

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC



Fig. 23.00 Tipler 5a ed.

2.1 Introducció

2.2 Llei de Coulomb

2.3 Camp elèctric. Divergència i rotor del camp electrostàtic

2.4 Teorema de Gauss

2.5 El potencial electrostàtic

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor

PROPIETATS VECTORIALS DEL CAMP ELÈCTRIC:

DIVERGÈNCIA

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

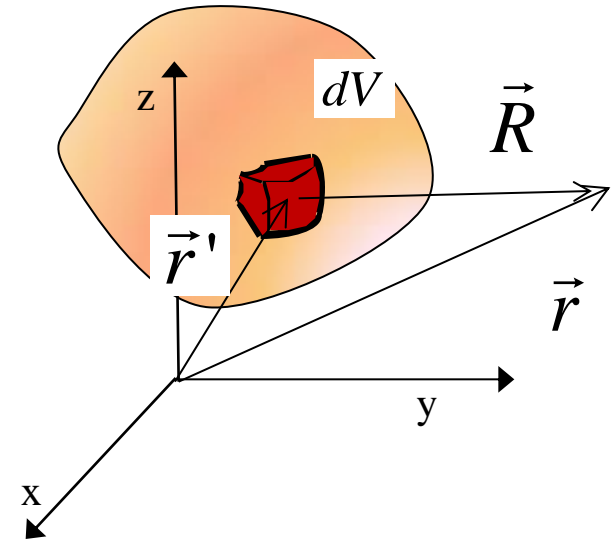
2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor

DIVERGÈNCIA

- Partim del camp creat per ρ :

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{R}}{R^3} \rho(\vec{r}') dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{R}}{R^3} \rho(\vec{r}') dV'\end{aligned}$$

Si $\rho = 0$ fora de V' , la integral es pot ampliar a tot l'espai.



- Si calculem la divergència de E , derivant respecte de r :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{R}}{R^3} \rho(\vec{r}') dV' \right)$$

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor

DIVERGÈNCIA

- Com que estem derivant respecte de r :

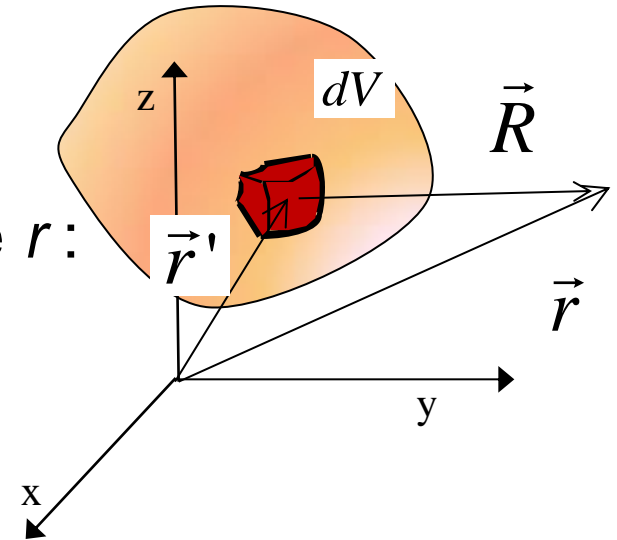
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \right) \rho(\vec{r}') dV'$$

- Recordant que:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \right) = 4\pi\delta(\vec{r})$$

- Obtenim:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} 4\pi\delta(\vec{r}) \rho(\vec{r}') dV' = \frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$



