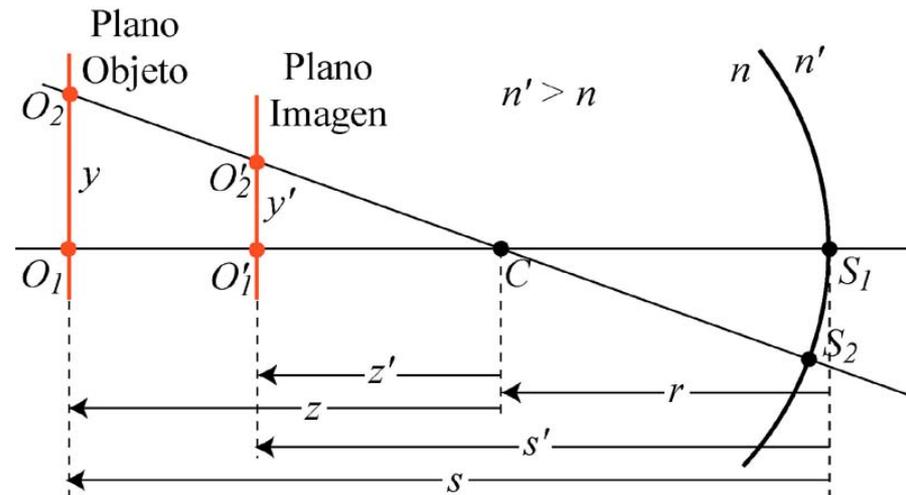


Interfases esféricas

Concepto de aumento

- En la **aproximación de Gauss**, si ante un dioptrio esférico se sitúa un **objeto plano** normal al eje y de tamaño y , el sistema dará de él una **imagen** semejante, **plana** normal al eje y de tamaño y' .
- La razón β' de semejanza recibe el nombre de **aumento lateral**.
- Según que el aumento lateral sea positivo o negativo, la imagen será **directa** o **invertida**, respectivamente.

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}$$



Interfases esféricas

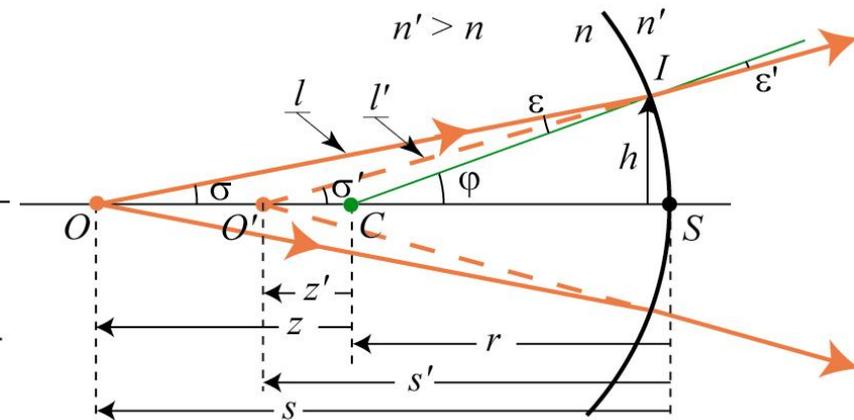
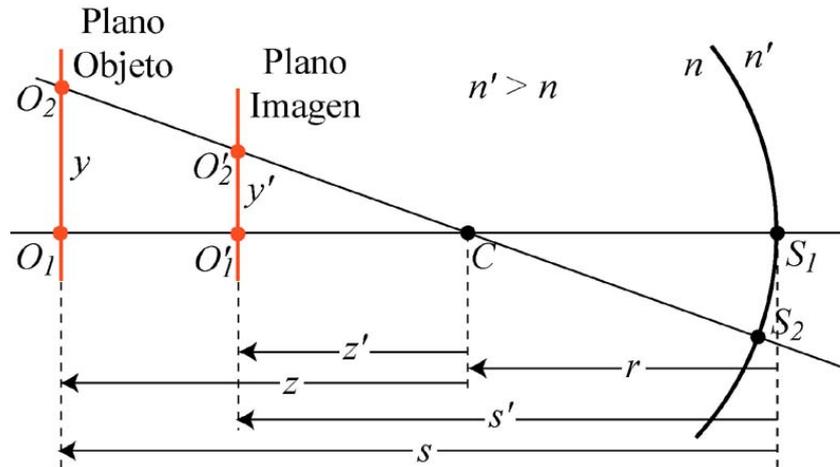
Concepto de aumento

$$nz\sigma = n'z'\sigma' \Rightarrow \frac{z'}{z} = \frac{n\sigma}{n'\sigma'}$$

$$s\sigma = s'\sigma' \Rightarrow \frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{s'}{s}$$

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}$$

$$\beta' = \frac{n}{n'} \frac{s'}{s}$$



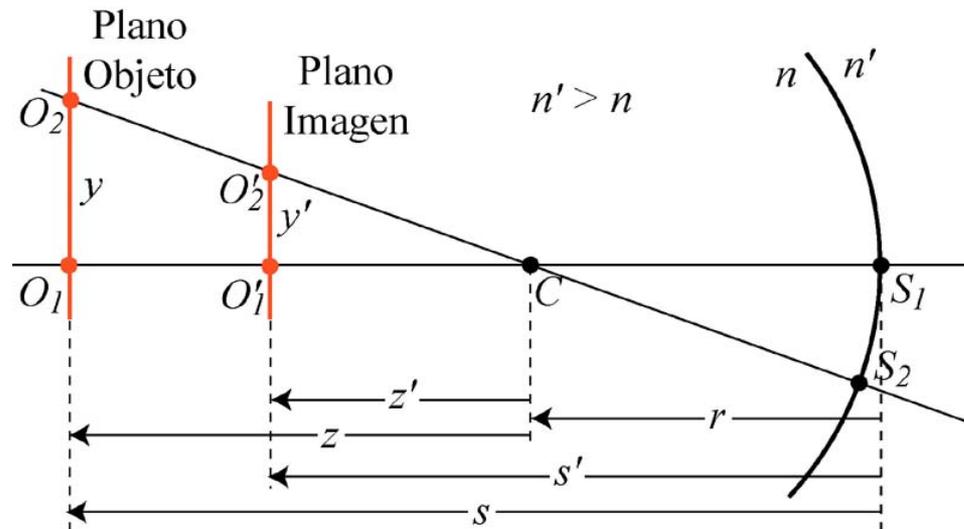
Interfases esféricas

Concepto de aumento

Resumen de las principales **ecuaciones de conjugación**:

$$n\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r}\right) = n'\left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{r}\right) \qquad \beta' = \frac{n}{n'} \frac{s'}{s}$$

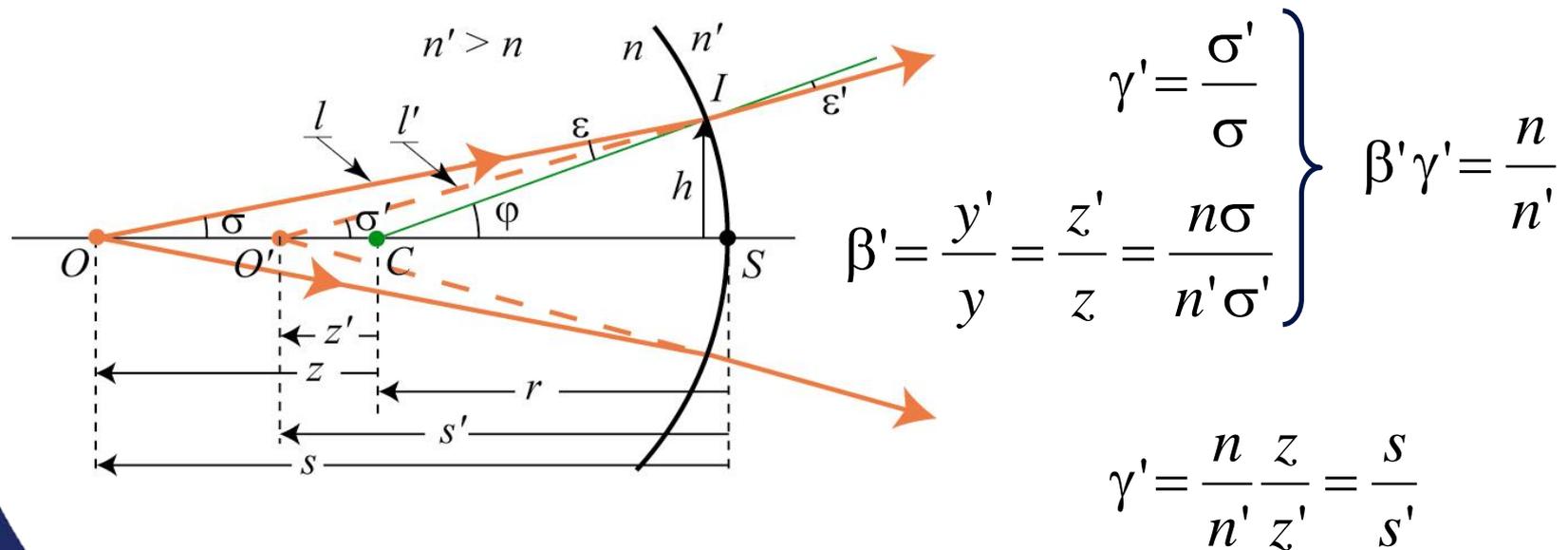
$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{n'}\left(\frac{1}{z'} + \frac{1}{r}\right) \qquad \beta' = \frac{z'}{z}$$



Interfases esféricas

Concepto de aumento

- Si del punto axial del plano objeto O emerge un rayo formando un ángulo σ con el eje óptico, el rayo emergente se dirige hacia el punto axial del plano imagen O' formando un ángulo σ' .
- La razón γ' recibe el nombre de **aumento angular**.

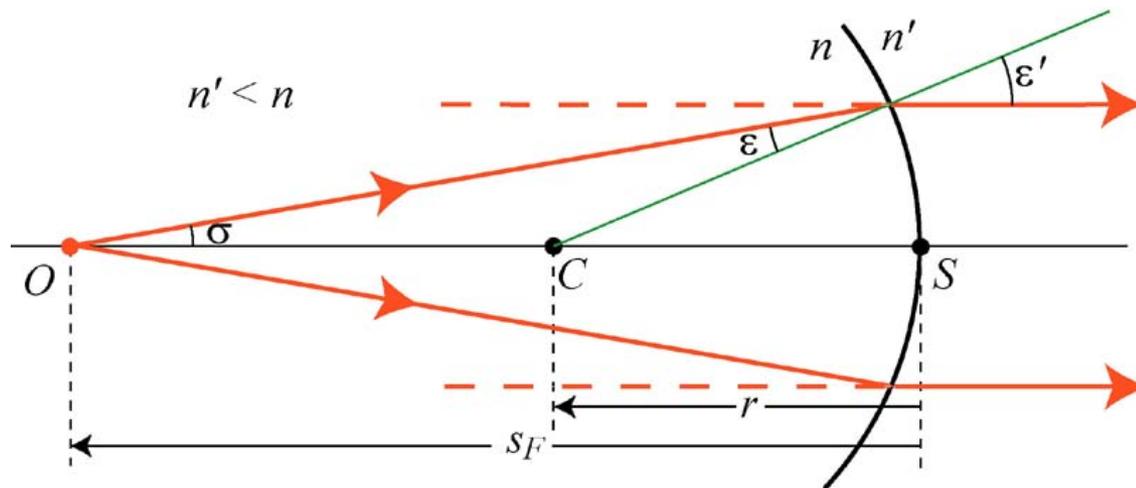


Interfases esféricas

Concepto de aumento

Imagen en el infinito: Podemos encontrar la posición de un plano objeto, caracterizado por s_F , para el cual la distancia s' es infinito, es decir, la imagen se encuentra a una distancia infinita del dioptrio.

