1. COMPRENDER LOS CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE LA TEORÍA GENERAL DE SISTEMAS:

Objetivos:

1. Estudiar las analogías estructurales entre objetos y procesos de diferente naturaleza, introduciendo así el concepto de **Sistema General**.
2. Estudiar distintas formas de **relaciones** entre distintos objetos o variables.
3. Buscar una definición general de **Sistema** que permita tomar en consideración los distintos tipos de relaciones.
4. Introducir la evolución en el tiempo, y con ello el concepto de **Sistema Dinámico** y **Sistema Secuencial**.
5. Introducir la noción de Sistemas no deterministas (**Estocásticos** o **Borrosos**).
6. Entender la diferencia entre un **bucle** en una relación de dependencia y una **retroacción** en la evolución temporal de una variable.
7. Estudiar el **acoplamiento** y **descomposición** de Sistemas.

Metodología: realización de actividades en grupos pequeños, exponiendo en su caso las conclusiones al conjunto de la clase.

Actividad 1: Agrupar de 2 en 2 los siguientes Sistemas, estableciendo correspondencias entre sus componentes de manera que sus relaciones coincidan:

1. Según la Ley de Ohm, la intensidad de la corriente eléctrica a lo largo de un conductor es igual a la diferencia de potencial entre sus extremos dividido por su resistencia.
2. Las estaciones del año son Primavera, Verano, Otoño e Invierno, y vuelta a empezar.
3. Si cada año un alumno duplica sus conocimientos, diremos que es un buen estudiante.
4. Según la Ley de Lenz, si movemos un conductor en un campo magnético se genera una corriente eléctrica cuyos efectos tienden a contrarrestar el campo magnético.
5. Los beneficios obtenidos por una empresa pueden utilizarse para incrementar la producción o para renovar la tecnología.
6. Si separamos a la población en grupos con el mismo nivel de renta, encontramos que en aquéllos que tienen doble, triple, etc. renta el porcentaje de votos a un determinado partido es la mitad, la tercera parte, etc., respectivamente.
7. El funcionamiento del corazón pasa por las fases de sístole auricular, sístole ventricular, diástole ventricular, diástole general y de nuevo sístole auricular.
8. Conectamos 4 conductores de manera que por dos de ellos pase la misma intensidad de corriente eléctrica, y los otros dos estén sometidos a la misma diferencia de potencial; todos los conductores se mantienen a la misma temperatura.
9. Para saber cuántas unidades podemos comprar de un producto necesitamos conocer el dinero de que disponemos y el precio de cada unidad.

10. Según la Ley de Le Chatelier, si durante una reacción química reversible modificamos sus condiciones, el equilibrio se desplazará para compensar, en sentido contrario, dicha modificación.
11. El tamaño de una población se va alterando en función de los nacimientos y defunciones que se produzcan.
12. Los fondos que se destinen a "cañones" y a "mantequilla" tienen el límite del presupuesto disponible.
13. La proporción de enfermos que responden favorablemente a un tratamiento es inversamente proporcional a su edad.
14. De acuerdo con un convenio entre ellos, en los países A, B, C y D el litro de leche tiene el mismo precio; pero en cambio sólo A y B comparten el precio del pan, y sólo C y D comparten el precio del arroz.
15. El stock en un almacén aumenta por la entrada de productos y disminuye por las ventas.
16. El planeta está condenado si la humanidad multiplica por 2 cada década su consumo de energía.

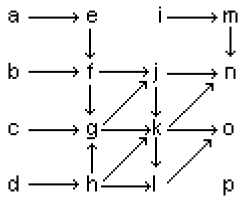
Actividad 2: En cada par de Sistemas agrupados en la actividad anterior, representar por símbolos comunes los componentes correspondientes, y simbolizar asimismo sus relaciones.

Actividad 3: llamamos *relaciones estructurales* a las que se dan entre los elementos de un Sistema considerados como objetos singulares, indicando su conexión o dependencia; llamamos *relaciones de comportamiento* a las que se dan entre los conjuntos de valores de los distintos elementos de un Sistema considerados como variables, indicando la compatibilidad entre dichos valores.
Analizar qué relaciones son estructurales y cuáles son de comportamiento en las actividades anteriores.