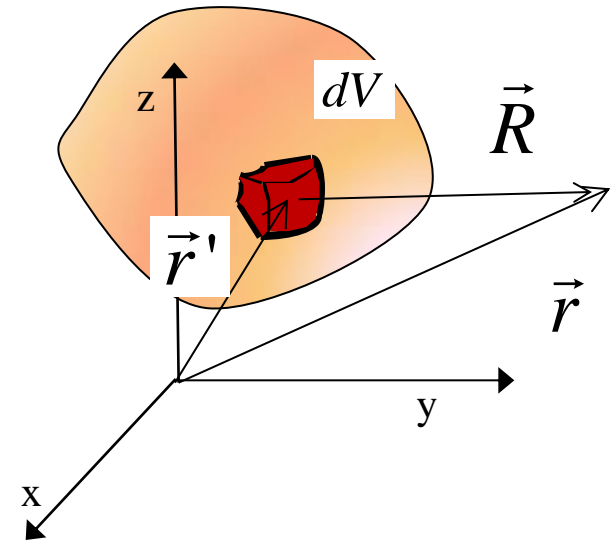
Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor

DIVERGÈNCIA

- ATENCIÓ: la densitat $\rho(r)$ és la funció que dóna la densitat de càrrega en tot l'espai, és a dir:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho(\vec{r}) \neq 0 & \vec{r} \in V' (\vec{r} = \vec{r}') \\ \rho(\vec{r}) = 0 & \vec{r} \notin V' (\vec{r} \neq \vec{r}') \end{array} \right.$$



- Per tant:
$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} & \vec{r} \in V' \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0 & \vec{r} \notin V' \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 1^a \text{ equació} \\ \text{diferencial del} \\ \text{camp electrostàtic} \end{array}$$

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor

PROPIETATS VECTORIALS DEL CAMP ELÈCTRIC:

ROTACIONAL

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

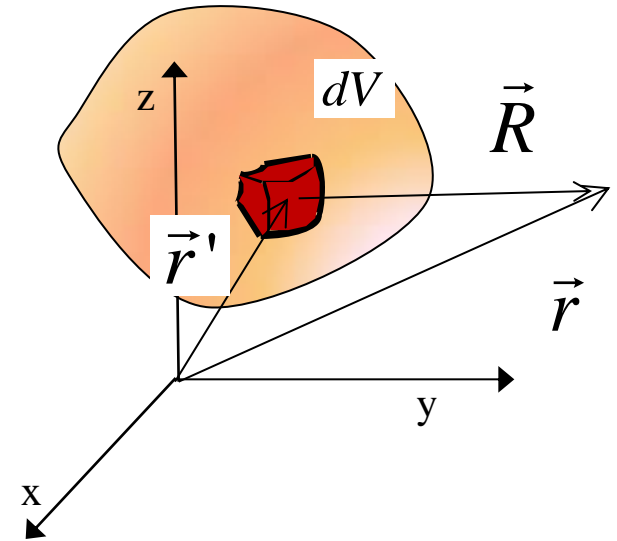
2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor

ROTACIONAL

- Partim del camp creat per ρ :

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{R}}{R^3} \rho(\vec{r}') dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{R}}{R^3} \rho(\vec{r}') dV'\end{aligned}$$

Si $\rho = 0$ fora de V' , la integral es pot ampliar a tot l'espai.



- Calculem el rotacional de E , derivant respecte de r :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{R}}{R^3} \rho(\vec{r}') dV' \right)$$

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor

ROTACIONAL

- Com que estem derivant respecte de r :

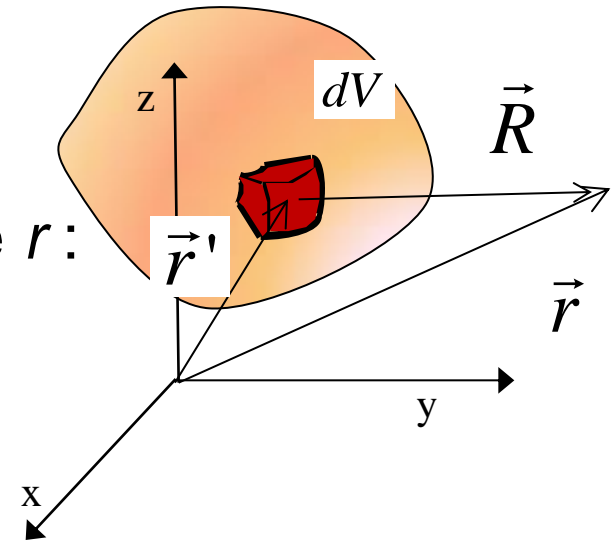
$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \right) \rho(\vec{r}') dV'$$