$$n\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r}\right) = n'\left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{r}\right) \xrightarrow{\frac{1}{s'}=0} s_F = \frac{n}{n-n'}r$$

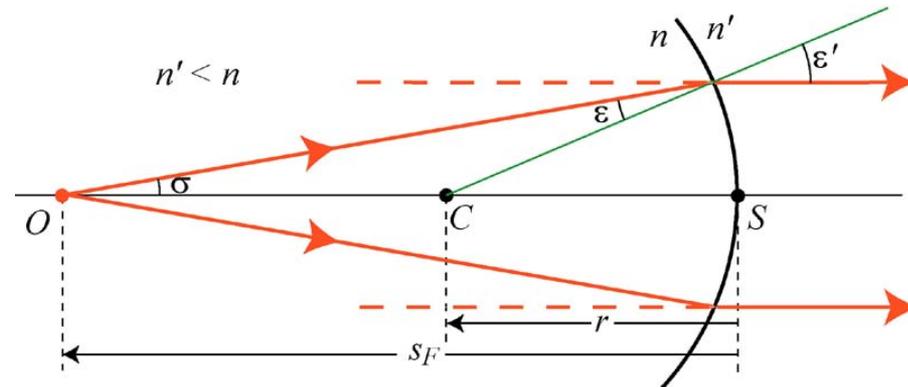


Interfases esféricas

Concepto de aumento

- La posición del punto axial objeto O cuya imagen se encuentra en el infinito se denomina **punto focal objeto** (F), y el plano transversal objeto que lo contiene se denomina **plano focal objeto**.

$$S_F = \frac{n}{n - n'} r$$



- Todos los rayos que cortan en el espacio objeto a F emergen de la superficie paralelos al eje óptico.

$$\forall \sigma, \sigma' = 0 \Rightarrow \gamma' = \frac{\sigma'}{\sigma} = 0$$

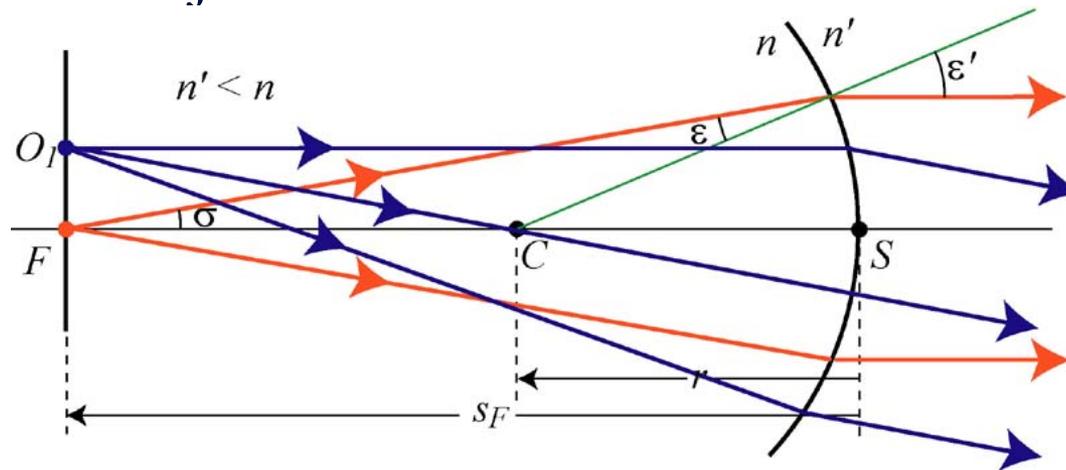
$$\gamma' = \frac{s}{s'} \xrightarrow{s' \rightarrow \infty} 0$$



Interfases esféricas

Concepto de aumento

Estudiemos el caso de un punto objeto extraaxial contenido en el plano focal objeto:



$$\left. \begin{aligned} \beta' \gamma' &= \frac{n}{n'} \xrightarrow{\gamma'=0} \beta' \rightarrow \infty \\ \beta' &= \frac{n}{n'} \frac{s'}{s} \xrightarrow{s' \rightarrow \infty} \beta' \rightarrow \infty \end{aligned} \right\}$$

$$\beta' = \frac{y'}{y}$$

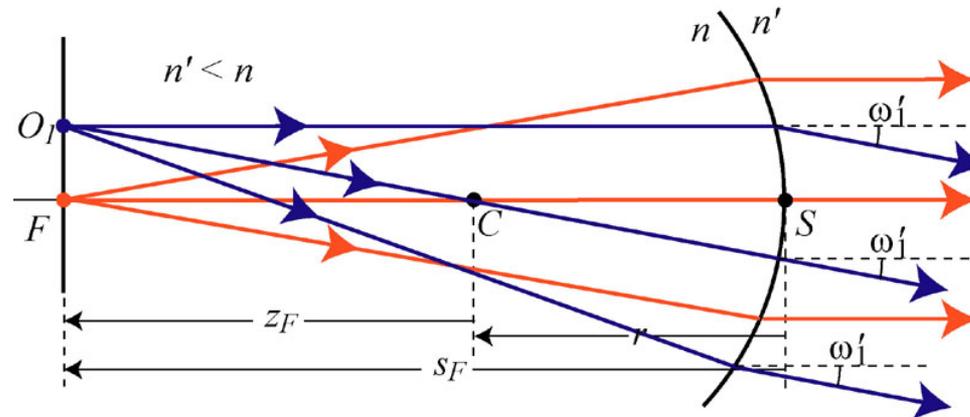
$$y = \overline{FO_1}$$

El tamaño de la imagen $y' \rightarrow \infty$

Interfases esféricas

Concepto de aumento

Habitualmente se caracterizan los tamaños de imágenes (y objetos) en el infinito con **magnitudes angulares**:



$$y = \overline{FO_1} \Rightarrow \omega'_1 = \frac{y}{-z_F}$$

- A la magnitud longitudinal del objeto, y , le corresponde una magnitud angular de la imagen, ω'_1

$$\omega'_1 = \frac{y}{-z_F} = \frac{y}{-(-r + s_F)} = \left(1 - \frac{n}{n'}\right) \frac{y}{r}$$



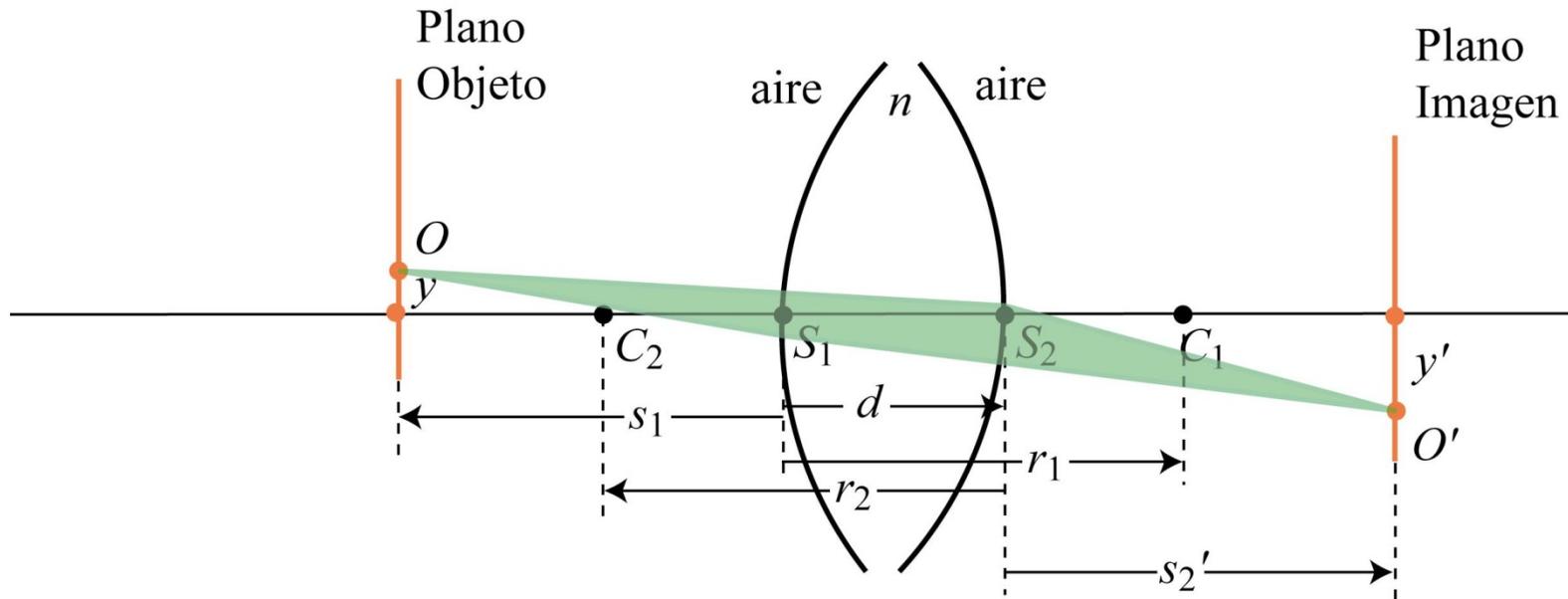
Tema III. Interfases esféricas

- El dioptrio esférico
- Relaciones paraxiales de la superficie esférica
- Concepto de aumento
- **Introducción a las lentes esféricas**
- Espejos esféricos
- Trazado gráfico de rayos