Actividad 4: estudiar cómo dar una definición formal de Sistema de modo que puedan tomarse en consideración relaciones tanto estructurales como de comportamiento. Pueden tenerse en cuenta a tal efecto las definiciones siguientes, en las que $\leq$ indica una relación de inclusión, X indica un producto cartesiano, U indica una unión de conjuntos, P indica el conjunto de los subconjuntos de un conjunto y Ø es el conjunto vacío.
$S \leq X_{i\in I} V_i$ (Mesarovic&Takahara 1975)
$S=(E,R)$ tal que $\emptyset \in R \leq P(\bigcup_{n\in N}(E^n))$ (Yang 1989)
$S=(E,R)$ tal que $\emptyset \in R \leq T_m$ tal que $T_{m+1}=P(\bigcup_{n\in N}(T_m)^n)$, $T_0=E$ (Caselles 1993)
$S=(I, \{V_i\}_{i\in I}, R)$ tal que $R \leq P(\bigcup_{n=1...m} I^n) \cup P(X_{i\in I} V_i)$ (Pla 2007)

Actividad 5. Llamaremos *Sistema de conexiones* a un Sistema con una relación estructural binaria, $R \leq E X E$, de modo que $(a,b) \in R$ si y sólo si **a** depende directamente de **b**, $b \rightarrow a$. Diremos de un Sistema de conexiones que es *jerárquico* si en él no pueden encontrarse bucles, de manera que un elemento no pueda depender directa ni indirectamente de sí mismo. En tal caso, si el número de elementos es finito, habrá necesariamente un subconjunto de elementos que no dependan de ningún otro, a los cuáles llamaremos elementos de nivel 1 o de *entrada*. Asimismo, diremos que un elemento es de nivel n>1 si y sólo si depende de algún elemento de nivel n-1 y en todo

caso de elementos de nivel inferior. Llamaremos elementos de *salida* a aquéllos de los que no depende ningún otro.
Para establecer una clasificación en niveles comenzaremos extrayendo sus elementos de entrada (nivel 1). A continuación prescindiremos de ellos y buscaremos cuáles serían de entrada entre los restantes (nivel 2), y así sucesivamente. El Sistema será *jerárquico* si y sólo si a través de este proceso podemos llegar a clasificar en niveles todos sus elementos. El Sistema será *conexo* si no tiene elementos aislados, es decir si todos sus elementos tienen una relación de dependencia con algún otro.
Ejercicio 1: estudiar si es jerárquico el siguiente Sistema de conexiones, clasificando en niveles sus elementos:



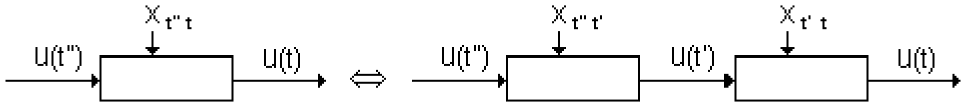
Estudiar en qué casos cambiando el sentido de una única flecha el Sistema deja de ser jerárquico.

Actividad 6. Llamaremos *Sistema Normal* a un Sistema S={E,c,f}, tal que E es un conjunto de variables, $c \leq EXE$ es una relación estructural de conexión jerárquica y $f \leq X_{i \in E} V_i$ es una relación de comportamiento.
Poner ejemplos de Sistemas Normales, especificando E, $\{V_i\}_{i \in E}$, c y f .
Analizar en qué casos la relación estructural c podría inferirse de la relación de comportamiento f :
Ejercicio 2: dada la relación de comportamiento definida por $u=x^2+y^2$, $v=y^2-z^2$, $w=u^2+v^2$, siendo x, y, u, v, w números reales, inferir de ella una relación estructural para definir un Sistema Normal.

