6. ESTUDIAR EL COMPORTAMIENTO DE SISTEMAS CAÓTICOS:

Objetivos:

1. Entender cómo procesos deterministas pueden ser impredecibles.
2. Estudiar sistemas caóticos generados por procesos deterministas.

Actividad 40. En un proceso determinista iterativo, $x_{t+1}=f(x_t)$ dentro de un determinado conjunto de valores V, las condiciones iniciales x_0 determinan unívocamente su evolución, $x_t=f^t(x_0)$. No obstante, en el estudio de procesos reales, frecuentemente no podemos conocer con total exactitud las condiciones iniciales. Ahora bien, en muchos procesos, una pequeña variación de las condiciones iniciales supone una variación también pequeña de los resultados finales

(con una medida definida sobre V,
para todo $\delta>0$ existe $\varepsilon>0$ tal que si $|x_0-z_0|<\varepsilon$, entonces para todo número natural t, $|f^t(x_0)-f^t(z_0)|<\delta$),

de manera que si queremos predecir los resultados finales con una precisión dada, simplemente deberemos fijar las condiciones iniciales con una cierta precisión. Ahora bien, pueden existir también determinadas condiciones iniciales x_0 en las que ello no se cumple, es decir en las que una pequeña variación de tales condiciones iniciales puede suponer una gran variación de los resultados finales. En tal caso, diremos que hay *sensibilidad a las condiciones iniciales*, y los resultados finales serán impredecibles ante pequeñas variaciones de las mismas a partir de x_0

(existe $\delta>0$ tal que para todo $\varepsilon>0$ existen un número natural t y $z_0 \in V$ tales que $|x_0-z_0|<\varepsilon$ y $|f^t(x_0)-f^t(z_0)|>\delta$).

Ejercicio 41: dado el proceso $x_t=(x_0)^{t+1}$, estudiar su sensibilidad a las condiciones iniciales.

Actividad 41. Diremos que un sistema determinista es *caótico* si presenta sensibilidad generalizada a las condiciones iniciales y además presenta *mezcla*, de modo que desde cualquier condición inicial se llega tan cerca como se quiera de cualquier punto del conjunto de sus valores

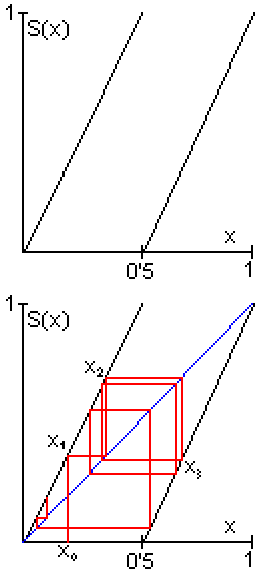
(para todo $\delta>0$, $\varepsilon>0$, $x,z \in V$, existen $x_0 \in V$ y un número natural t tal que $|x_0-x|<\varepsilon$ y $|f^t(x_0)-z|<\delta$).

Puede demostrarse que hay sensibilidad generalizada a las condiciones iniciales si el sistema presenta mezcla y además el conjunto de puntos periódicos es denso en el conjunto de sus valores

(para todo $\varepsilon>0$, $z \in V$, existen $x_0 \in V$ y un par de números naturales t'>t tales que $|z-x_0|<\varepsilon$ y $f^{t'}(x_0)=f^t(x_0)$)

o bien la función de iteración f(x) es continua.

Ejercicio 42: definimos el operador Shift mediante S(x)=2x si 0≤x<0'5, S(x)=2x-1 si 0'5≤x<1, según se muestra en la figura adjunta. En la figura inferior se indica la generación gráfica de los sucesivos valores de x_t. Si representamos x en sistema binario (con 0s y 1s), para obtener S(x) deberemos simplemente desplazar los bits (0s y 1s) un lugar a la izquierda y descartar la parte entera si aparece. ¿Que valores de x generarían una sucesión periódica? Comprobar que el operador Shift cumple las propiedades de:



a) Sensibilidad a las condiciones iniciales (para δ=0'01 en sistema binario).

b) Densidad de puntos periódicos.

c) Mezcla.

A tal efecto dividiremos la clase en dos grupos,

uno de los cuáles impondrá los valores de partida,	y el otro comprobará que se cumple cada propiedad para algún:
a) ε, x_0.	z_0, t
b) ε, z	x_0, t, t'
c) δ, ε, x, z	x_0, t

(los grupos pueden turnarse para distintas propiedades; todas las cantidades deben darse en sistema binario).