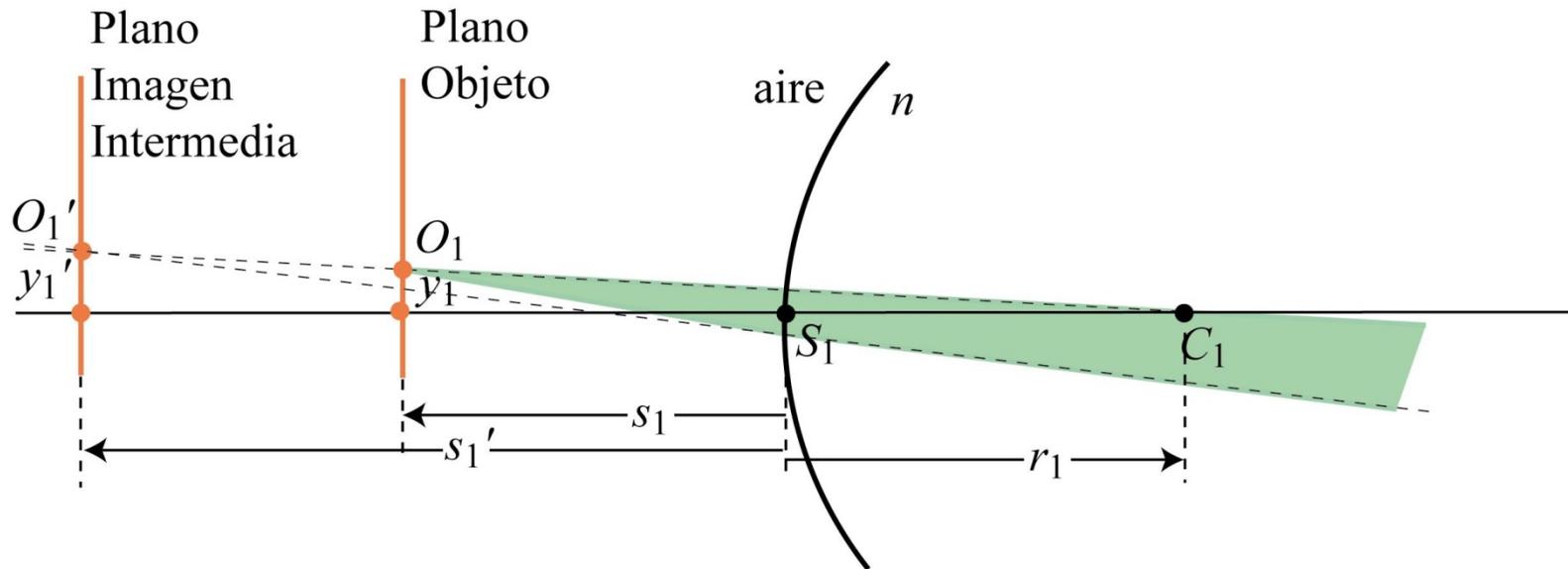
Interfases esféricas

Introducción a las lentes esféricas



Interfases esféricas

Introducción a las lentes esféricas



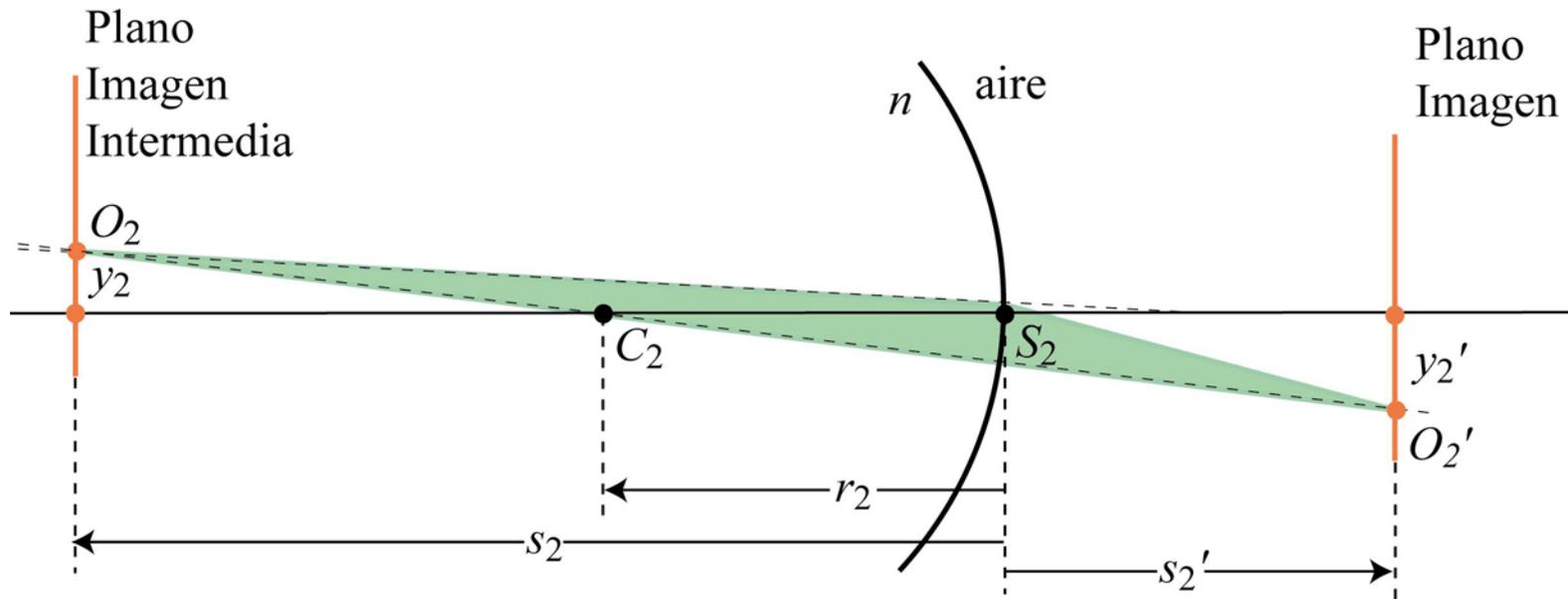
$$\left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{r_1} \right) = n \left(\frac{1}{s_1'} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$\beta_1' = \frac{y_1'}{y_1} = \frac{1}{n} \frac{s_1'}{s_1}$$



Interfases esféricas

Introducción a las lentes esféricas



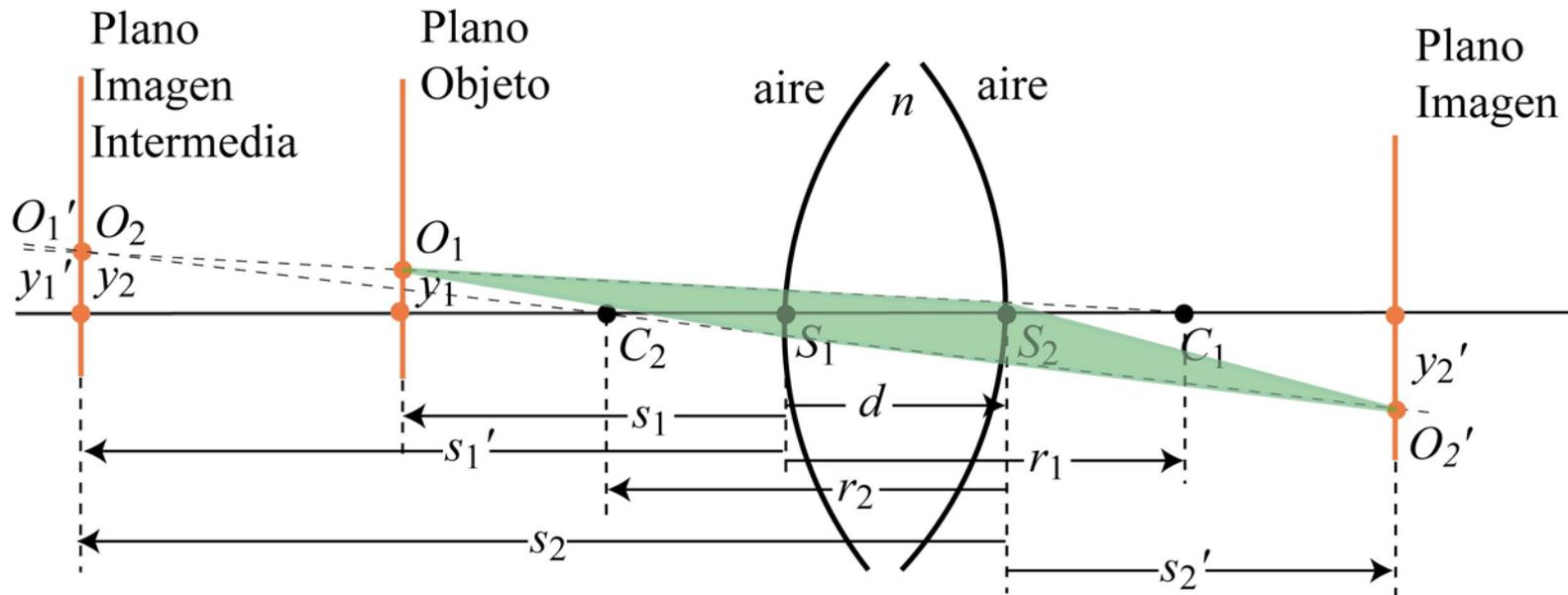
$$n \left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{r_2} \right) = \left(\frac{1}{s_2'} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\beta_2' = \frac{y_2'}{y_2} = \frac{n s_2'}{s_2}$$



Interfases esféricas

Introducción a las lentes esféricas



$$\left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{r_1} \right) = n \left(\frac{1}{s_1'} - \frac{1}{r_1} \right)$$

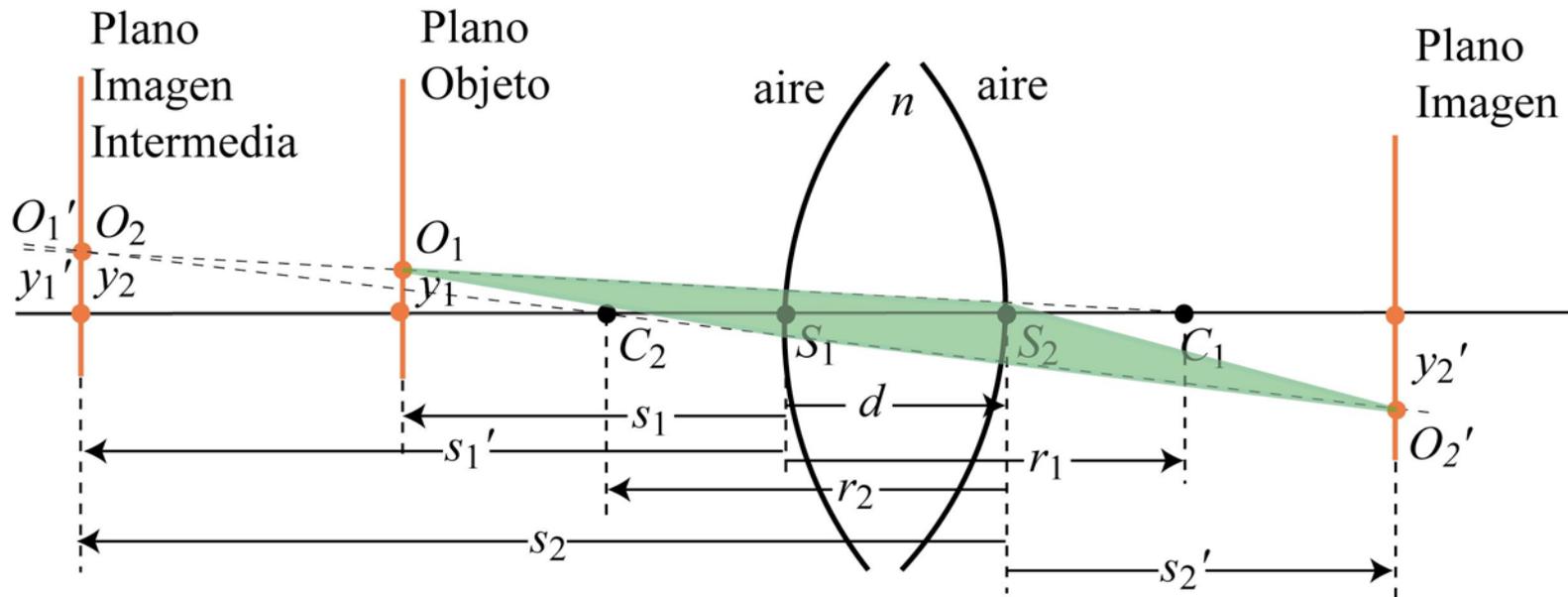
$$n \left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{r_2} \right) = \left(\frac{1}{s_2'} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$s_2 = -d + s_1'$$



Interfases esféricas

Introducción a las lentes esféricas



$$\beta_1' = \frac{y_1'}{y_1} = \frac{1}{n} \frac{s_1'}{s_1}$$

$$\beta_2' = \frac{y_2'}{y_2} = \frac{n}{1} \frac{s_2'}{s_2}$$

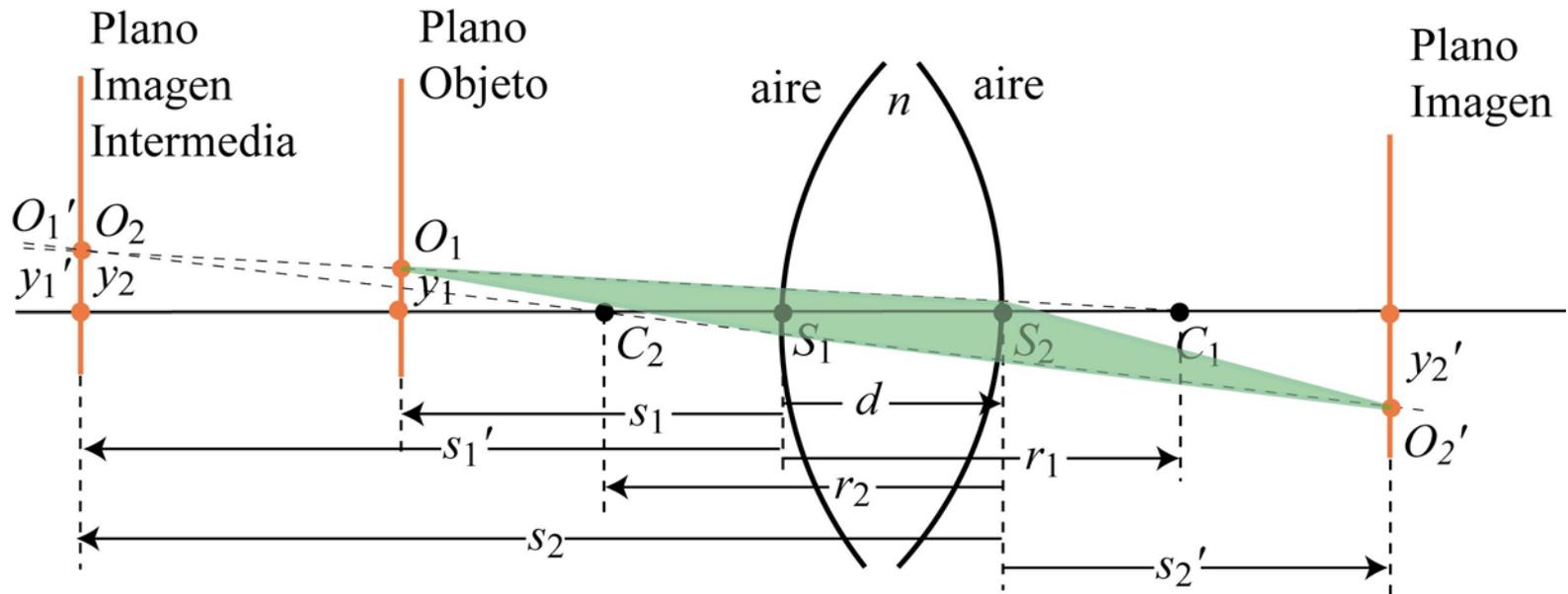
$$\beta' = \frac{y'}{y} = \beta_1' \beta_2'$$



