TEMA 2

LA TEORIA DEL PREU DE LES OPCIONS (II)
MODELS DE VALORACIÓ D'OPCIONS

Octubre és un dels mesos particularment perillós per especular en la borsa.
Els altres mesos perillosos són juliol, gener, setembre, abril, novembre, maig, març, juny, desembre, agost i febrer

Mark Twain

Els preus de les accions de la borsa s'assemblen a les ones de la mar: prenen força, s'alcen en l'espuma per a després esvair-se a la vora de la platja…

J. Meli

TEMA 2

→ LÍMITS AL VALOR D'UNA OPCIÓ DE COMPRA (*CALL*)[1]

· **Límit superior del preu d'una *CALL europea*:**

– El valor d'una opció no pot ser superior al valor de l'acció, per la qual cosa el preu de l'acció constitueix el límit superior:

$$c_t^{eur} \leq S_t \qquad \forall\, 0 \leq t \leq T$$

· **Límit superior del preu d'una *CALL americana*:**

– Passa el mateix quan es tracta d'una opció de tipus americà, a diferència que ara es pot exercir l'opció quan el comprador ho desitge i, per tant:

$$c_t^{ame} \leq S_t \qquad \forall\, 0 \leq t \leq T$$

[1] Considerem un actiu subjacent que no reparteix dividends al llarg del termini del contracte d'opcions.

ESTRATÈGIA D'ARBITRATGE 1 → incompliment del límit superior $CALL^{eur}$:

Si el límit és: $c_t^{eur} \leq S_t$

Si en $t_0 \rightarrow c_0 > S_0$:

Arbitratge	Moment 0	Valor a termini: T	
		$S^* \leq E$	$S^* > E$
Compra acció Emissió 1 *CALL* europea	$-S_0$ $+c_0$	S^* 0	S^* $-(S^* - E)$
Cartera arbitratgista	$-S_0 + c_0 > 0$	$S^* \geq 0$	$E \geq 0$

· **Límit inferior del preu d'una *CALL europea*:**

– En el mercat secundari, l'opció mai no pot tenir un valor negatiu, i si és de tipus europeu, mai no podrà ser inferior a la diferència: $S_t - E \cdot e^{-rf \cdot T}$. Per tant:

$$c_t^{eur} \geq 0 \quad i \quad c_t^{eur} \geq \text{màx}\left[0, S_t - E \cdot e^{-r_f \cdot T}\right] \qquad \forall\ 0 \leq t \leq T$$

· **Límit inferior del preu d'una *CALL americana*:**

– En el cas d'opcions americanes, tampoc no pot tenir un valor negatiu, i mai podrà ser inferior a la diferència: $S_t - E$. Per tant:

$$c_t^{ame} \geq 0 \quad i \quad c_t^{ame} \geq \text{màx}\left[0, S_t - E\right] \qquad \forall\ 0 \leq t \leq T$$

$$c_t^{ame} \geq c_t^{eur} \geq \text{màx}\left[0, S_t - E \cdot e^{-r_f \cdot T}\right] \geq \text{màx}\left[0, S_t - E\right]$$

En definitiva, tant per a opcions *CALL* europees com americanes:[2]

$$\boxed{\text{màx}\left[0, S_t - E \cdot e^{-r_f \cdot T}\right] \leq c_t \leq S_t}$$

[2] $r_f = \ln(1+R_F) \rightarrow e^{rf} = (1+R_F) \rightarrow R_F = e^{rf} - 1 \Rightarrow E \cdot (1+ e^{rf} - 1)^{-T} \rightarrow E \cdot e^{-rf \cdot T}$; en què r_f (t. continu) i R_F (t. discret).

ESTRATÈGIA D'ARBITRATGE 2 → incompliment del límit inferior *CALL*^{eur}:

Si el límit és: $c_t^{eur} \geq \text{màx}\left[0, S_t - E \cdot e^{-r_f \cdot T}\right]$

Si en $t_0 \rightarrow c_0^{eur} < S_0 - E \cdot e^{-r_f \cdot T}$

Arbitratge	Moment 0	Valor a termini: T	
		$S^* \leq E$	$S^* > E$
Compra 1 *CALL* europea	$-c_0$	0	$S^* - E$
Venda al descobert d'una acció	S_0	$-S^*$	$-S^*$
Préstec sense risc (import creditor: $S_0 - c_0$)	$-(S_0 - c_0)$	$(S_0 - c_0) \cdot e^{rf \cdot T}$	$(S_0 - c_0) \cdot e^{rf \cdot T}$
Cartera arbitratgista	0	$(S_0 - c_0) \cdot e^{rf \cdot T} - S^* > 0$	$(S_0 - c_0) \cdot e^{rf \cdot T} - E > 0$

TEMA 2

TEMA 2

→ LÍMITS AL VALOR D'UNA OPCIÓ DE VENDA (*PUT*)

· **Límit superior del preu d'una *PUT europea*:**

– El valor de la prima en un moment t serà, com a màxim, igual al valor actual del seu preu d'exercici i constitueix així el límit superior, ja que mai no podrà valer més que E:

$$p_t^{eur} \leq E \cdot e^{-r_f \cdot T} \quad \forall\, 0 \leq t \leq T$$

· **Límit superior del preu d'una *PUT americana*:**

– Passa el mateix quan es tracta d'una opció de tipus americà, a diferència que ara es pot exercir l'opció quan el comprador ho desitja i, per tant:

$$p_t^{ame} \leq E \quad \forall\, 0 \leq t \leq T$$

ESTRATÈGIA D'ARBITRATGE 3 → incompliment del límit superior PUT^{ame}:

Si el límit és: $p_t^{ame} \leq E$

Si en $t_0 \rightarrow p_0^{ame} > E$

Arbitratge	Moment 0	Valor a termini: T	
		$S^* < E$	$S^* \geq E$
Emissió 1 *PUT* americana Préstec sense risc (import creditor: E)	$+p_0$ $-E$	$-(E - S^*)$ $E \cdot e^{rf \cdot T}$	0 $E \cdot e^{rf \cdot T}$
Cartera arbitratgista	$p_0 - E > 0$	$S^* + E \cdot (e^{rf \cdot T} - 1) > 0$	$E \cdot e^{rf \cdot T} > 0$

- **Límit inferior del preu d'una *PUT europea***:
  - – En el mercat secundari, l'opció mai no pot tenir un valor negatiu, i si és de tipus europeu, mai no podrà ser inferior a la diferència: $E \cdot e^{-rf \cdot T} - S_t$. Per tant:

$$p_t^{eur} \geq 0 \quad i \quad p_t^{eur} \geq \text{màx}\left[0, E \cdot e^{-r_f \cdot T} - S_t\right] \qquad \forall\, 0 \leq t \leq T$$

- **Límit inferior del preu d'una *PUT americana***:
  - – En el cas d'opcions americanes, tampoc no pot tenir un valor negatiu, i mai no podrà ser inferior a la diferència: $E - S_t$. Per tant:

$$p_t^{ame} \geq 0 \quad i \quad p_t^{ame} \geq \text{màx}\left[0, E - S_t\right] \qquad \forall\, 0 \leq t \leq T$$