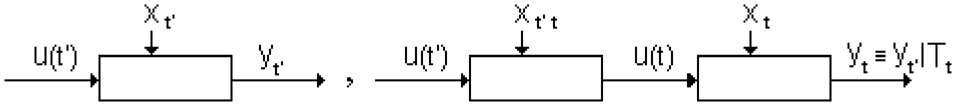
Actividad 7. Llamaremos *Sistema Temporal* a un sistema con alguna relación de comportamiento que involucra alguna variable temporal X cuyo conjunto de valores es $V_X \leq D_X^T = \{x \,/\, x{:}T \rightarrow D_X\}$, es decir, un conjunto de aplicaciones de T en un dominio D_X, siendo T un intervalo temporal.
Analizar cuáles de los Sistemas anteriormente considerados son Temporales.

Actividad 8. Llamaremos *Sistemas Dinámicos* a aquellos Sistemas Temporales cuyas relaciones de comportamiento pueden describirse clasificando sus variables en variables de entrada X, variables de salida Y y variables de estado U, de modo que:
a) La evolución en el tiempo de las variables de salida Y a partir de un instante $t \in T$ depende del valor de las variables de estado U en el instante t y de la evolución en el tiempo de las variables de entrada X a partir de dicho instante t.
b) El valor de las variables de estado U en un instante $t \in T$ depende del valor de las mismas en cualquier instante $t' \leq t$ y de la evolución en el tiempo de las variables de entrada X entre los instantes t' y t, de modo que se cumplan las propiedades de
b1) Identidad: si t'=t, el valor de las variables de estado U en los instantes t' y t debe coincidir.
b2) Transitividad: si $t'' \leq t' \leq t$, para una determinada evolución en el tiempo de las variables de entrada X entre los instantes t'' y t, la dependencia del valor de las variables

de estado U en el instante t a partir de su valor en el instante t'' debe ser equivalente a la que se derivaría del valor de dichas variables en el instante t' dependientes de su valor en el instante t.



b3) Consistencia: para una determinada evolución en el tiempo de las variables de entrada X a partir de un instante t', la dependencia respecto al valor de las variables de estado U en dicho instante t' de la evolución en el tiempo de las variables de salida Y a partir de un instante t≥t' debe ser equivalente a su dependencia respecto al valor de los variables de estado U en dicho instante t derivadas de su valor en el instante t'.



Si todas las relaciones de dependencia en cuestión son deterministas, diremos que el Sistema Dinámico es *Determinista*. Si algunas o todas las relaciones son probabilísticas, y el resto deterministas, diremos que el Sistema es *Estocástico*. Si alguna relación no podemos definirla de modo determinista ni probabilística, tenemos la opción de intentar estimar la "posibilidad", entre 0 y 1, de los correspondientes valores de las variables de salida Y o de estado U; en tal caso, diremos que trabajamos con un *Sistema Borroso*. Poner ejemplos de Sistemas Dinámicos Deterministas, Estocásticos y Borrosos e intentar definir sus relaciones.

Actividad 9. Un Sistema Dinámico *no anticipatorio* será aquél en que los valores de las variables de salida Y no dependan de valores posteriores de las variables de entrada X. Una forma sencilla de Sistemas Dinámicos Deterministas no anticipatorios con intervalo temporal discreto son los *Sistemas Secuenciales*, cuyas relaciones de comportamiento vienen dadas por

$y(t) = F(x(t),u(t))$

$u(t+1)=G(x(t),u(t))$

donde **x**, **u**, **y** pueden representar tuplas de variables de entrada, estado y salida, respectivamente. Es decir, $y(t)=(y_1(t),y_2(t),y_3(t)...)$, etc.

Ejercicio 3: dado un Sistema Secuencial definido por $y(t)=u(t)\cdot x(t)$, $u(t+1)=u(t)+x(t)$, expresar y(5) como función del estado inicial u(0) y de la secuencia de valores de entrada (x(0),x(1),x(2),x(3),x(4),x(5)).

Tomando como elementos los valores de x(t), u(t), y(t) para t=0,1,2,3,4,5, analizar si su Sistema de conexiones es jerárquico, clasificando en niveles dichos elementos.

Llamaremos *retroacción* a la situación que se da cuando el valor de una variable depende directa o indirectamente de valores anteriores de la misma ¿En un Sistema Secuencial se produce retroacción? ¿Hay bucles en su sistema de conexiones?