Interfases esféricas

Introducción a las lentes esféricas

Aproximación de lente delgada: $s_2 = -d + s_1' \approx s_1'$



$$\left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{r_1} \right) = n \left(\frac{1}{s_1'} - \frac{1}{r_1} \right)$$

$$n \left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{r_2} \right) = \left(\frac{1}{s_2'} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$-\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

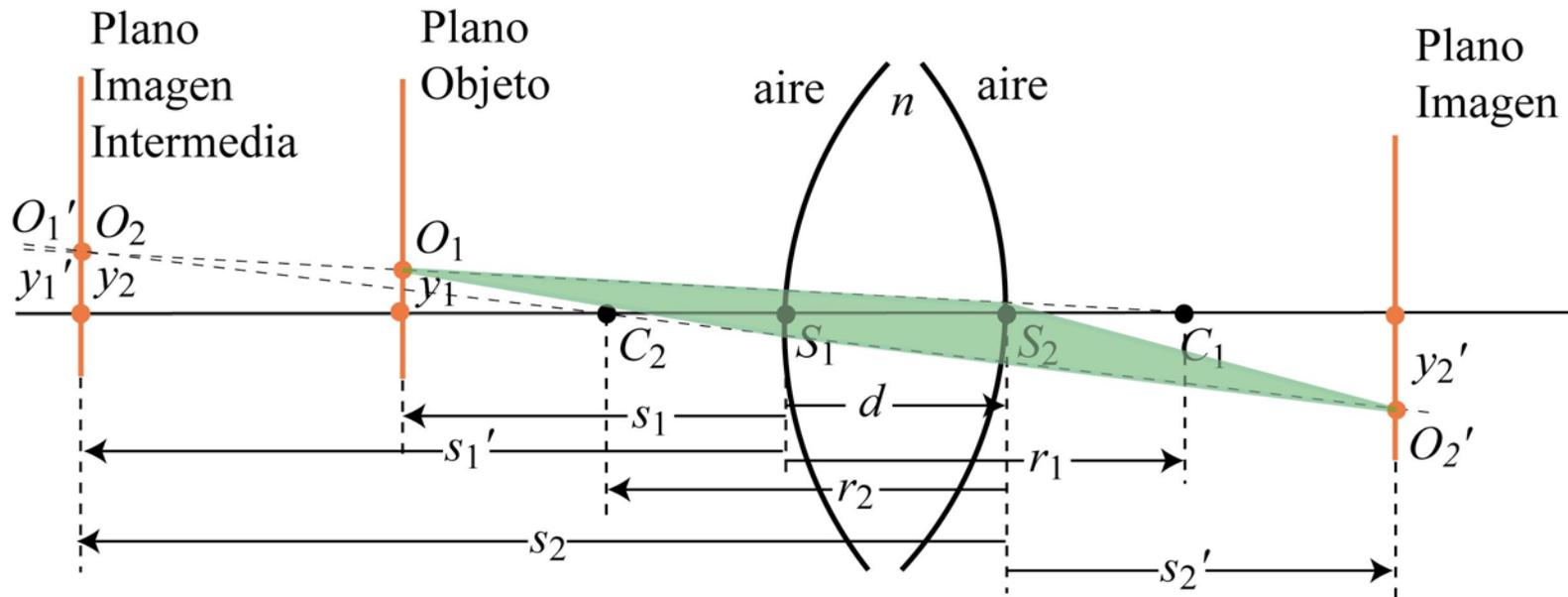
ecuación de Gauss



Interfases esféricas

Introducción a las lentes esféricas

Aproximación de lente delgada: $s_2 = -d + s_1' \approx s_1'$



$$\beta_1' = \frac{y_1'}{y_1} = \frac{1}{n} \frac{s_1'}{s_1}$$

$$\beta_2' = \frac{y_2'}{y_2} = \frac{n}{1} \frac{s_2'}{s_2}$$

$$\beta' = \frac{s_2'}{s_1}$$



Tema III. Interfases esféricas

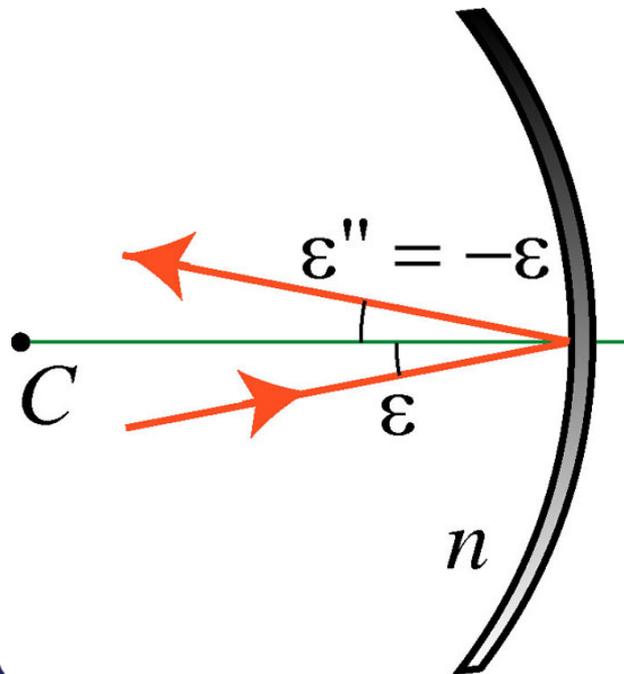
- El dioptrio esférico
- Relaciones paraxiales de la superficie esférica
- Concepto de aumento
- Introducción a las lentes esféricas
- **Espejos esféricos**
- Trazado gráfico de rayos



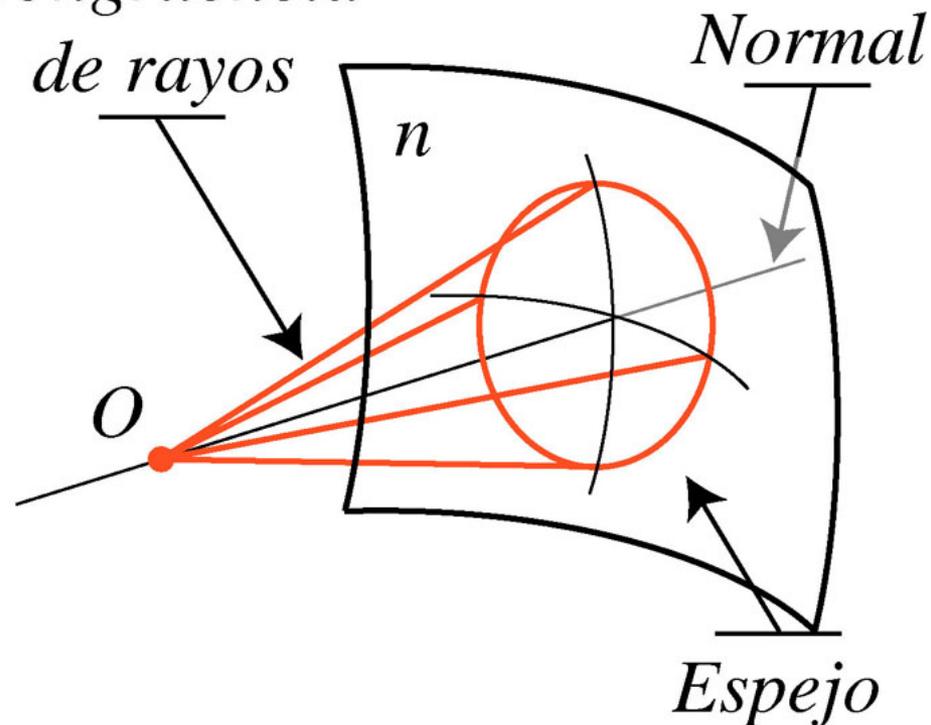
Interfases esféricas

Espejos esféricos

- Un **espejo esférico** es un sistema óptico formado por un medio dieléctrico de índice de refracción n , que está separado de un medio conductor por una interfase esférica con centro de curvatura C .



Congruencia



Interfases esféricas

Espejos esféricos

Criterio de signos:

- Para las distancias en eje y a lo largo de cualquier rayo, se toma como sentido positivo el de la **luz incidente**.

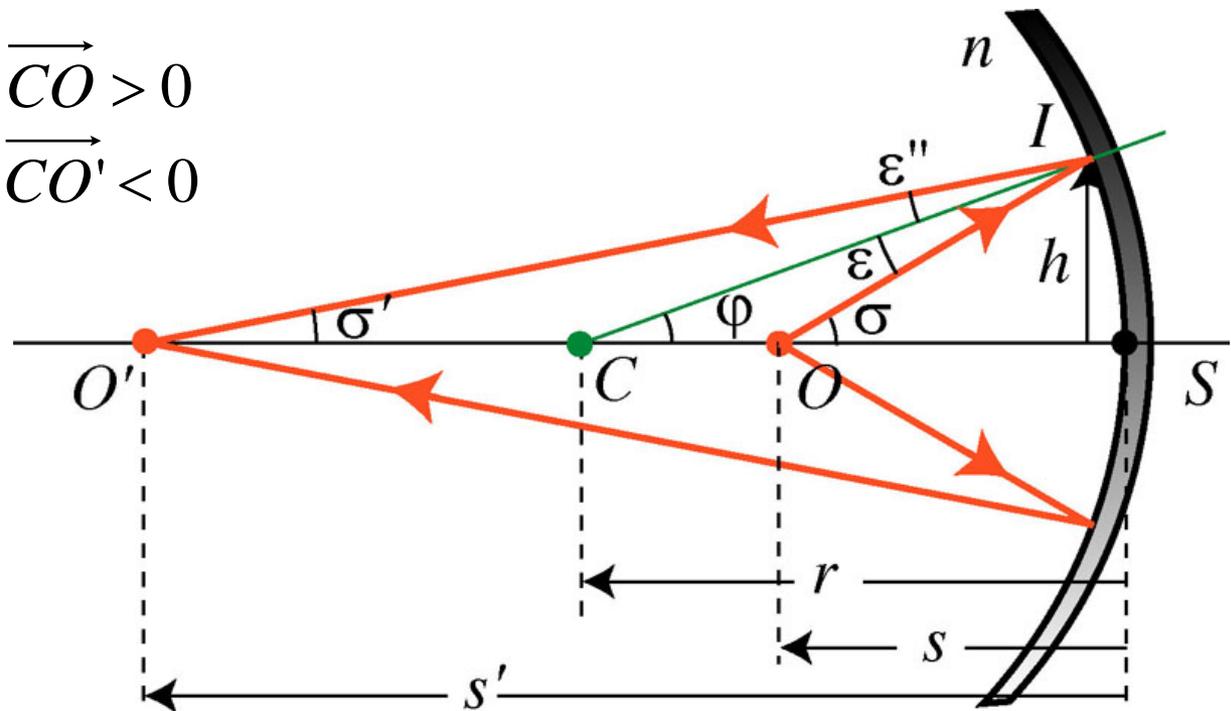
$$l = \overrightarrow{IO} < 0 \quad z = \overrightarrow{CO} > 0$$