<u>En definitiva</u>, diferenciem per a opcions *CALL* europees i americanes:

$$\boxed{\text{màx}\left[0, E \cdot e^{-r_f \cdot T} - S_t\right] \leq p_t^{eur} \leq E \cdot e^{-r_f \cdot T}}$$

$$\boxed{\text{màx}\left[0, E - S_t\right] \leq p_t^{ame} \leq E}$$

Si no es compliren aquestes condicions

↓

OPORTUNITATS D'ARBITRATGE

ESTRATÈGIA D'ARBITRATGE 4 → incompliment del límit inferior *PUT*^{eur}:

Si el límit és: $p_t^{eur} \geq \text{màx}\left[0, E \cdot e^{-r_f \cdot T} - S_t\right]$

Si en t_0 → $p_0^{eur} < E \cdot e^{-r_f \cdot T} - S_0$

Arbitratge	Moment 0	Valor a termini: T	
		$S^* < E$	$S^* \geq E$
Compra 1 *PUT* europea	$-p_0$	$E - S^*$	0
Compra d'una acció al comptat	$-S_0$	S^*	S^*
Préstec sense risc (import deutor: $p_0 + s_0$)	$p_0 + S_0$	$-(p_0 + S_0) \cdot e^{rf \cdot T}$	$-(p_0 + S_0) \cdot e^{rf \cdot T}$
Cartera arbitratgista	0	$-(p_0 + S_0) \cdot e^{rf \cdot T} + E > 0$	$-(p_0 + S_0) \cdot e^{rf \cdot T} + S^* > 0$

TEMA 2

→ Components de la prima

– **VALOR INTRÍNSEC (V_I)**: valor que tindria l'opció si en aquest moment s'exercira.

· Si fóra una *CALL* → $V_I = (S^* – E)$.

· Si fóra una *PUT* → $V_I = (E – S^*)$.

· D'acord amb el seu V_I podem classificar-les[3] en:

a) Opcions ***in the money*** o "amb diners":

$$\boxed{\mathbf{V_I > 0, \text{ si } (S^* > E)}}$$

b) Opcions ***at the money*** o "en diners":

$$\boxed{\mathbf{V_I = 0, \text{ si } (S^* = E)}}$$

És indiferent exercir o no l'opció. En aquest context no solen exercir-se les opcions.

c) Opcions ***out of the money*** o "sense diners":

$$\boxed{\mathbf{V_I = 0, \text{ si } (S^* < E)}}$$

El seu valor intrínsec és nul (en cap cas pot ser negatiu). Les opcions no s'exerceixen.

[3] Si considerem el cas d'una *CALL*.

	$S^* < E$	$S^* = E$	$S^* > E$
CALL	No exercirà $V_I = 0$ ***Out of the money***	No exercirà $V_I = 0$ ***At the money***	Exercirà $V_I = S^* – E > 0$ ***In the money***
PUT	Exercirà $V_I = E – S^* > 0$ ***In the money***	No exercirà $V_I = 0$ ***At the money***	No exercirà $V_I = 0$ ***Out of the money***

– **VALOR TEMPORAL, VALOR DEL TEMPS O VALOR EXTRÍNSEC (V_T)**: la prima total pagada moltes vegades és major al seu valor intrínsec, és a dir:

$$\boxed{V_T = \text{prima} – V_I}$$

Opcions de compra o *CALL*. $S^* = 25{,}19$ €					
T	**E**	c_0	$V_I = (S^* – E)$	$V_T = \text{prima} – V_I$	**situació**
21/04/12	23,10	2,09	2,09	0	***In the money***
21/04/12	24,13	1,10	1,06	0,04	***In the money***
21/04/12	25,19	0,09	0	0,09	***At the money***
21/04/12	27,02	1,07	0	1,07	***Out of the money***

II. LA RELACIÓ DE PARITAT *CALL-PUT*

TEMA 2

– Relació entre ⇒ preus teòrics *CALL* - *PUT* europees, denominades sobre el mateix actiu bàsic amb la mateixa data d'expiració i preu d'execució.

– Assumim ⇒ mercats perfectes i competitius en què no és possible obtenir beneficis extraordinaris per mitjà d'operacions d'arbitratge.[4]

· En un mercat perfecte amb una inversió determinada i amb un risc nul (= 0), s'obtindrà una rendibilitat molt reduïda.

· Considerem una inversió = 0 (acció al descobert)[5] amb un risc determinat que dependrà de la cotització de l'acció.

– En aquest context, suposem que l'inversor forma l'<u>estratègia combinada</u> següent:

1. Opcions de compra (*CALL*) } estan denominades sobre el mateix actiu bàsic XY,
2. Opcions de venda (*PUT*) } tenen la mateixa data d'expiració i d'execució.
3. Compra de l'actiu bàsic XY[6]
4. Demana prestat els diners suficients per tenir el preu d'exercici en el moment de l'expiració de les opcions.

[4] Quan mitjançant una inversió = 0 i un risc = 0, s'obté una rendibilitat > 0.
[5] Es dóna l'ordre de venda de l'acció a un preu donat.
[6] No reparteix dividends en el període considerat.

TEMA 2

– Representem les dues estratègies possibles que es poden formar:

	MOMENT 0 t_0	**MOMENT t** $T = t^* - t$	**MOMENT t^* (venciment)** $S^* \leq E$	$S^* > E$
Estratègia I				
VENDA 1 *CALL* (sobre XY)	c_0	$-c_t$	0	$-(S^* - E)$
COMPRA 1 *PUT* (sobre XY)	$-P_0$	p_t	$E - S^*$	0
COMPRA ACTIU XY	$-S_0$	S_t	S^*	S^*
		$S_t + p_t - c_t$	E	E
Estratègia II				
PRÉSTEC SENSE RISC (import creditor: $E \cdot e^{-rf \cdot T}$)	$- E \cdot e^{-r_f \cdot (t^* - t_0)}$	$E \cdot e^{-r_f \cdot T}$	E	E

II. LA RELACIÓ DE PARITAT *CALL-PUT*

– Tenim una cartera SENSE RISC i amb una RENDIBILITAT = 0 i, doncs, estem en un MERCAT PERFECTE (INVERSIÓ = 0).

– Aleshores, hem format una cartera en què coneixem el resultat amb certesa, independentment del que passe i tenen el mateix valor final, per tant, en *t*:

$$S_t + p_t - c_t = E \cdot e^{-r_f \cdot T}$$

aïllem la *CALL* → $\boxed{c_t = p_t + S_t - E \cdot e^{-r_f \cdot T}}$

aïllem la *PUT* → $\boxed{p_t = c_t - S_t + E \cdot e^{-r_f \cdot T}}$

RELACIONS DE PARITAT *CALL-PUT*

– Si la *CALL* fóra més cara que la *PUT*, per què podria ser?

$$\text{si } c_t > p_t \rightarrow S_t - E \cdot e^{-r_f \cdot T} > 0$$

$$\text{quan } E < S_t$$

→ si en el mercat real aquesta relació no es complira, es podrien realitzar operacions d'arbitratge fins arribar una altra vegada als preus d'equilibri, donada aquesta relació.

→ Models discrets de valoració d'opcions financeres

– Divideixen el temps en períodes iguals.

– Consideren que tots els fluxos de caixa es produeixen a l'inici o al final del període.

– Quan es tracta d'actius arriscats, s'empren funcions de distribució discretes conegudes per modelitzar les probabilitats d'ocurrència dels diferents estats de la natura.