Actividad 10. Diremos que un Sistema Normal S'=(E',c',f ') es un *subsistema* del Sistema Normal S=(E,c,f) si y sólo si:

a) $E' \leq E$

b) $c' \leq c$

c) f ' = f | E', es decir, f ' es la restricción de f a E' , es decir que para todo $x \in X_{i \in E'} V_i$, $x \in f'$ si y sólo si existe $y \in X_{i \in E-E'} V_i$ tal que $(x,y) \in f$.

d) Si un elemento de E' no es de entrada en S', c' incluye todas las dependencias directas sobre el mismo. Es decir, que para todo $i,j,k \in E$, si $(i,j) \in c'$ y $(i,k) \in c$, entonces $(i,k) \in c'$ (lo que supone que $k \in E'$).
Ejercicio 4: extraer subsistemas del Sistema de conexiones del Ejercicio 1.
Ejercicio 5: extraer subsistemas del Sistema Normal obtenido en el Ejercicio 2, indicando cuáles serían sus relaciones de comportamiento.

Actividad 11. Dados dos subsistemas A, B de un Sistema Normal, diremos que B depende directamente de A, $A \rightarrow B$, si y sólo si existe alguna variable de entrada de B que sea variable dependiente (no de entrada) de A.
Dado un conjunto C de subsistemas de un Sistema Normal, llamaremos *SuperSistema* del mismo al Sistema de conexiones SS=(C,R), tal que $R \leq C X C$ es una relación estructural binaria formada por todos los pares (B,A) tales que $A \rightarrow B$. Diremos que dicho SuperSistema está *bien determinado* si y sólo si es jerárquico.
Ejercicio 6: dados los conjuntos de subsistemas obtenidos en los Ejercicios 4 y 5, obtener sus correspondientes SuperSistemas y estudiar si están o no bien determinados.

Actividad 12. Diremos que un conjunto de subsistemas S_i de un Sistema Normal S es una *descomposición* del mismo si y sólo si:
a) El SuperSistema correspondiente está bien determinado.
b) Ninguna variable es dependiente en más de un subsistema.
c) Toda variable del Sistema Normal S es una variable de alguno de sus subsistemas, es decir $\cup_i E_i = E$.
Ejercicio 7: estudiar si los conjuntos de subsistemas obtenidos en los Ejercicios 4 y 5 son una descomposición de un Sistema Normal; estudiar cómo podríamos obtener una descomposición de un Sistema Secuencial.

Actividad 13. Llamaremos descomposición *máxima* de un Sistema Normal a la formada por los subsistemas resultantes de tomar cada variable dependiente o de salida y las variables de las cuáles depende directamente junto con dichas dependencias directas. Llamaremos descomposición *natural* de un Sistema Normal con un conjunto finito de variables al resultante de aplicarle el **Algoritmo 1**:
1. Ordenaremos sus variables, las clasificaremos en niveles tal como se indicaba en la Actividad 5 y construiremos una matriz poniendo ordenadamente en la misma fila a las variables del mismo nivel.
2. Buscaremos ordenadamente en la matriz construida, comenzando por la primera fila, hasta encontrar una variable de la que no dependa ninguna otra variable de la matriz. Construiremos un subsistema con dicha variable y todas las variables de las cuáles dependa directa o indirectamente.
3. Eliminaremos de la matriz todas las variables de dicho subsistema de las que sólo dependan a lo sumo otras variables de algún subsistema ya construido.
4. Volveremos al paso 2 y repetiremos el proceso hasta que todas las variables hayan sido eliminadas de la matriz.
Ejercicio 8: obtener la descomposición máxima y la descomposición natural de los Sistemas de los Ejercicios 1 y 2. Construir los correspondientes SuperSistemas.