$$l' = \overrightarrow{IO'} < 0 \quad z' = \overrightarrow{CO'} < 0$$

$$r = \overrightarrow{SC} < 0$$

$$s = \overrightarrow{SO} < 0$$

$$s' = \overrightarrow{SO'} < 0$$



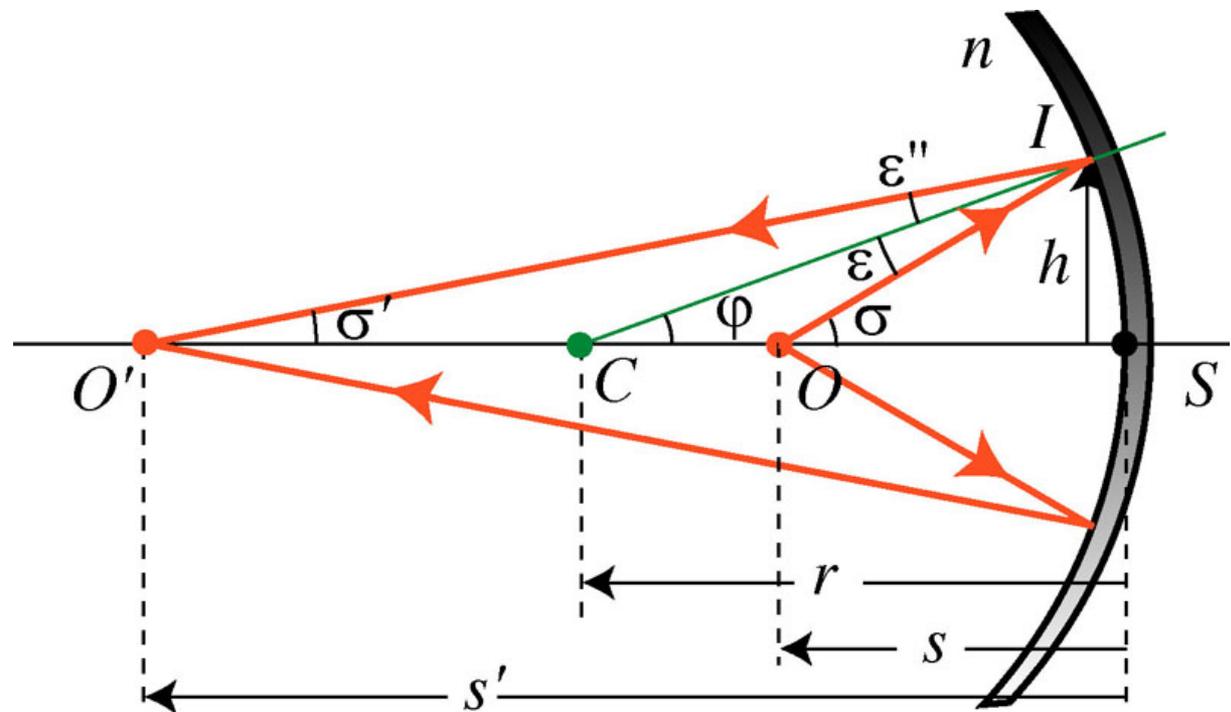
Interfases esféricas

Espejos esféricos

Criterio de signos:

- Los segmentos normales al eje serán positivos hacia arriba y negativos hacia abajo.

$$h > 0$$



Interfases esféricas

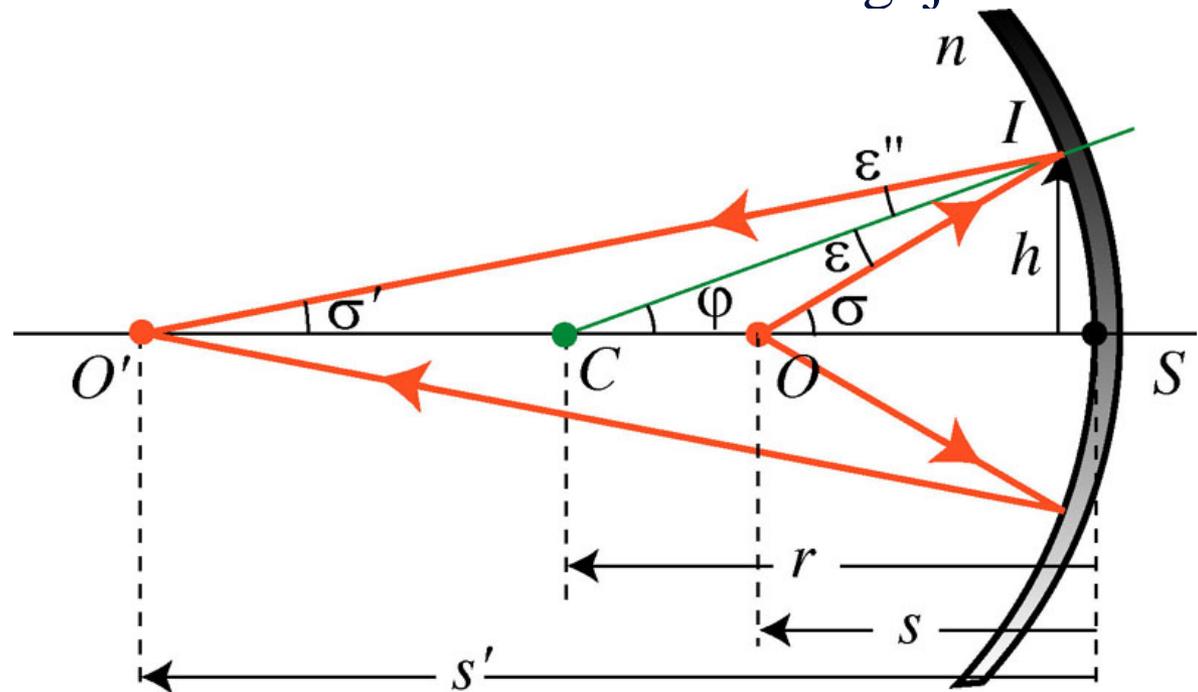
Espejos esféricos

Criterio de signos:

- Los ángulos de incidencia y refracción son positivos si al llevar el rayo, por giro, a coincidir con la normal por el camino angular más corto se va en sentido de las agujas del reloj.

$$\varepsilon > 0$$

$$\varepsilon'' < 0$$



Interfases esféricas

Espejos esféricos

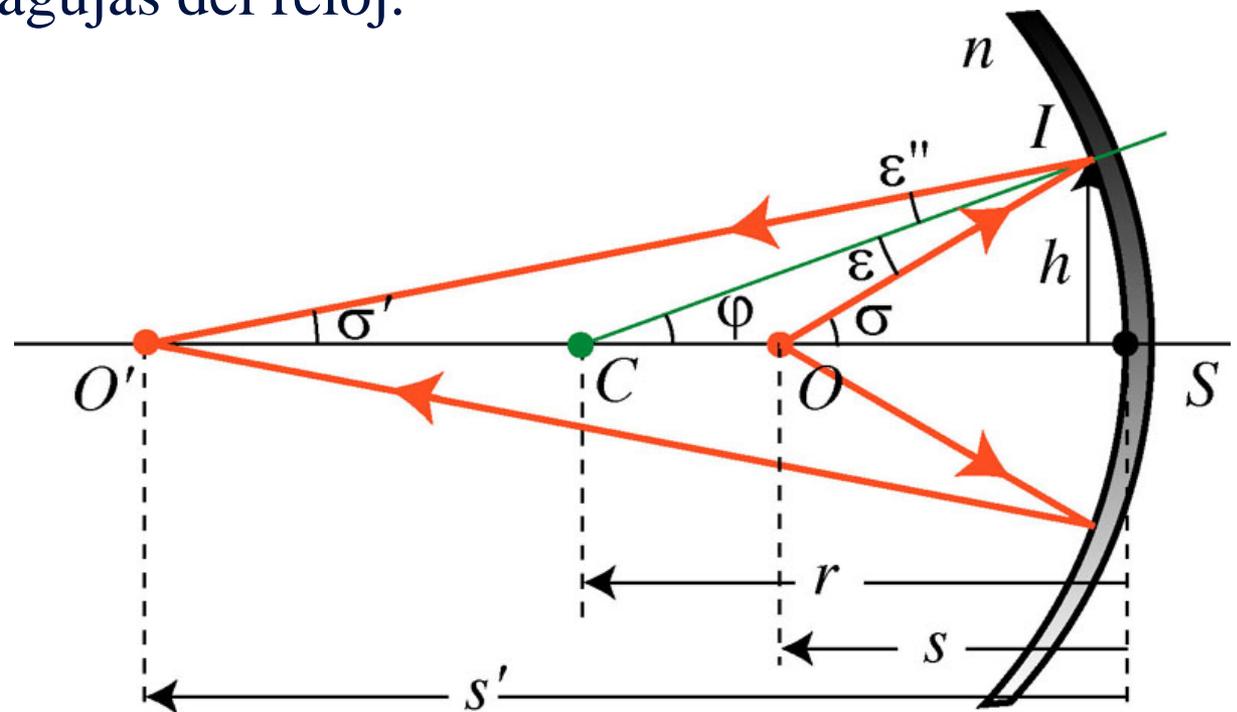
Criterio de signos:

- Los ángulos con el eje son positivos si al llevar la recta que los forma a coincidir por giro con el eje se va en sentido contrario a las agujas del reloj.

$$\varphi < 0$$

$$\sigma < 0$$

$$\sigma' < 0$$



Interfases esféricas

Espejos esféricos

Resumen de las **ecuaciones de conjugación** más importantes para el espejo esférico, obtenidos a partir de la refracción junto con el artefacto matemático $n' \rightarrow -n$ y $\varepsilon' \rightarrow \varepsilon$ ”

$$n \operatorname{sen} \varepsilon = n' \operatorname{sen} \varepsilon' \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = -\varepsilon''$$

$$l \operatorname{sen} \sigma = l' \operatorname{sen} \sigma' \quad \Rightarrow \quad l \operatorname{sen} \sigma = l' \operatorname{sen} \sigma'$$

$$n \frac{z}{l} = n' \frac{z'}{l'} \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{l} + \frac{z'}{l'} = 0$$

$$nz \operatorname{sen} \sigma = n' z' \operatorname{sen} \sigma' \quad \Rightarrow \quad z \operatorname{sen} \sigma + z' \operatorname{sen} \sigma' = 0$$

$$n \left(\frac{1}{l} - \frac{\cos \varepsilon}{r} \right) = n' \left(\frac{1}{l'} - \frac{\cos \varepsilon'}{r} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{2 \cos \varepsilon}{r}$$



Interfases esféricas

Espejos esféricos

Observamos que la posición del punto O' , caracterizada por la distancia l' , depende de:

- La **posición** del punto **objeto** O caracterizada por l .
- El **ángulo de incidencia** ε de los rayos.
- El **radio de curvatura** r del espejo esférico.