– El **model binomial**[7] és una proposta efectuada el 1979 per **COX, ROSS i RUBINSTEIN**. Hipòtesi:

1. Els mercats de capitals són perfectes; $\nexists$ impostos ni costos de transacció (friccions).
2. $\nexists$ restriccions sobre les vendes al descobert (a curt) de títols ni opcions.
3. $\exists$ una taxa d'interès lliure de risc, R_F, coneguda, positiva i constant.
4. El període de planificació està dividit en períodes de temps iguals.
5. L'actiu bàsic no paga dividends.

---

[7] Consulteu l'article: COX, J. C.; ROSS, S. A. i RUBENSTEIN, M. (1979): "Option Pricing: A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*. Vol. 7 (setembre), pp. 229-263.

6. El preu de l'acció segueix un procés binomial de períodes discrets de temps. El preu de l'acció sols pot prendre dos valors possibles (o apuja o abaixa).

   · si apuja el preu de l'acció, es multiplicarà per $u \rightarrow$ amb taxa de retorn (u–1).

   · si abaixa el preu de l'acció, es multiplicarà per $d \rightarrow$ amb taxa de retorn (d–1).

7. La taxa de retorn de l'acció sols pot prendre en cada moment del temps dos valors possibles:

   · (u–1) amb probabilitat p

   · (d–1) amb probabilitat (1–p)

– Condicions que han de complir u i d:

a) $\mathbf{0 \leq d < 1} \rightarrow$ la cotització és positiva o nul·la.

b) $\mathbf{u > 1} \rightarrow$ és un multiplicador a l'alça sense límit superior.

c) S'anomena $\mathbf{R = (1 + R_F)}$ i ha de complir: $\mathbf{d < R < u}$.

   · si d < u < R: ningú compraria accions perquè la rendibilitat de l'actiu sense risc és més alta.

TEMA 2

→ Model binomial per a un període [1]

– Aquest mètode considera que sols hi falta un període perquè expire l'opció. Efectuem la valoració tant del títol subjacent com de l'opció:

t = 0 t = 1

Valor de l'acció $\mathbf{S_0}$

Δ $S_u = S_0 \cdot u$ amb probabilitat p

δ $S_d = S_0 \cdot d$ amb probabilitat (1 – p)

Valor de l'opció $\mathbf{C_0}$

Δ $C_u = \text{màx.}\ \{S_u - E, 0\}$ amb probabilitat p

δ $C_d = \text{màx.}\ \{S_d - E, 0\}$ amb probabilitat (1 – p)

- C_u = valor de l'opció en t = 1 si l'acció ha pujat a S_u.
- C_d = valor de l'opció en t = 1 si l'acció ha baixat a S_d.

– Formem una cartera protegida, això és, construir una cartera que ens permeta eliminar el risc independentment de l'estat de la natura que hi haja. La inversió estarà formada per la compra d'un actiu subjacent i la venda d'un nombre determinat d'opcions de compra o *CALL*. Quantes? ***m*** opcions de compra.

$$\begin{array}{ccl} t=0 & & t=1 \\ & \overset{\Delta}{\nearrow} & \psi_u = S_u + mC_u \rightarrow \text{amb probabilitat } p \\ \boldsymbol{\psi_0 = S_0 + mC_0} & & \\ & \underset{\delta}{\searrow} & \psi_d = S_d + mC_d \rightarrow \text{amb probabilitat } (1-p) \end{array}$$

– Perquè aquesta cartera estiga protegida, haurà de valer el mateix siga quin siga l'estat de la natura que s'hi presente, tant si les accions pugen com si baixen. Per tant:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \psi_u = \psi_d \\ \quad S_u + mC_u = S_d + mC_d \\ \quad S_0 \cdot u + mC_u = S_0 \cdot d + mC_d \end{array}\right\} \text{valor de } m \text{ perquè la cartera estiga protegida} \Longrightarrow \boxed{m = -\frac{S_0 (u-d)}{C_u - C_d}}$$

2) El valor teòric de l'opció C_0 si fem servir el concepte de *cartera protegida*, capitalitzant el valor actual de la inversió al tipus sense risc, obtindrem el valor final. Atès que és indiferent que apuge o abaixe, agafem el cas més favorable:

· Si en el t = 0 efectuem una inversió sense risc[8]: $\psi_0 = (S_0 + mC_0)$

$$a \longrightarrow a(1+R_F)^1$$

0 1

$$\rightarrow \psi_0 \cdot R = \psi_u$$

$$(S_0 + mC_0)R = S_u + mC_u$$

· Si hi operem, obtindrem: $S_0 \cdot R + mC_0 \cdot R = S_u + mC_u$

$$C_0 = \frac{- S_0 \cdot R + S_0 \cdot u + mC_u}{m \cdot R} = \frac{S_0 \left(u - R \right) + mC_u}{m \cdot R}$$

[8] Recordeu que $R = (1 + R_F)$ per simplificar-ne els càlculs.

TEMA 2

· Si substituïm *m* pel seu valor:

$$C_0 = \frac{\cancel{S}_0(u-R) - \dfrac{\cancel{S}_0(u-d)}{C_u - C_d}C_u}{-\dfrac{\cancel{S}_0(u-d)}{C_u - C_d}R} = \frac{(C_u - C_d)(u-R) - (u-d)C_u}{-(u-d)R}$$

$$C_0 = -\frac{\cancel{C_u \cdot u} - C_d \cdot u - C_u \cdot R + C_d \cdot R - \cancel{C_u \cdot u} + C_u \cdot d}{(u-d)R}$$

$$C_0 = \frac{\left[\dfrac{C_u(R-d)}{(u-d)} + \dfrac{C_d(u-R)}{(u-d)}\right]}{R} = \frac{\left[\dfrac{C_u\left[(1+R_F)-d\right]}{(u-d)} + \dfrac{C_d\left[u-(1+R_F)\right]}{(u-d)}\right]}{(1+R_F)}$$

si $\frac{[(1+R_F)-d]}{(u-d)} = p$; $\frac{[u-(1+R_F)]}{(u-d)} = (1-p)$

- Finalment, el **valor teòric d'una *CALL* per a un període** (quan hi falta un any perquè expire l'opció) serà:

$$\boxed{C_0 = \frac{C_u \cdot p + C_d \cdot (1-p)}{(1+R_F)}}$$

en què $C_u = \text{màx. } \{S_0 \cdot u - E, 0\}$

$C_d = \text{màx. } \{S_0 \cdot d - E, 0\}$

CONCLUSIONS FINALS:

– El valor teòric de la *CALL* depèn del preu d'execució *E*, de la cotització de l'actiu bàsic *S* i del tipus d'interès sense risc R_F.

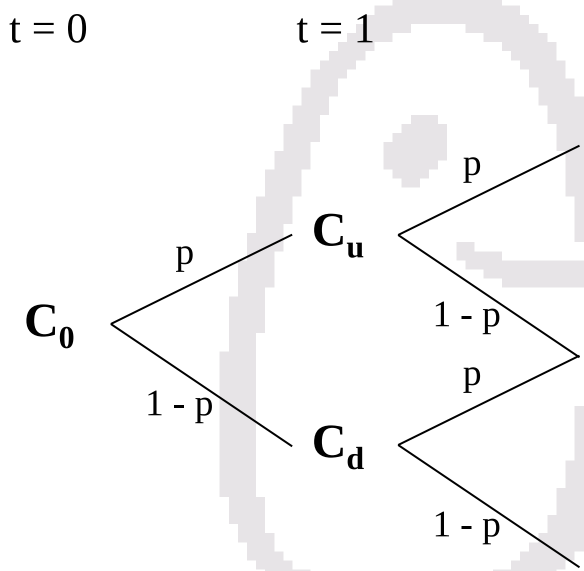
– També depèn de la variabilitat de l'actiu bàsic, això és, de la variabilitat a l'alça *u* i a la baixa *d*.