- Recordant que:

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \right) = 0$$

- Obtenim:

$$\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0$$



*2^a equació
diferencial del
camp electrostàtic*

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor

DIVERGÈNCIA I ROTACIONAL

- Per tant, hem obtingut la divergència i el rotacional de E :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (\text{fora de } V', \nabla \cdot E = 0 \text{ ja que } \rho(r) = 0) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (\text{en tot l'espai}) \end{array} \right.$$

- Quina informació física ens proporcionen?

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor

Informació que s'obté a partir de la divergència i rotacional

- Les 2 equacions que donen la divergència i el rotor contenen molta informació del camp electrostàtic.
- Estructura de les línies de força del camp:
 - Com que la divergència \neq zero: fonts ($+q$, ρ_+) i embornals ($-q$, ρ_-).
 - Com que el rotor és zero (irrotacional): mai no es tanquen.
 - **LES LÍNIES DE CAMP SEMPRE ENTREN/IXEN A/D'ALGUNA FONT; NO SÓN MAI TANCADAS.**

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor

Informació que s'obté a partir de la divergència i rotacional

- Les 2 equacions que donen la divergència i el rotor contenen molta informació del camp electrostàtic.
- Estructura en r :
 - Com que $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$, E té dependència amb r^{-2}
(si depenguera de r^{-1} , r^{-3} , r^{-4} , no seria així)
 - Com que el rotor és zero (irrotacional): camp conservatiu.
- LES 2 EQUACIONS CONTENEN TOTA LA INFORMACIÓ DE L'ELECTROSTÀTICA.

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor

Un **teorema** és una afirmació que pot ser demostrada dins d'un sistema formal matemàtic

DEL TEOREMA DE GAUSS (matemàtic)

A LA LLEI DE GAUSS (física)

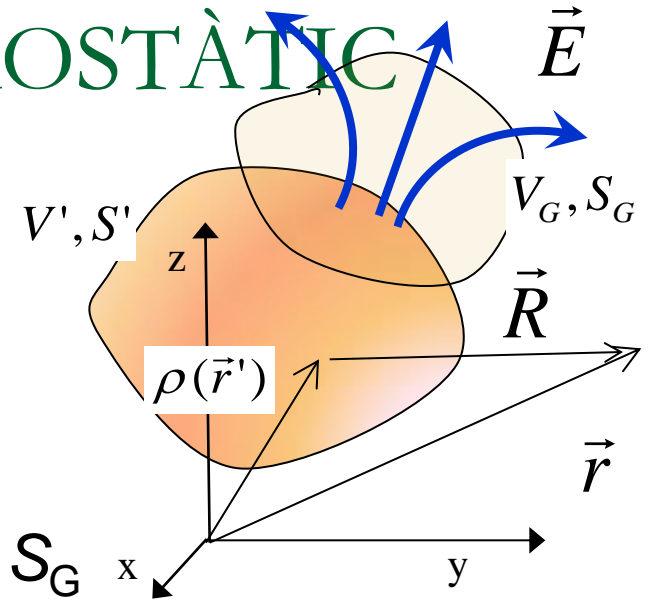
Una **lleï** és una proposició científica que descriu una relació experimental entre diferents variables

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.4. Teorema de Gauss

Cas general (superfície arbitrària)

- Suposem una densitat de càrrega que crea un camp elèctric \vec{E} .
- Suposem una superfície qualsevol S_G i el volum tancat al seu interior V_G .