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{2 \cos \varepsilon}{r}$$



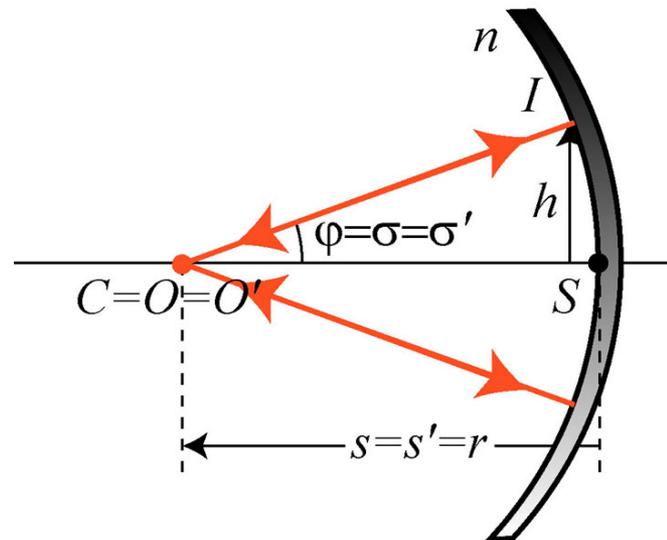
Interfases esféricas

Espejos esféricos

Queremos estudiar el espejo esférico como **superficie estigmática**: Debemos encontrar para qué valores de z (posición del punto O), el valor de z' no depende de ε (posición fija para O')

$$z \sin \sigma + z' \sin \sigma' = 0 \quad \Rightarrow \quad z = z' = 0$$

- Toda esfera es estigmática para su centro.



$$\varepsilon = \varepsilon' = 0$$

$$\varphi = \sigma = \sigma'$$

$$s = s' = r$$

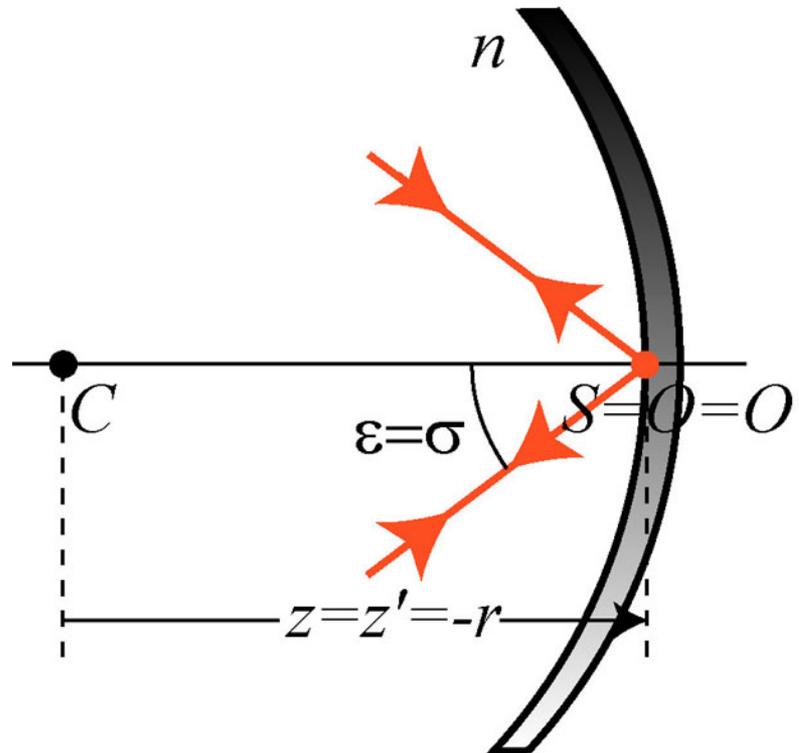


Interfases esféricas

Espejos esféricos

$$l \sin \sigma = l' \sin \sigma' \Rightarrow l = l' = 0$$

- Para los puntos de la superficie esférica, la imagen se confunde con el objeto.



$$\varepsilon = -\varepsilon''$$

$$\varphi = 0$$

$$s = s' = 0$$

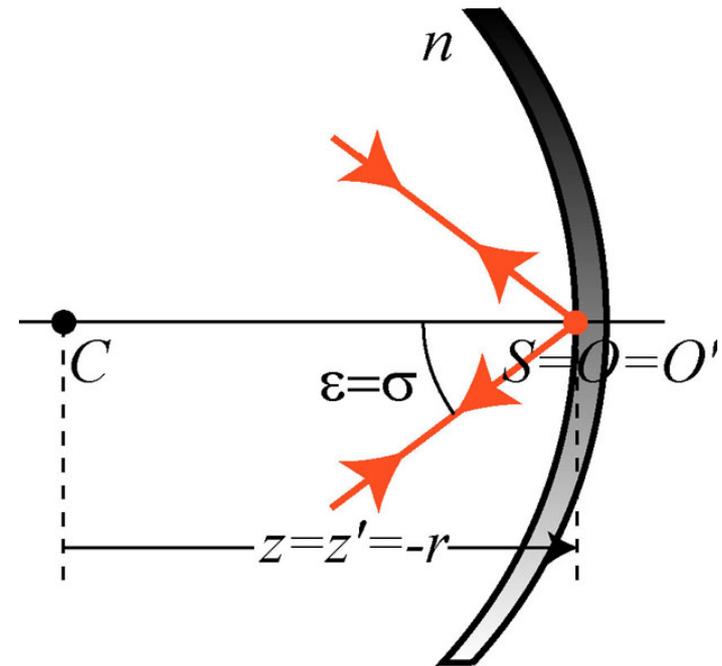


Interfases esféricas

Espejos esféricos

- ¿Qué ocurre con los **puntos de Young** o **puntos de Weierstrass**?
- Los puntos de la superficie espejada forman los puntos de Young. ¿Existe redundancia en la relación de soluciones!

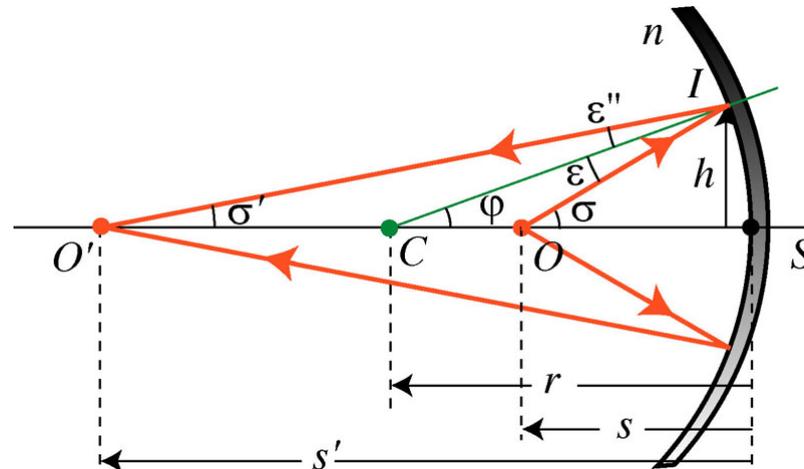
$$\left. \begin{array}{l} z = \frac{n'}{n} r \\ z' = \frac{n}{n'} r \end{array} \right\} \xrightarrow{n' = -n} \left\{ \begin{array}{l} z = -r \\ z' = -r \end{array} \right.$$



Interfases esféricas

Espejos esféricos

- Para una posición fija del punto objeto O (s fijo), se obtiene una **posición distinta del punto O'** .
- Sin embargo, para **ángulos** de incidencia y emergencia **pequeños** ($\varepsilon, \varepsilon'' < 5^\circ$), la posición de O' es prácticamente invariable.



- En este caso, se debe cumplir que φ , σ y σ' son pequeños. Este hecho implica que $l \cong s$ y $l' \cong s'$.



Interfases esféricas

Espejos esféricos

Resumen de los invariante óptico-geométricos más importantes en la aproximación paraxial:

$$\varepsilon = -\varepsilon'' \Rightarrow \varepsilon = -\varepsilon''$$

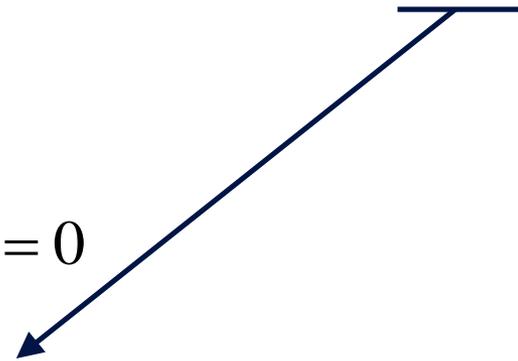
$$l \operatorname{sen} \sigma = l' \operatorname{sen} \sigma' \Rightarrow s\sigma = s'\sigma'$$

$$\frac{z}{l} + \frac{z'}{l'} = 0 \Rightarrow \frac{z}{s} + \frac{z'}{s'} = 0$$

$$z \operatorname{sen} \sigma + z' \operatorname{sen} \sigma' = 0 \Rightarrow z\sigma + z'\sigma' = 0$$

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{2 \cos \varepsilon}{r} \Rightarrow \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r}$$

Ecuación de conjugación



Interfases esféricas

Espejos esféricos

Ecuación de conjugación:

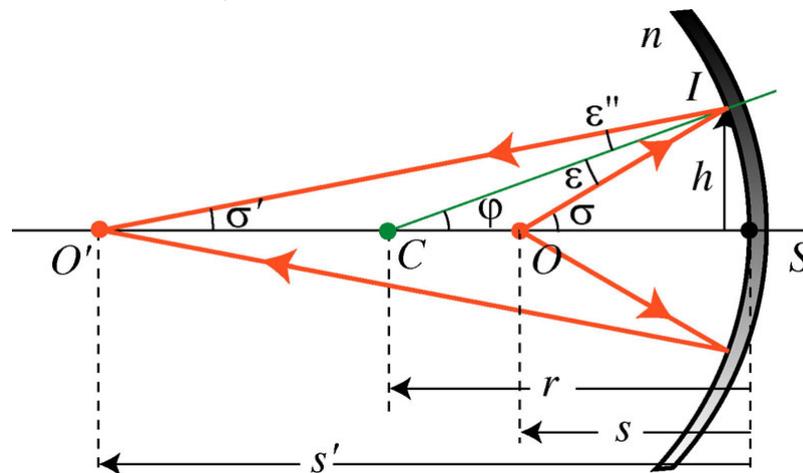
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r}$$

Caso particular: espejo plano

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow s' = -s$$

Si nos interesa trabajar con las variables axiales z y z' :

$$\left. \begin{array}{l} s = r + z \\ s' = r + z' \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{z} + \frac{1}{z'} = -\frac{2}{r}$$



Interfases esféricas

Espejos esféricos

- Ahora s' no depende de ε .
- Existe una condición de **estigmatismo aproximado** si consideramos rayos con ángulos de incidencia ε y emergencia ε'' pequeños (**rayos paraxiales**).
- En la práctica se consigue con la inserción de **diafragmas** que elimina los rayos que no cumplen la condición de estigmatismo aproximado.