– No depèn del nivell d'aversió al risc (risc neutral).

TEMA 2

→ Model binomial per a dos períodes [2]

– Es tracta de **valorar una opció** quan queden dos períodes perquè expire (situació més realista que el model per a un període):



$\mathbf{C_{uu}}$ = màx. $\{S_{uu} – E, 0\}$ = màx. $\{S_0 \cdot u^2 – E, 0\}$

$\mathbf{C_{ud}}$ = màx. $\{S_{ud} – E, 0\}$ = màx. $\{S_0 \cdot u \cdot d – E, 0\}$

$\mathbf{C_{dd}}$ = màx. $\{S_{dd} – E, 0\}$ = màx. $\{S_0 \cdot d^2 – E, 0\}$

– Calculem els valors de C_u que es correspon amb un estat de la naturalesa favorable i C_d per a l'oposat o complementari, és a dir, desfavorable.

TEMA 2

· Estat favorable (la cotització puja):

$$C_u = \frac{C_{uu} \cdot p + C_{ud} \cdot (1 - p)}{(1 + R_F)}$$

$$= \frac{\text{Max } \{S_0 \cdot u^2 - E, 0\} \cdot p + \text{Max } \{S_0 \cdot u \cdot d - E, 0\} \cdot (1 - p)}{(1 + R_F)}$$

· Estat desfavorable (la cotització baixa):

$$C_d = \frac{C_{du} \cdot p + C_{dd} \cdot (1 - p)}{(1 + R_F)}$$

$$= \frac{\text{Max } \{S_0 \cdot d \cdot u - E, 0\} \cdot p + \text{Max } \{S_0 \cdot d^2 - E, 0\} \cdot (1 - p)}{(1 + R_F)}$$

TEMA 2

· Si substituïm els valors respectius de C_u i C_d en l'expressió original C_0, tindrem:

$$C_0 = \frac{C_u \cdot p + C_d \cdot (1 - p)}{(1 + R_F)}$$

$$= \left[\frac{C_{uu} \cdot p + C_{ud} \cdot (1 - p)}{(1 + R_F)} \cdot p + \frac{C_{du} \cdot p + C_{dd} \cdot (1 - p)}{(1 + R_F)} \cdot (1 - p) \right] \cdot \frac{1}{(1 + R_F)}$$

$$= \left[\frac{C_{uu} \cdot p^2 + C_{ud} \cdot p(1 - p) + C_{du} \cdot p(1 - p) + C_{dd} \cdot (1 - p)^2}{(1 + R_F)^2} \right]$$

· Finalment, el **valor teòric d'una *CALL* per a dos períodes** serà:

$$\boxed{C_0 = \left[\frac{C_{uu} \cdot p^2 + 2C_{ud} \cdot p(1 - p) + C_{dd} \cdot (1 - p)^2}{(1 + R_F)^2} \right]}$$

– **Valoració d'una acció** quan queden dos períodes perquè expire l'opció:

t = 0 t = 1 t = 2

$\mathbf{S_0}$

p: $\mathbf{S_u} = S_0 \cdot u$

1 – p: $\mathbf{S_d} = S_0 \cdot d$

p: $\mathbf{S_{uu}} = S_0 \cdot u^2$

1 – p / p: $\mathbf{S_{ud}} = S_0 \cdot u \cdot d$

1 – p: $\mathbf{S_{dd}} = S_0 \cdot d^2$

EXEMPLE 1: suposem que el valor actual d'una acció ordinària és de 100 € i que, dins d'un període, aquest títol pot prendre el valor de 120 € (u = 1,2), o bé haver baixat fins arribar als 90 € (d = 0,9). Si E = 100 €, per a un període tindríem:

$\mathbf{S_0} = 100$

p: $S_u = 100 \cdot 1{,}2 = 120$

1–p: $S_d = 100 \cdot 0{,}9 = 90$

$\mathbf{C_0}$ **?**

p: $C_u = \text{màx. }\{120 - 100, 0\} = 20$

1–p: $C_d = \text{màx. }\{90 - 100, 0\} = 0$

Si considerem un tipus sense risc del 6%, podem calcular els valors de *p* i de (*1 – p*):

$$p = \frac{\left[\left(1 + R_F\right) - d\right]}{\left(u - d\right)} = \frac{\left[\left(1+0{,}06\right) - 0{,}9\right]}{\left(1{,}2 - 0{,}9\right)} = 0{,}53\overset{\frown}{3}$$

$$\left(1 - p\right) = 1 - 0{,}53\overset{\frown}{3} = 0{,}46\overset{\frown}{6}$$

hi ha una probabilitat del 53,33% que l'actiu puge, davant un 46,66% que baixe. Si apliquem l'expressió final de C_0, tindrem:

$$C_0 = \frac{C_u \cdot p + C_d \cdot \left(1 - p\right)}{\left(1 + R_F\right)}$$

$$= \frac{20 \cdot 0{,}5333 + 0 \cdot 0{,}4666}{\left(1 + 0{,}06\right)}$$

$$\boxed{C_0 = 10{,}0629\ €}$$

Exemple 2: continuem amb l'exemple 1 però, tenint en compte que queden dos períodes perquè l'opció arribe a T, els arbres binomials seran:

t = 0 | t = 1 | t = 2

S_0
100

p → $S_u = S_0 \cdot u$
120

1 - p → $S_d = S_0 \cdot d$
90

p → $S_{uu} = S_0 \cdot u^2$
144

1 - p / p → $S_{ud} = S_0 \cdot u \cdot d$
108

1 - p → $S_{dd} = S_0 \cdot d^2$
81

C_0
?

p → C_u
25,66

1 - p → C_d
4,025

p → C_{uu} = màx. $\{S_0 \cdot u^2 - E, 0\}$ = màx. {144 - 100, 0}
44

1 - p / p → C_{ud} = màx. $\{S_0 \cdot u \cdot d - E, 0\}$ = màx. {108 - 100, 0}
8

1 - p → C_{dd} = màx. $\{S_0 \cdot d^2 - E, 0\}$ = màx. {81 - 100, 0}
0

Si calculem prèviament els valor de C_u i de C_d per obtenir-ne l'expressió final C_0:

$$C_u = \frac{C_{uu} \cdot p + C_{ud} \cdot (1 - p)}{(1 + R_F)} = \frac{44 \cdot 0{,}533 + 8 \cdot 0{,}466}{(1 + 0{,}06)} = 25{,}66 \text{ €}$$

$$C_d = \frac{C_{du} \cdot p + C_{dd} \cdot (1 - p)}{(1 + R_F)} = \frac{8 \cdot 0{,}533 + 0 \cdot 0{,}466}{(1 + 0{,}06)} = 4{,}025 \text{ €}$$

$$C_0 = \frac{C_u \cdot p + C_d \cdot (1 - p)}{(1 + R_F)} = \frac{25{,}66 \cdot 0{,}533 + 4{,}025 \cdot 0{,}466}{(1 + 0{,}06)}$$

$$\boxed{C_0 = 14{,}68 \text{ €}}$$

de manera anàloga, podríem obtenir directament l'expressió de C_0:

$$C_0 = \left[\frac{C_{uu} \cdot p^2 + 2C_{ud} \cdot p(1 - p) + C_{dd} \cdot (1 - p)^2}{(1 + R_F)^2} \right] = 14{,}68 \text{ €}$$

però, tal vegada, resulta més interessant el primer procediment, ja que cal omplir l'arbre binomial i amb aquesta última expressió no ho podríem fer.