- Flux del camp E a través de S_G ?: $\int_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = ?$
- Aplicant el teorema de la divergència:

$$\int_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{V_G} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \int_{V_G} \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V_G} \rho(\vec{r}) dV = \frac{q_{tancada}(S_G)}{\epsilon_0}$$

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.4. Teorema de Gauss

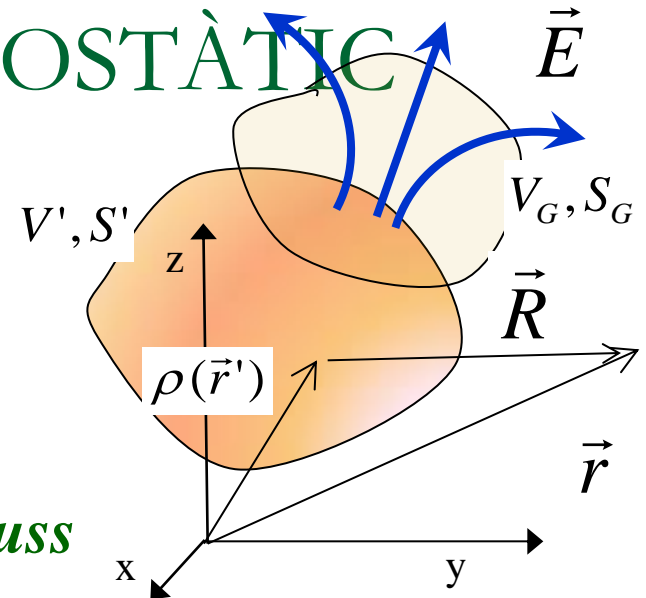
Cas general (superfície arbitrària)

- L'equació:

$$\int_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{tancada}}}{\epsilon_0}$$

Dins de S_G

Llei de Gauss



- La llei de Gauss sempre es pot aplicar, però no sempre la integral és fàcil d'obtenir.
- Quan la integral és fàcil de calcular, les dues principals aplicacions de la llei de Gauss són:
 - > Càlcul del flux del camp elèctric
 - > Càlcul dels components del camp elèctric

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.4. Teorema de Gauss

Càlcul del flux

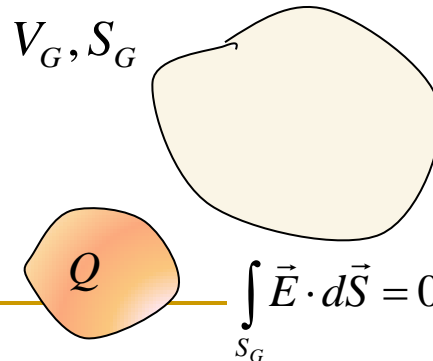
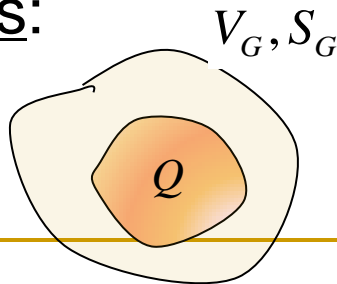
- Per a **calcular el flux** del camp elèctric través d'una superfície mitjançant la llei de Gauss:

$$\int_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{tancada}}}{\epsilon_0}$$

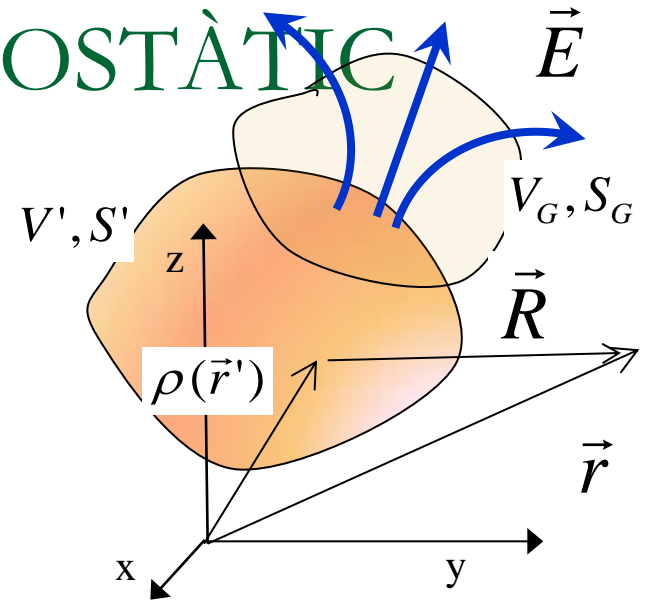
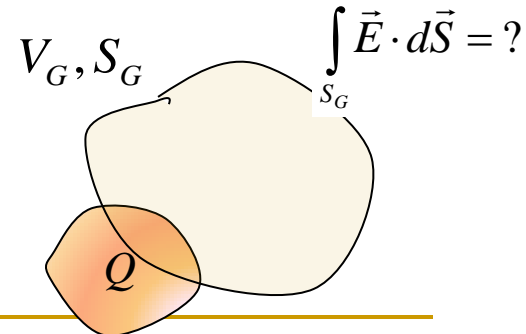
... només cal determinar la càrrega tancada dins de la superfície.