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r}$$

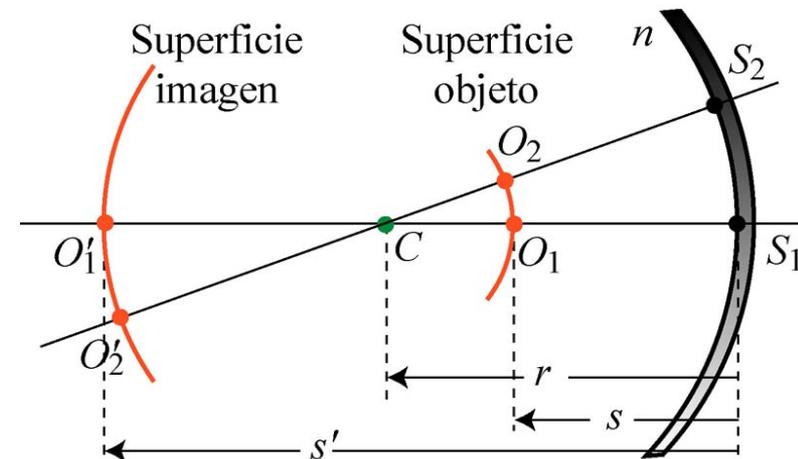
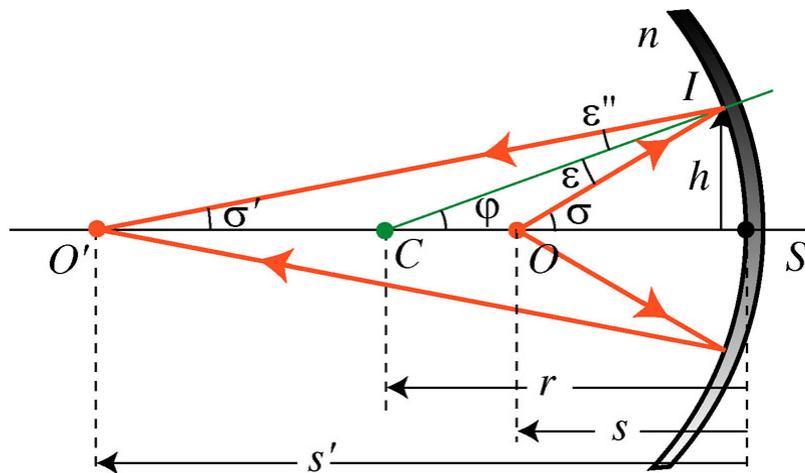


Interfases esféricas

Espejos esféricos

Imagen de un objeto plano perpendicular al eje óptico:

- El **eje de un sistema óptico** queda determinado por la trayectoria de un rayo que no se desvía al atravesarlo.
- Si el objeto extenso es plano y perpendicular al eje óptico, la **imagen no es plana**.

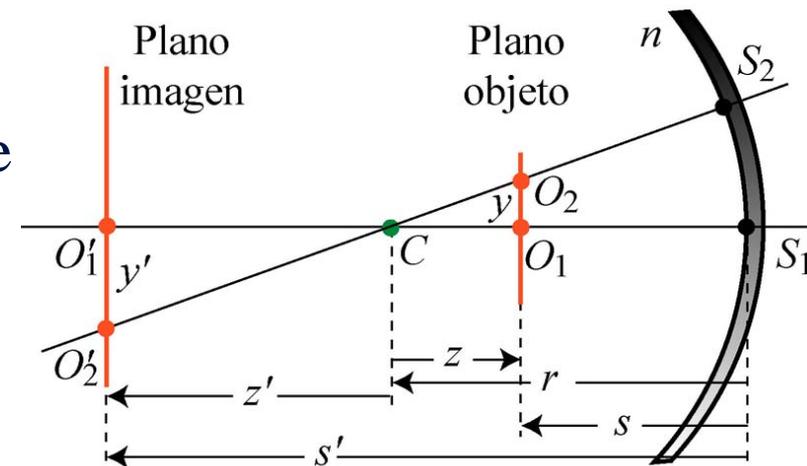


Interfases esféricas

Espejos esféricos

Para que la condición de estigmatismo aproximado sea válida, se ha de cumplir la **aproximación de Gauss**:

- Espejo con superficie activa pequeña.
 - Superficie de extensión pequeña
 - Uso de **diafragmas (de abertura)**: pupila ocular
- Objeto plano perpendicular al eje óptico y centrado, de pequeña dimensión activa.
 - Objeto de extensión pequeña
 - Uso de **diafragmas (de campo)**: retina ocular



Interfases esféricas

Espejos esféricos

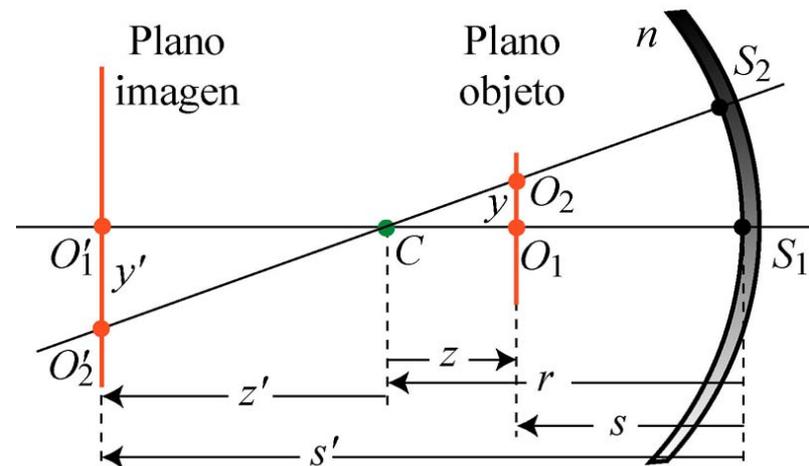
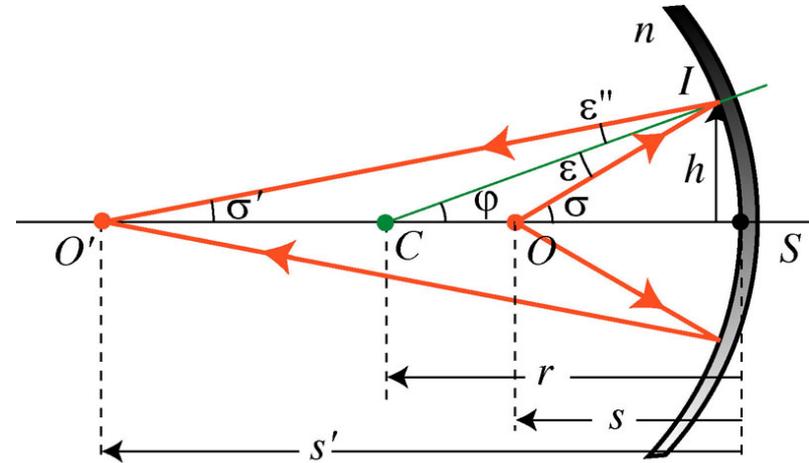
Hasta ahora hemos obtenido las siguientes **ecuaciones de conjugación**:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r}$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z'} = -\frac{2}{r}$$

$$\left. \begin{aligned} y &= \overline{O_1 O_2} \\ y' &= \overline{O'_1 O'_2} \end{aligned} \right\}$$

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} \neq 1$$

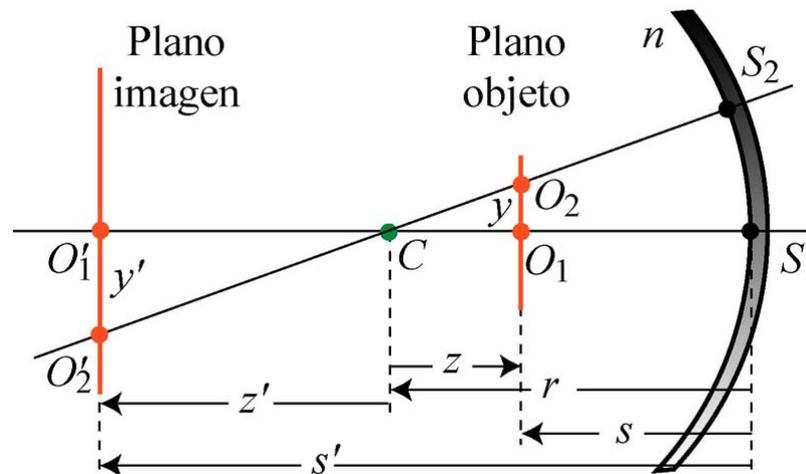


Interfases esféricas

Espejos esféricos

Aumento lateral en espejos esféricos:

$$\left. \begin{aligned} \beta' &= \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} \\ \beta' &= \frac{n}{n'} \frac{s'}{s} \Rightarrow \beta' = -\frac{s'}{s} \end{aligned} \right\}$$



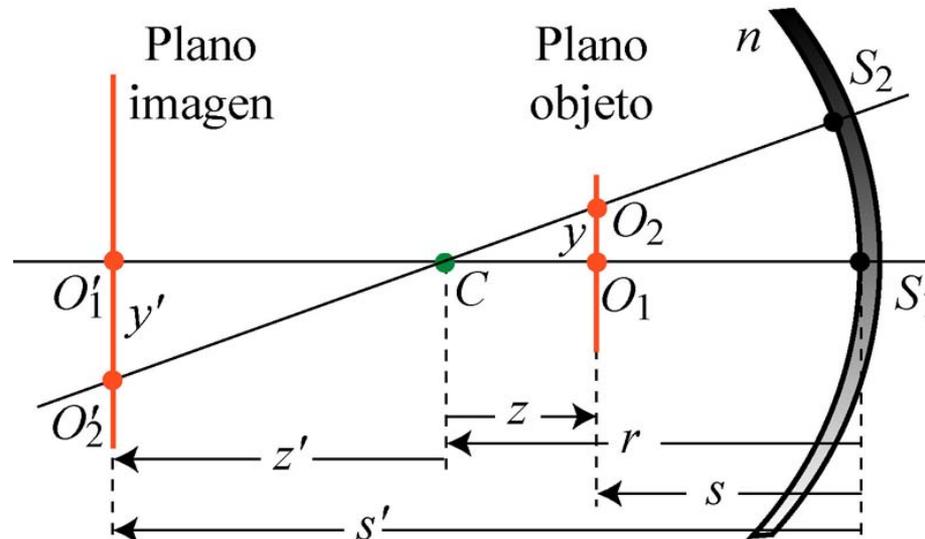
Interfases esféricas

Espejos esféricos

Resumen de las principales **ecuaciones de conjugación**:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \qquad \beta' = -\frac{s'}{s}$$

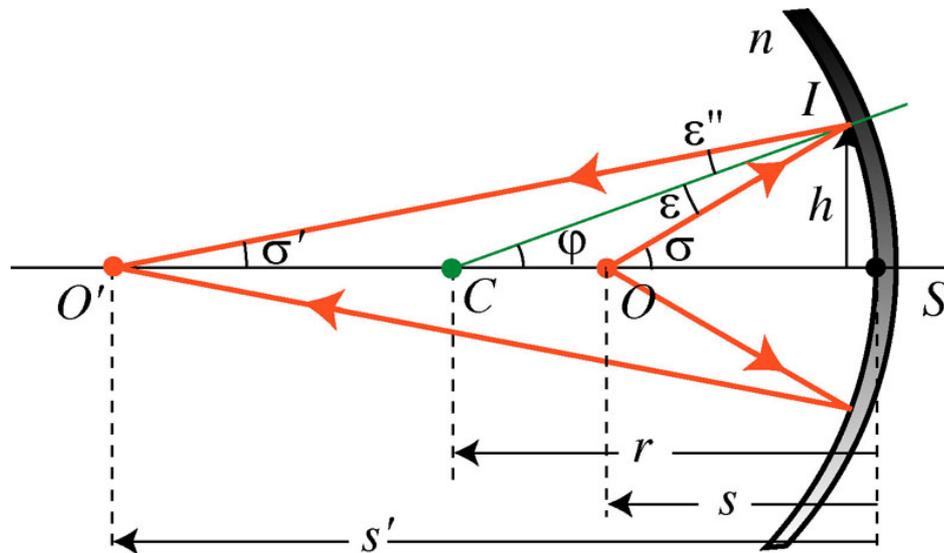
$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z'} = -\frac{2}{r} \qquad \beta' = \frac{z'}{z}$$



Interfases esféricas

Espejos esféricos

- Consideremos ahora el **aumento angular**.



$$\gamma' = \frac{\sigma'}{\sigma}$$

$$\beta' \gamma' = \frac{n}{n'} \Rightarrow \beta' \gamma' = -1$$

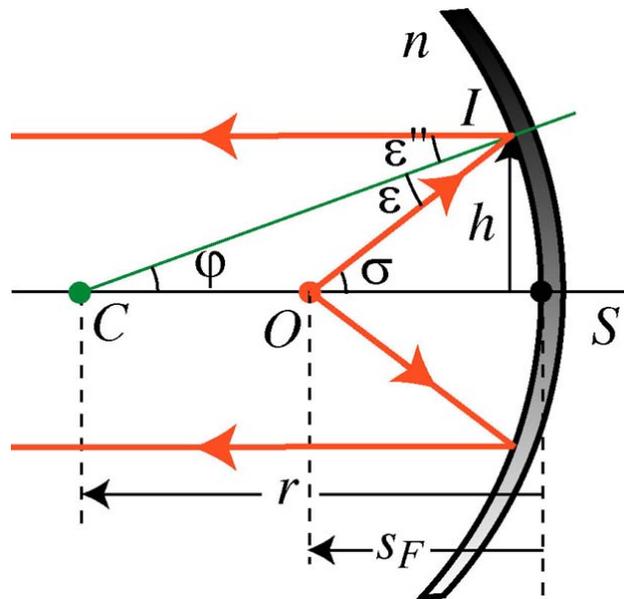
$$\gamma' = -\frac{z}{z'} = \frac{s}{s'}$$



Interfases esféricas

Espejos esféricos

Imagen en el infinito: Podemos encontrar la posición de un plano objeto, caracterizado por s_F , para el cual la distancia s' es infinito, es decir, la imagen se encuentra a una distancia infinita del dioptrio.