TEMA 2

→ Model binomial generalitzat per a *n* períodes [3]

– És un model[9] que es pot aplicar quan hi ha més de dos períodes perquè expire l'opció financera.

– Σ de tots els possibles resultats de l'opció, tenint en compte els diferents estats de la naturalesa multiplicat per la seua probabilitat d'ocurrència, actualitzada per R_F:

$$C_0 = \frac{1}{(1+R_F)^n} \cdot \left[\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \text{máx}\left\{ S_0 u^j d^{n-j} - E, 0 \right\} \right]$$

– Consideracions:

· s'exercirà l'opció *sii* $\mathbf{S^* > E \Rightarrow V_I > 0}$.

· tots els resultats nuls es poden ometre de l'expressió anterior $\Rightarrow$ $\mathbf{V_I = 0}$.

· **j** representa el nombre de pujades experimentades pel subjacent.

· **(n–j)** representa el nombre de baixades.

· definim ***a*** com el nombre de pujades a partir del qual s'executa l'opció.

---

[9] Recordeu que tot procés binomial es descriu així: $B(j; n, p) = \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j}$

TEMA 2

– Si reescrivim l'expressió anterior prenent com a punt d'inflexió *a*, tindrem:

$$C_0 = \frac{1}{(1+R_F)^n} \cdot \left[\sum_{j=0}^{a} \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \text{máx}\left\{S_0 u^j d^{n-j} - E, 0\right\} \right] +$$

$$+ \frac{1}{(1+R_F)^n} \cdot \left[\sum_{j=a+1}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \text{máx}\left\{S_0 u^j d^{n-j} - E, 0\right\} \right]$$

· $\forall\, j = a \rightarrow$ al venciment: $S^* = E$; $S_0 \cdot u^a \cdot d^{n-a} = E \Rightarrow$ *at the money*.

· $\forall\, j > a \rightarrow$ al venciment: $S^* > E$; $S_0 \cdot u^a \cdot d^{n-a} > E \Rightarrow$ *in the money*.

($j > a \rightarrow j = a + 1, \ldots, n$.)

· $\forall\, j < a \rightarrow$ al venciment: $S^* < E$; $S_0 \cdot u^a \cdot d^{n-a} < E \Rightarrow$ *out of the money*.

($j < a \rightarrow j = 1, \ldots, a$.)

– Atès que la primera expressió de l'equació anterior fa referència a la zona que afecta les baixades de les cotitzacions i això implicaria no exercir l'opció, l'ometem i, finalment, serà:

$$C_0 = \frac{1}{(1+R_F)^n} \cdot \left[\sum_{j=a+1}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \underbrace{\left(S_0 u^j d^{n-j} - E\right)}_{\text{ja que } V_I > 0} \right]$$

– Si separem els valors de S_0 i E, tindrem que[10]:

$$C_0 = S_0 \cdot \sum_{j=a+1}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} \cdot \frac{p^j u^j}{(1+R_F)^j} \cdot \frac{(1-p)^{n-j} d^{n-j}}{(1+R_F)^{n-j}} -$$

$$- \frac{E}{(1+R_F)^n} \cdot \sum_{j=a+1}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} \cdot p^j (1-p)^{n-j}$$

[10] Per calcular l'expressió final, hem multiplicat (per conveniència) el denominador del primer tram per $(1+R_F)^j$.

– Finalment, el model binomial generalitzat proposat per **COX, ROSS i RUBINSTEIN (1979)** queda definit en la relació matemàtica següent:

$$C_0 = S_0 \cdot \Phi(a+1; n, p') - \frac{E}{R^n} \cdot \Phi(a+1; n, p)$$

en què:

S_0 = preu actual de l'actiu subjacent.

E = preu d'execució de l'opció.

R = (1 + R_F), en què R_F és el tipus d'interès lliure de risc (discret).

n = nombre de períodes que falten per a l'expiració de l'opció.

$\Phi(\cdot)$ = complementària de la funció de distribució binomial.

$p' = (p \cdot u)/(1+R_F)$

$a = \ln(E/S_0 \cdot d^n)/\ln(u/d)$

→ El model de Black i Scholes (1973)

– Aquest model[11] va ser proposat per **BLACK i SCHOLES** el 1973. Hipòtesi:

1. Els mercats de capitals són perfectes.
2. ∄ restriccions sobre les vendes a curt (al descobert) de títols.
3. Absència d'oportunitats d'arbitratge.
4. ∃ d'una taxa d'interès lliure de risc, r_f, coneguda, positiva i constant.
5. La negociació dels títols és contínua, sense restriccions i no cal realitzar cap dipòsit de garantia.
6. L'actiu bàsic no paga dividends.
7. El preu de l'opció de compra/venda o *CALL*/*PUT* només depèn del preu de l'actiu subjacent i del temps que hi falta per a la maduració d'aquesta.
8. Assumeix un procés dinàmic per representar el preu del títol conegut com a ***procés de difusió de Wiener bàsic*** **o** ***moviment geomètric brownià*** (estableix la relació entre els preus actuals i els possibles preus futurs de l'actiu bàsic) en què la mitjana (μ) és constant i la variància (σ^2) també → distribució normal.

[11] Consulteu l'article: BLACK, F.; SCHOLES, M. (1973): "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637-659.

– El fonament inicial és que el valor de l'opció depèn únicament de dues variables: el preu del títol i el temps que falta perquè expire l'opció:

$$\tilde{C} = C(\tilde{S}, t) \qquad [1]$$

– $\tilde{S}$ és una variable aleatòria definida en temps continu. Consideracions:

- El rendiment de l'acció ($\Delta\tilde{S}$ /S) segueix un procés de difusió amb mitjana constant μ i variància constant σ^2.
- El procés de generació dels rendiments pot ser descrit pel ***procés de Wiener*** *o* ***moviment geomètric brownià***, que s'expressa mitjançant l'equació estocàstica següent:

$$\frac{d\tilde{S}}{S} = \mu dt + \sigma d\tilde{z} \qquad [2]$$

en què:

μ = esperança de la taxa de retorn instantània (mesura la direcció del procés aleatori a través del temps, *dt*).

σ = taxa de desviació instantània de la taxa de retorn.

dt = increment petit de temps.

$d\tilde{z}$ = procés bàsic de Wiener de mitjana 0 i variància 1, en què: $\tilde{z} = \tilde{\varepsilon} dt$

$$\tilde{z} \sim N(0, t) \qquad [3]$$

TEMA 2

· El model de moviment geomètric brownià descriu la distribució de probabilitat que mostra la relació entre el preu actual d'un actiu i el seu preu futur. Estableix que els pagaments futurs d'un actiu estan normalment distribuïts i que la volatilitat es pot mesurar amb dades històriques.