Actividad 14. Diremos que un Sistema Normal S=(E,c,f) es una *unión* de un conjunto C de Sistemas Normales $S_i=(E_i,c_i,f_i)$ si y sólo si:

a) $E=\bigcup_i E_i$

b) $c=\bigcup_i c_i$

c) Para todo $S_i\in C$, $f_i = f \mid E_i$

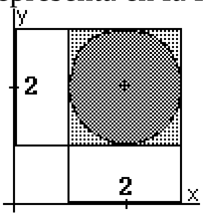
Ahora bien, un conjunto C de Sistemas Normales pueden tener distintas uniones, en tanto que puede haber distintos comportamiento f que cumplan la condición c.

Llamaremos *unión realista* a aquélla en que el comportamiento f viene definido por

c') $f = \bigcap_i f_i^*$ donde f_i^* es la extensión de f_i a E, es decir que para todo $x\in X_{i\in E} V_i$, $x\in f_i^*$ si y sólo si existen $y\in f_i$, $z\in X_{i\in E-Ei} V_i$ tal que x=(y,z)

Llamaremos *sistema realista* asociado a un Sistema Normal a la unión realista de su descomposición máxima. Llamaremos *deconstrucción* al proceso de obtención de obtención del mismo. Diremos que un Sistema Normal es *reconstruible* si y sólo si su sistema realista asociado es idéntico a él, es decir, si no se pierde información en el proceso de deconstrucción. En la práctica trabajaremos habitualmente con sistemas realistas, cuyo comportamiento f vendrá definido por los comportamientos de sus variables dependientes. Si un Sistema Normal no fuera reconstruible podemos introducir nuevas relaciones de dependencia directa para intentar transformarlo en reconstruible obteniendo así un sistema realista sin pérdida de información. A su vez, diremos que un Sistema Normal reconstruible (realista) es *redundante* si pueden eliminarse relaciones de dependencia directa sin que deje de ser reconstruible.

Un ejemplo trivial de Sistema Normal no reconstruible sería ({x,y}, Ø, $(x-2)^2+(y-2)^2<1$), cuyo proceso de deconstrucción se representa en la figura siguiente,



donde el sombreado oscuro representa el comportamiento del sistema original y se han remarcado sobre los ejes sus restricciones sobre las variables **x** e **y**, indicándose con un sombreado más claro las zonas añadidas en su unión realista. Para transformar el sistema original en reconstruible (realista) bastaría con introducir una relación de dependencia $x\rightarrow y$.

Ejercicio 9: definimos un Sistema Normal mediante el comportamiento $x^2+y^2+z^2<1$, formado por los puntos interiores a una superficie esférica, y la relación estructural de conexión { $x \to y$, $y \to z$ }, siendo x, y, z números reales. Obtener su sistema realista asociado y representarlo gráficamente. ¿El Sistema Normal original es reconstruible? En caso contrario, transformarlo en reconstruible introduciendo una nueva relación de dependencia directa. ¿El nuevo Sistema obtenido será redundante?

Actividad 15. Llamaremos *reducción* de un Sistema Normal S=(E,c,f) a otro Sistema Normal S'=(E',c',f ') tal que
a) $E' \leq E$
b) Todas las variables de entrada de S son variables de entrada de S'.
c) Todas las variables de salida de S son variables de salida de S'.
d) $f' = f \mid E'$
Obsérvese que, a diferencia de los subsistemas, en una reducción no tiene que cumplirse $c' \leq c$. Por el contrario, al eliminar variables intermedias o internas (que no sean de entrada ni de salida) puede establecerse una relación de dependencia directa en S' entre variables que en S sólo tenían una relación de dependencia indirecta.
A su vez, diremos que el Sistema Normal S es una *expansión* del Sistema Normal S' : para obtener una expansión introduciremos variables intermedias que nos faciliten la descomposición en subsistemas con relaciones de comportamiento más sencillas, permitiéndonos así obtener a partir dichos subsistemas la *síntesis* del sistema original o proyectado. Por su parte, para resolver un problema de *análisis* obteniendo el comportamiento global resultante de un conjunto de sistemas interconectados deberemos obtener una unión de los mismos y posteriormente llevar a cabo una reducción de la misma eliminando variables intermedias.
Ejercicio 10: obtener reducciones y en su caso expansiones de Sistemas considerados en las actividades anteriores.