$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r}$$

$$s_F = \frac{n}{n - n'} r \xrightarrow{n' = -n} s_F = \frac{r}{2}$$

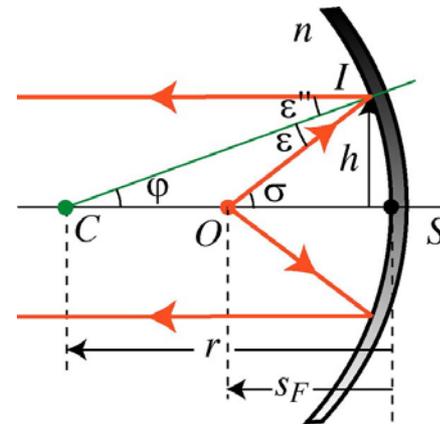


Interfases esféricas

Espejos esféricos

- La posición del punto axial objeto O cuya imagen se encuentra en el infinito se denomina **punto focal objeto** (F), y el plano transversal objeto que lo contiene se denomina **plano focal objeto**.

$$s_F = \frac{r}{2}$$



- Todos los rayos que cortan en el espacio objeto a F emergen de la superficie paralelos al eje óptico.

$$\forall \sigma, \sigma' = 0 \Rightarrow \gamma' = \frac{\sigma'}{\sigma} = 0$$

$$\gamma' = \frac{s}{s'} \xrightarrow{s' \rightarrow \infty} 0$$



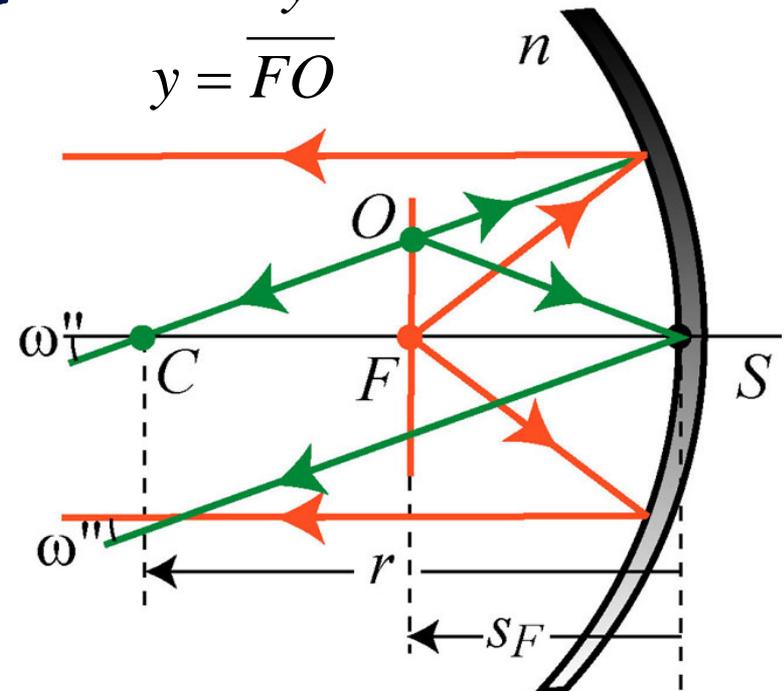
Interfases esféricas

Espejos esféricos

Estudiemos el caso de un punto objeto extraaxial contenido en el plano focal objeto:

$$\left. \begin{aligned} \beta' \gamma' = -1 \xrightarrow{\gamma' = 0} \beta' \rightarrow \infty \\ \beta' = -\frac{s'}{s} \xrightarrow{s' \rightarrow \infty} \infty \end{aligned} \right\}$$

$$\beta' = \frac{y'}{y}$$
$$y = \overline{FO}$$



- El tamaño de la imagen

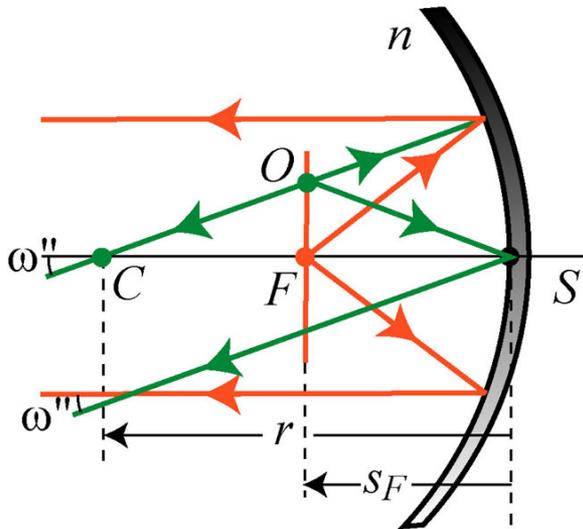
$$y' \rightarrow \infty$$



Interfases esféricas

Espejos esféricos

Habitualmente se caracterizan los tamaños de imágenes (y objetos) en el infinito con **magnitudes angulares**:



$$y = \overline{FO} \Rightarrow \omega'' = \frac{y}{-z_F}$$

- A la magnitud longitudinal del objeto, y , le corresponde una magnitud angular de la imagen, ε''

$$\omega'' = \frac{y}{-z_F} = \frac{y}{-(-r + s_F)} = 2 \frac{y}{r}$$



Tema III. Interfases esféricas

- El dioptrio esférico
- Relaciones paraxiales de la superficie esférica
- Concepto de aumento
- Introducción a las lentes esféricas
- Espejos esféricos
- **Trazado gráfico de rayos**

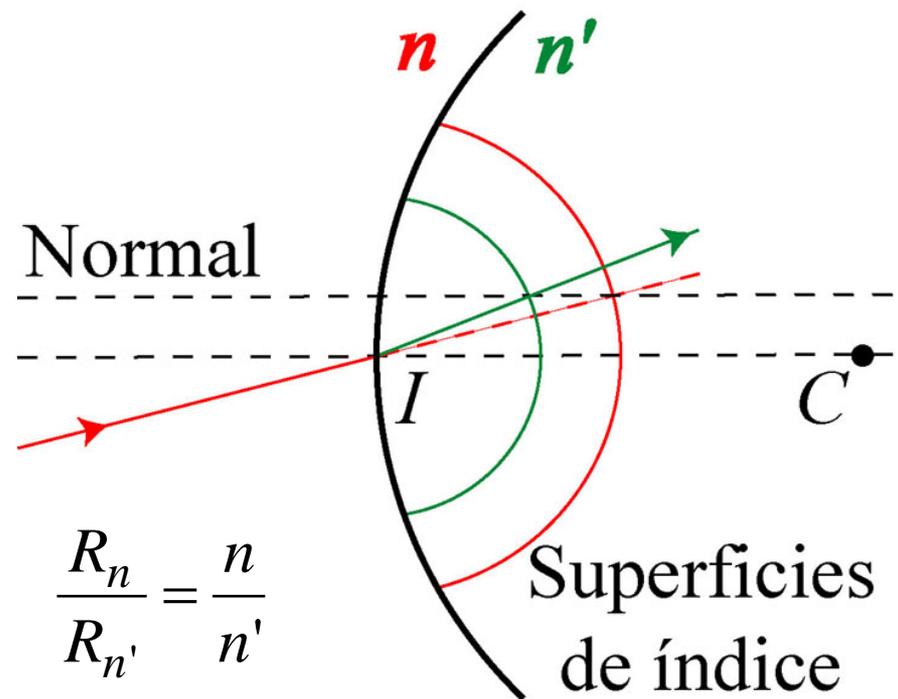


Interfases esféricas

Trazado de rayos

Método de las superficies de índice para la construcción gráfica de un rayo **refractado**:

- Las **superficies de índice** son dos superficies esféricas cuyos centros de curvatura coinciden ambas con el punto de incidencia del rayo considerado con la interfase, I , y cuyos radios de curvatura son proporcionales a los índices de refracción n y n' de ambos medios.

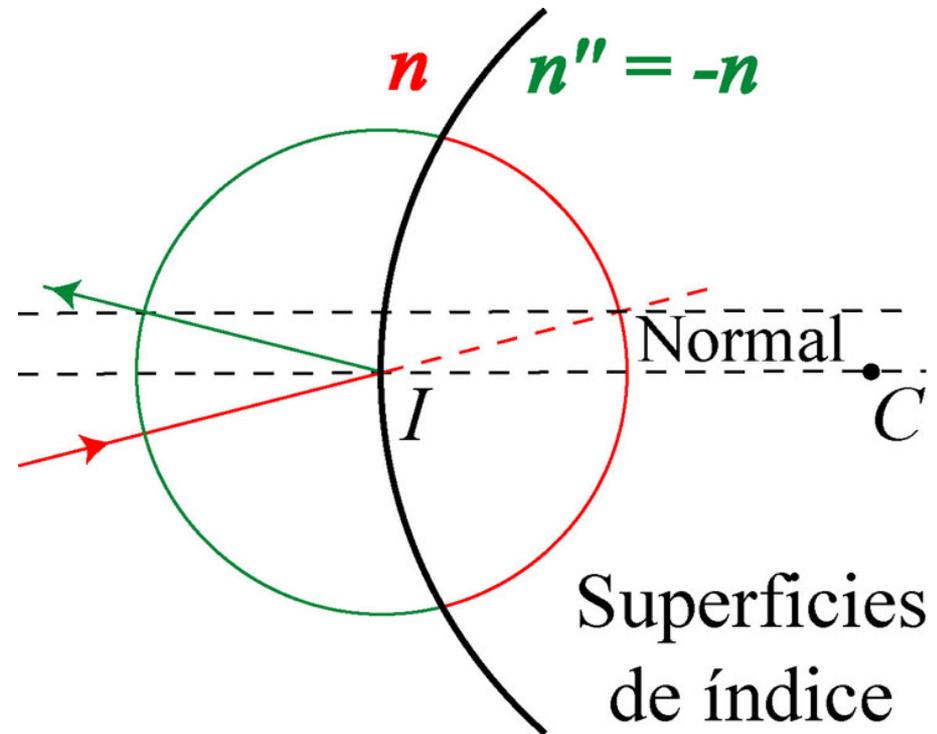


Interfases esféricas

Trazado de rayos

Método de las superficies de índice para la construcción gráfica de un rayo **reflejado**:

- En este caso las dos **superficies de índice** tienen el mismo centro y radio de curvatura. Para la onda reflejada debe considerarse la parte de la superficie de índice asignada a ondas que viajan en sentido opuesto a la incidente.



Interfases esféricas

Trazado de rayos

Método de las superficies aplanáticas para la construcción gráfica de un rayo **refractado**: Utilizamos el hecho de que O_2 y O'_2 son puntos de Young, es decir, todo rayo emergente de O_2 ha de pasar real o virtualmente por O'_2 .