· L'equació diferencial estocàstica que sorgeix d'operar en l'equació [2] és un procés estocàstic complex i s'anomena ***lema d'Ito***, en què la mitjana i la variància ja no són constants:

$$d\tilde{S} = \mu S dt + \sigma S d\tilde{z} \qquad [4]$$

– Black i Scholes afirmen que és possible mantenir una posició de cobertura (*hedge*) amb la construcció d'una cartera lliure de risc, formada per un actiu principal i el derivat; s'estableix que el valor net de la posició en t serà:

$$\psi_t = n_{st} S_t - n_{0t} C_t \qquad [5]$$

· Aquesta inversió[9] per títol serà:

$$\frac{\psi_t}{n_{st}} = S_t - \frac{n_{0t}}{n_{st}} C_t = S_t - m_t C_t \qquad [6]$$

[9] m_t representa la inversa de la ràtio de cobertura (*hedge*): $m_t = 1/h_t$, la diferència és que ara varia amb el temps (t).

– A mesura que hi ha canvis en el preu dels títols i la composició de la cartera, el canvi total per títol serà:

$$\Delta\left(\frac{\psi_t}{n_{st}}\right) = \Delta S_t - m_t \Delta C_t - C_t \Delta m_t \qquad [7]$$

- en què: ΔS_t = mesura el canvi que es produeix per la variació en el preu de l'acció.

  $m_t\ \Delta C_t$ = mesura el canvi per la variació en el preu de l'opció.

  $C_t\ \Delta\ m_t$ = mesura el canvi en la composició de la cartera.

- Consideracions:

  → si $\Delta\ m_t > 0$, desinversió: s'han retirat fons de la cartera, atés que han augmentat les opcions venudes per cada acció posseïda.

  → si $\Delta\ m_t < 0$, inversió: s'han col·locat fons en la cartera.

– El rendiment de la cartera sofrirà variacions tenint en compte les decisions que prenga l'agent racional, és a dir, d'invertir o de desinvertir, per la qual cosa:

$$\Delta R_t = \Delta\left(\psi_t / n_{st}\right) + C_t \Delta m_t \qquad [8]$$

- Si substituïm en l'equació [8] el valor de l'equació [7], tindrem:

$$\Delta R_t = \left(\Delta S_t - m_t \Delta C_t - \cancel{C_t \Delta m_t}\right) + \cancel{C_t \Delta m_t} \quad [9]$$

- En definitiva, arribem a:

$$\Delta R_t = \Delta S_t - m_t \Delta C_t \quad [10]$$

- Si l'expressem en forma d'equació diferencial i eliminem els subíndexs:

$$dR = dS - mdC \quad [11]$$

– Si utilitzem el lema d'Ito,[12] obtindrem el canvi en el preu de l'opció, per la diferencial de l'equació [1]:

$$\tilde{C} = C(\tilde{S}, t)$$

$$d\tilde{C} = \frac{\delta C}{\delta S} dS + \frac{\delta C}{\delta t} dt + \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta^2 C}{\delta S^2} (dS)^2 \quad [12]$$

- Si considerem que z és un procés bàsic de Wiener, per tant, es compleix que $(dz)^2 = dt$, i substituïm $d\tilde{S}$ de l'equació [4] en l'expressió [12], obtindrem:

[12] Consulteu l'article: RUBIO, I., (1989): "Una introducción a los procesos de Itô", *Revista española de financiación y contabilidad*, vol. 19, 60, pp. 701-718.

$$d\tilde{C} = \frac{\delta C}{\delta S}\left(\mu S dt + \sigma S d\tilde{z}\right) + \frac{\delta C}{\delta t} dt + \frac{1}{2}\cdot\frac{\delta^2 C}{\delta S^2}\left(S^2\sigma^2 dt\right) \qquad [13]$$

- Reescrivim el rendiment de la cartera substituint la variació del preu de l'opció en l'equació [13] mitjançant l'equació [11]. Si, addicionalment, considerem la inversa de la ràtio de cobertura (*hedge*): m = 1/h = δS/δC, i fem tots els càlculs adients:

$$dR = -\, m\left(\frac{\delta C}{\delta t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\delta^2 C}{\delta S^2} S^2\sigma^2\right)dt \qquad [14]$$

- queda eliminada l'única font potencial d'incertesa $d\tilde{z}$.

– Atès que la posició de cobertura (*hedge*) representa una inversió que no té risc, que el rendiment obtingut ha de ser la taxa d'interès lliure de risc, r_f, i que la quantitat invertida per títol era de (S – mC), el rendiment serà:

$$\frac{dR}{dt} = r_f\left(S - mc\right) \qquad [15]$$

- Si igualem les expressions [14] i [15], obtindrem:

TEMA 2

$$\frac{-m\left(\frac{\delta C}{\delta t}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta^2 C}{\delta S^2}S^2\sigma^2\right)\cancel{dt}}{\cancel{dt}}=r_f\left(S-mC\right) \qquad [16]$$

· Si aïllem δC/δS:

$$\frac{\delta C}{\delta t}=\frac{r_f S}{-m}+r_f C-\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta^2 C}{\delta S^2}S^2\sigma^2$$

$$\frac{\delta C}{\delta t}=-\frac{r_f S}{\delta S/\delta C}+r_f C-\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta^2 C}{\delta S^2}S^2\sigma^2$$

· L'equació diferencial obtinguda per Black i Scholes i que serveix com a pas previ a la fórmula de valoració d'opcions es pot escriure així:

$$\frac{\delta C}{\delta t}=r_f C-r_f S\cdot\frac{\delta C}{\delta S}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\delta^2 C}{\delta S^2}S^2\sigma^2 \qquad [17]$$

TEMA 2

→ Equació de Black i Scholes

– Una vegada tenim l'expressió [17], es pot demostrar la coneguda fórmula de valoració de Black i Scholes d'una opció de compra. La seua expressió analítica final és:

$$C = S \cdot N\left(d_1\right) - E \cdot e^{-r_f \cdot (T-t)} \cdot N\left(d_2\right) \qquad [18]$$

– Es tracta d'una equació que depèn de dues variables (cotització actual del títol, S, i de la data de maduració de l'opció, t, i dels operadors N(d), que representen la funció de distribució normal[13] estandarditzada, en què d_1 i d_2 són:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}; \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)} \qquad [19]$$

– Hi ha un avantatge en aquesta equació, i és que tots els paràmetres són fàcilment observables. Només cal calcular la volatilitat (σ^2) mitjançant dades històriques dels preus (rendiments) de l'actiu considerat. Tanmateix, el valor de l'opció no depèn ni de la rendibilitat esperada, ni de les preferències dels agents econòmics.

[13] Recordeu l'estructura: $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\left(-z^2/2\right)}$; on $z = \frac{X - \mu}{\sigma}$; $-\infty < z < \infty$

– L'equació proposada per **BLACK i SCHOLES (1973)** per **valorar una opció de compra o *CALL* europea que no reparteix dividends** és:

$$\boxed{C = S \cdot N(d_1) - E \cdot e^{-r_f \cdot (T-t)} \cdot N(d_2)}$$

en què:

S = preu actual de l'actiu subjacent.

E = preu d'execució de l'opció.

r_f = tipus d'interès lliure de risc en temps continu (anualitzat).

(T-t) = temps (en anys) que falta perquè expire l'opció.

σ^2 = variància (per any) instantània del rendiment de l'acció.