- Exemples:

$$\int_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q$$



$$\int_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$



Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.4. Teorema de Gauss

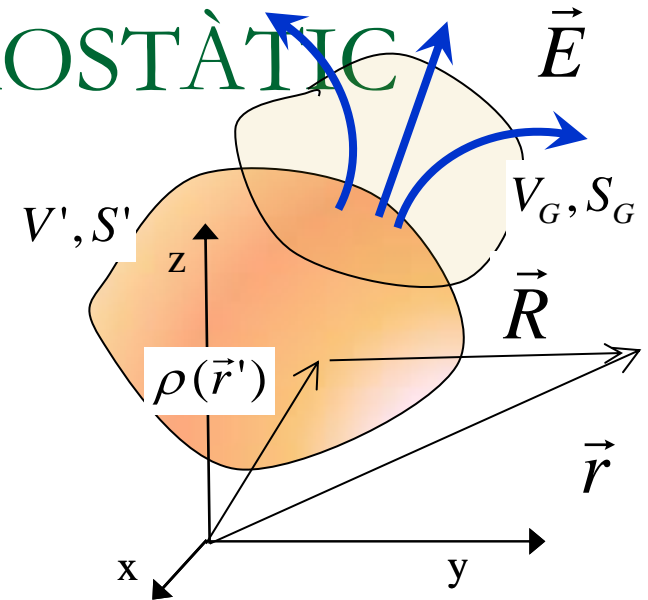
Càlcul del camp elèctric

- Per a **calcular el camp elèctric** mitjançant la llei de Gauss (és un mètode més senzill que per integració directa):

$$\int_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{tancada}}}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \int_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_{\text{component}} S_G$$

- En certes geometries algun dels components del camp elèctric és constant sobre la superfície de Gauss i pot eixir de la integral. Aleshores només cal calcular la q tancada:

$$E_{\text{component}} = \frac{1}{S_G} \frac{q_{\text{tancada}}}{\epsilon_0}$$



Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.4. Teorema de Gauss

GEOMETRIA ESFÈRICA

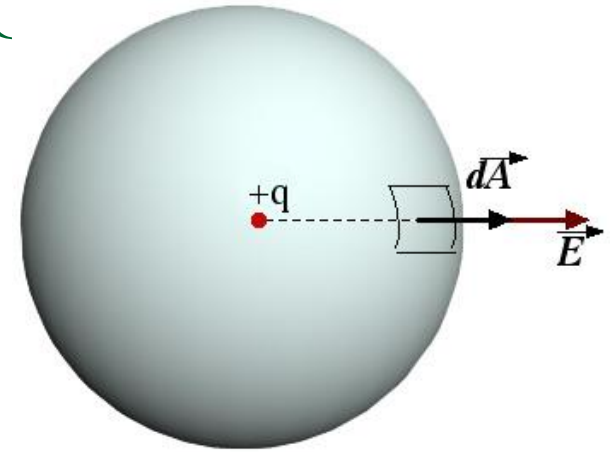
- Un camp vectorial té simetria esfèrica quan:
 - només té component radial;
 - aqueix component té simetria esfèrica:
 - només depèn de la distància a l'origen (radi)
 - no depèn de l'angle θ ni del φ .
- Per tant, el camp: $\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r + 0 \vec{u}_\varphi + 0 \vec{u}_\theta$
- Aleshores el camp és constant sobre esferes centrades en O.
- Per poder traure el component del camp, aleshores convé triar com a superfície de Gauss una esfera.