N(d) = probabilitat que una variable aleatòria estandarditzada i normalment distribuïda siga $\leq$ d.

$$d_1 = \frac{\ln\left(S/E\right) + \left(r_f + \sigma^2/2\right) \cdot (T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{(T-t)}$$

– L'equació proposada per **BLACK i SCHOLES (1973)** per **valorar una opció de venda (*PUT*) europea que no reparteix dividends** és:

$$\boxed{P = E \cdot e^{-r_f \cdot (T-t)} \cdot N(-d_2) - S \cdot N(-d_1)}$$

en què:

S = preu actual de l'actiu subjacent.

E = preu d'execució de l'opció.

r_f = tipus d'interès lliure de risc en temps continu (anualitzat).

(T-t) = temps (en anys) que falta perquè expire l'opció.

σ^2 = variància (per any) instantània del rendiment de l'acció.

N(- d) = 1 – N(d) = probabilitat que una variable aleatòria estandarditzada i normalment distribuïda siga $\leq$ d.

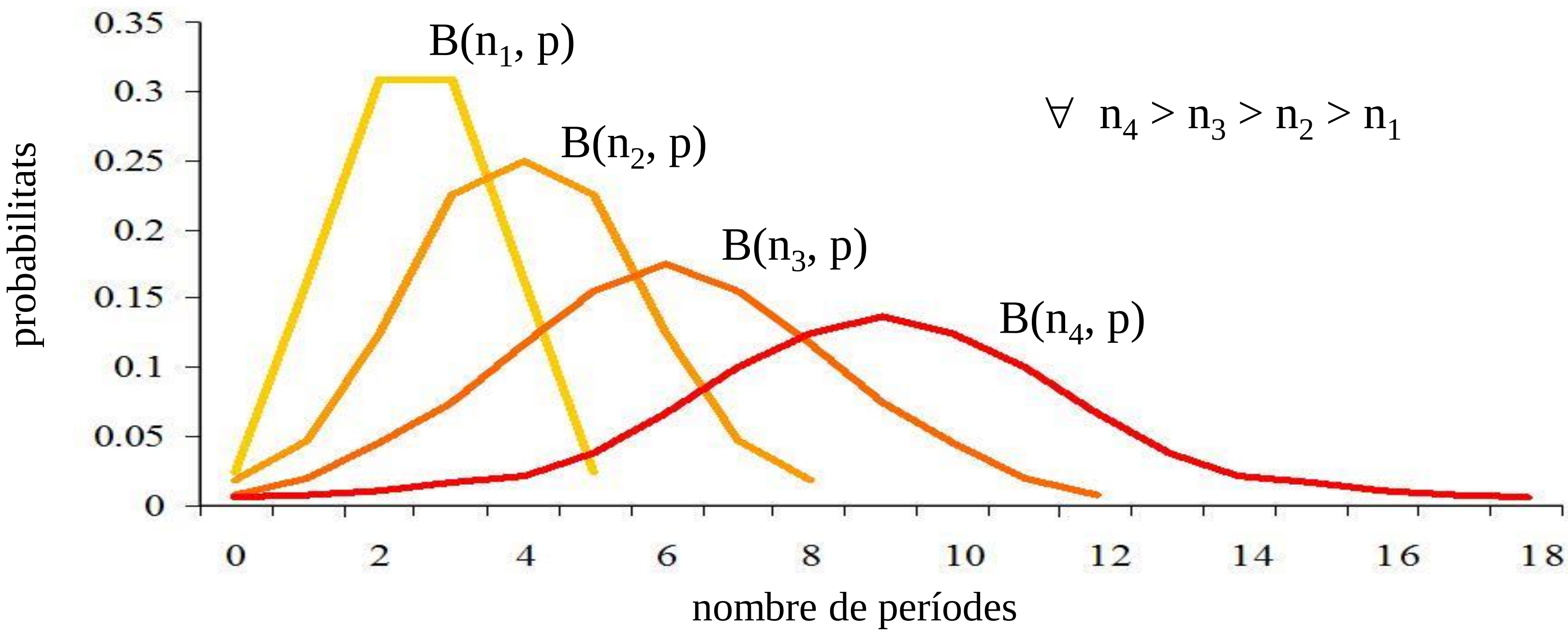
$$d_1 = \frac{\ln\left(S/E\right) + \left(r_f + \sigma^2/2\right)\cdot(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

→ Convergència de la distribució binomial a la distribució normal

– Mitjançant el teorema de Moivre-Laplace, Cox, Roos i Rubinstein (1979) van provar la convergència del seu model amb el model de Black i Scholes (1973) de valoració d'opcions europees.

– Per tant, <u>la funció de distribució binomial convergeix en la funció de distribució normal, a mesura que augmenten el nombre d'intervals temporals</u> en què es fracciona el temps fins que arribe el termini de l'opció.



– Els paràmetres de la distribució binomial B (n, p) són:

· mitjana : $\mu = n \cdot p$

· desv. típica: $\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)}$

– Per la qual cosa, segons Moivre-Laplace, l'aproximació asimptòtica serà:

$$X \sim B(n,p) \xrightarrow{\text{asimp.}} X' \sim N\left(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p(1-p)}\right)$$

$$X \sim N(\mu, \sigma) \xrightarrow{\text{si}} z = \frac{x - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\text{tipificada}} Z \sim N(0,1)$$

$$X' \sim N\left(n \cdot p, \sqrt{n \cdot p(1-p)}\right) \xrightarrow{\text{si}} z' = \frac{x - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p(1-p)}} \xrightarrow{\text{tipificada}} Z' \sim N(0,1)$$

TEMA 2

→ Algunes valoracions del model de Black i Scholes

– La sensibilitat del valor d'una opció de compra davant de petites variacions de les cinc variables de què depèn ve donada per les següents expressions, estudiades en el treball de Cox i Rubinstein (1985):

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) > 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial E} = -\, r^{-(T-t)} \cdot N\left(d_2 - \sigma\sqrt{(T-t)}\right) < 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \left[\left(S\cdot\sigma/2\sqrt{(T-t)}\right)\cdot\left(1/\sqrt{2\pi}\right)\cdot e^{-x^2/2}\right] + E\cdot r^{-(T-t)}(\log r)\,N\left(x - \sigma\sqrt{(T-t)}\right) > 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = S\cdot\sqrt{(T-t)}\cdot\left(1/\sqrt{2\pi}\right)\cdot e^{-x^2/2} > 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial r} = (T-t)\cdot E\cdot r^{-(T-t+1)}\cdot N\left(d - \sigma\sqrt{(T-t)}\right) > 0$$

Segons les conclusions de Valero (1988), dels resultats anteriors extraiem les següents observacions en relació amb el comportament d'aquestes variables:

- Un valor més gran de l'acció donarà lloc a un valor més gran de l'opció de compra o *CALL*, que té valor només quan el preu de l'acció és superior al preu d'exercici, E.
- Al contrari, un major preu d'exercici significarà menor valor de l'opció de compra, pel mateix raonament anterior.
- Com major és el temps fins al venciment, majors possibilitats hi ha que el preu de l'acció s'incremente i l'opció tinga un valor intrínsec positiu (es convertisca *in the money*) i, per tant, augmente el valor de l'opció de compra o *CALL*.
- Respecte al tipus d'interès, el seu efecte sobre el valor de l'opció és invers al del preu d'exercici de l'opció. D'aquesta manera, un major tipus d'interès significa un menor preu actualitzat o efectiu d'exercici i, per tant, un valor més gran per a l'opció.
- L'efecte de la volatilitat sobre el valor de l'opció es pot entendre en la mesura que una major volatilitat significa una major incertesa i dispersió dels preus futurs de l'acció en relació amb el seu valor mitjà esperat. Per tant, hi ha una major probabilitat que els preus de l'acció superen el preu d'exercici i que, d'aquesta manera, augmente el valor de l'opció.

TEMA 2

EXEMPLE 3: suposem el cas de la companyia XYZ. El 4 d'octubre de 20X0, l'opció de compra amb termini a l'abril amb un preu d'exercici de 49 $. L'acció està venent-se a un preu de 50 $. A l'opció, el 4 d'octubre, li faltaven 199 dies per expirar (data de maduració: 21 d'abril de 20X1). La taxa d'interès anual lliure de risc és del 7%.

La informació anterior determina tres variables:

1. El preu de l'acció, S, és de 50 $.
2. El preu d'execució, E, de 49 $.
3. La taxa sense risc, r_f, de 0,07.

D'altra banda, el termini de venciment, *t*, pot calcular-se ràpidament. La fórmula requereix que *t* s'expresse en anys.

4. Expressem l'interval de 199 dies en anys així: $t = 199/365$.
5. S'ha calculat la variància del títol i ens dóna 0,09 per any (9%).

Calcularem el valor de l'opció sobre l'acció de XYZ aplicant l'equació de Black i Scholes en tres passos:

Pas 1. Càlcul de d_1 i d_2: $d_1 = \left[\ln\left(S/E\right) + \left(r_f + \sigma^2/2\right)\cdot(T-t)\right]\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$

$$d_1 = \left[\ln\left(\frac{50}{49}\right) + \left(0.07+\frac{0.09}{2}\right)\cdot\frac{199}{365}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{0.09\cdot\left(\frac{199}{365}\right)}}$$

$$= \left[0.0202 + 0.0627\right]\cdot\frac{1}{0.2215} = 0.3742$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

$$= 0.3742 - \sqrt{0.09\cdot\left(\frac{199}{365}\right)} = 0.1527$$

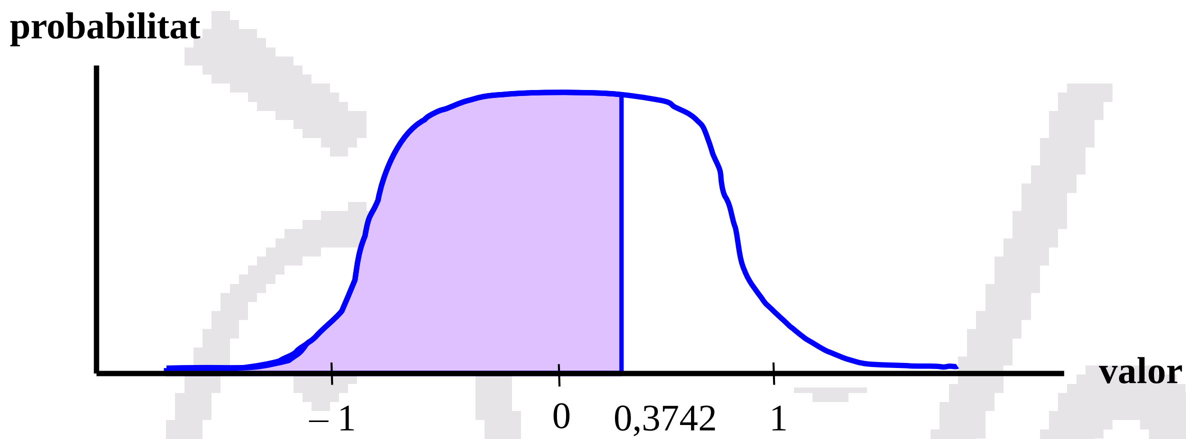
Pas 2. Càlcul de $N(d_1)$ i $N(d_2)$: en la figura 1 es mostra la distribució normal amb un valor esperat de 0 i amb una desviació estàndard igual a 1, la qual cosa rep el nom de *distribució normal estandarditzada*. La probabilitat que se situe per davall de 0 és de 50%, perquè la distribució normal és simètrica. Els estadígrafs diuen: N(0) = 50%. De la mateixa manera, tenim que:

$$N(d_1) = N(0{,}3742) = 0{,}6459$$

$$N(d_2) = N(0{,}1527) = 0{,}5607$$

TEMA 2

Figura 1. ***Gràfic de probabilitats acumulades***



N(0,3742)=0,6459, és a dir, la probabilitat acumulada de 0,3742 és de 0,6549.

El valor obtingut per $N(d_1)$ significa que hi ha una probabilitat de 64,59% que una observació realitzada a partir de la distribució normal estandarditzada se situe per davall de 0,3742. Amb $N(d_2)$ veiem que la probabilitat que es col·loque per davall de 0,1527 és de 56,07%. De manera més genèrica, N(d) representa la probabilitat que una observació realitzada a partir de la distribució normal estandarditzada se situe per davall de *d*. Observeu que en el nostre exemple d_1 i d_2 són lleugerament positives i, per tant, $N(d_1)$ i $N(d_2)$ són lleugerament majors de 0,50.

A partir de la taula 1 podem determinar-ne la probabilitat acumulada, per exemple si volem calcular N(0,37) del valor obtingut en la taula, li sumarem 0,50:

TEMA 2

$$N(0{,}37) = 0{,}50 + 0{,}1443 = 0{,}6443$$

$$N(-0{,}37) = 0{,}50 - 0{,}1443 = 0{,}3557$$

Tenint en compte que la nostra taula només permet buscar dades de dos dígits i volem buscar 0,3742, haurem d'interpolar. Atès que N(0,37) = 0,6443 i N(0,38) = 0,6480, la diferència entre els dos valors és de 0,0037. Ja que 0,3742 es troba a 43% del camí entre 0,37 i 0,38, interpolem linealment així:

$$N(0{,}3743) = 0{,}6443 + 0{,}43 \cdot 0{,}0037 = 0{,}6459$$

Pas 3. Càlcul de C: tindrem:

$$C = S \cdot N(d_1) - E \cdot e^{-r_f \cdot (T-t)} \cdot N(d_2)$$

$$= (50 \cdot 0.6459) - \left(49 \cdot e^{-0.07 \cdot \left(199/365\right)} \cdot 0.5607\right)$$

$$= (50 \cdot 0.6459) - (49 \cdot 0.9626 \cdot 0.5607)$$

$$= 32.295 - 26.447$$

$$= 5.85\ \$$$

Taula 1. ***Probabilitats acumulades de la distribució normal estàndard***

d	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0754
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2258	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2518	0.2549
0.7	0.2580	0.2612	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2996	0.3023	0.3051	0.3079	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4430	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4485	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4700	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4762	0.4767
2	0.4773	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4865	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4980	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4983	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

N(d) representa les àrees sota la funció de probabilitat normal estàndard. Suposem que d_1 = 0,24. El quadre implica una prob. acumulada de 0,5000 + 0,0948 = 0,5948. Si d_1 és igual a 0,2452, haurem d’estimar la prob. mitjançant una interpolació entre N(0,25) i N(0,24).