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.4. Teorema de Gauss

<http://www.goiit.com/posts/show/47351.htm>

GEOMETRIA ESFÈRICA



- El terme de l'esquerra:

$$\int_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_G} E_r \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = \int_{S_G} E_r \cdot dS = E_r \int_{S_G} dS = E_r S_G$$

- El terme de la dreta: $q_{\text{tancada}}/\epsilon_0$
- La llei de Gauss ens permet igualar ambdós termes:

$$E_r S_G = \frac{q_{\text{tancada}}}{\epsilon_0} \rightarrow E_r = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{q_{\text{tancada}}}{\epsilon_0}$$

$$S_G = 4\pi r^2$$

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.4. Teorema de Gauss

GEOMETRIA CILÍNDRICA

- Un camp vectorial té simetria cilíndrica quan els seus components tenen simetria cilíndrica.
- Un component té simetria cilíndrica si:
 - només depèn de la distància a l'eix Z (radi)
 - no depèn de z ni de l'angle ϕ (coord. cilíndriques)
- Per tant, el camp: $\vec{E} = E_\rho(\rho) \vec{u}_\rho + E_\phi(\rho) \vec{u}_\phi + E_z(\rho) \vec{u}_z$
- Aleshores el camp és constant sobre cilindres centrats en l'eix Z .
- Per a poder fer la integral, convé triar la superfície de Gauss com a un cilindre.

Tema 2: EL CAMP ELE

2.4. Teorema de Gauss

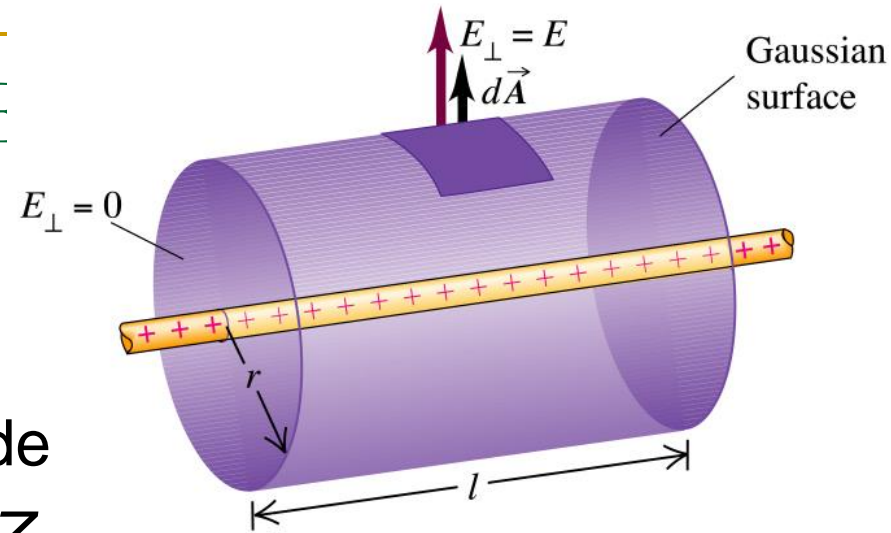
GEOMETRIA CILÍNDRICA

- La superfície de Gauss ha de ser un cilindre amb l'eix en Z
- El terme de l'esquerra:

$$\int_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{base1}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{lateral}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{base2}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

- En les bases el producte escalar és zero:

$$\int_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 + \int_{S_{lateral}} E_\rho \vec{u}_\rho \cdot dS \vec{u}_\rho + 0 = \int_{S_{lateral}} E_\rho \cdot dS = E_\rho \int_{S_{lateral}} dS = E_\rho S_{lateral}$$



http://www.physics.miami.edu/~zuo/class/spr_05/lecture%20supp.html

Tema 2: EL CAMP ELE

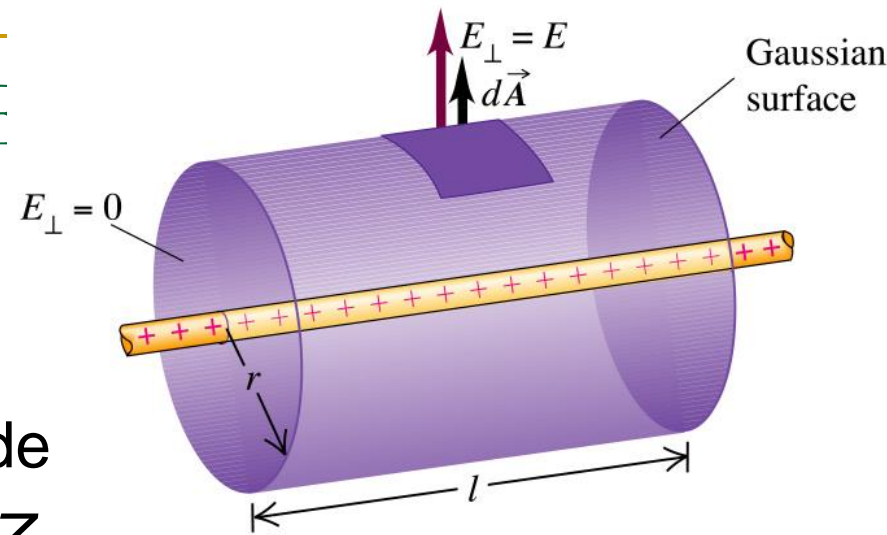
2.4. Teorema de Gauss

GEOMETRIA CILÍNDRICA

- La superfície de Gauss ha de ser un cilindre amb l'eix en Z
- El terme de la dreta: $q_{\text{tancada}}/\epsilon_0$
- La llei de Gauss ens permet igual& ambdós termes:

$$E_{\rho} S_{\text{lateral}} = \frac{q_{\text{tancada}}}{\epsilon_0} \rightarrow E_{\rho} = \frac{1}{2\pi \rho L} \frac{q_{\text{tancada}}}{\epsilon_0}$$

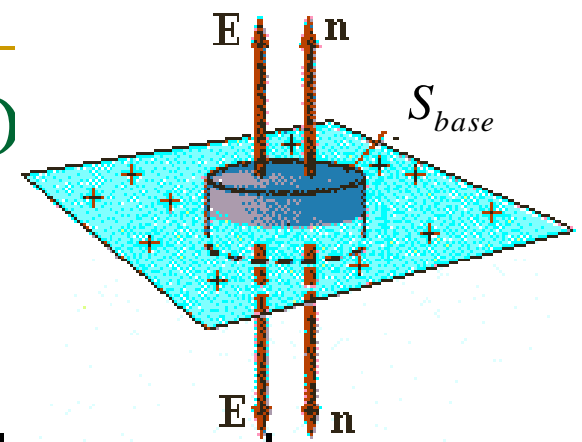
$$S_{\text{lateral}} = 2\pi \rho L$$



http://www.physics.miami.edu/~zuo/class/spr_05/lecture%20supp.html

Tema 2: EL CAMP ELECTRO

2.4. Teorema de Gauss



GEOMETRIA PLANA

- Quan el camp elèctric és perpendicular a un pla.
- Camp vectorial amb simetria plana:
 - té direcció rectilínia, que fem coincidir amb algun eix (típicament Z);
 - el pla és paral·lel a les altres direccions (pla X - Y);
 - no depèn de (x, y) però pot dependre de z .
- La superfície de Gauss pot ser un cilindre amb l'eix en Z (també podria ser un cub).
- El terme de l'esquerra:

$$\int_{S_V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{base1}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{lateral}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_{base2}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

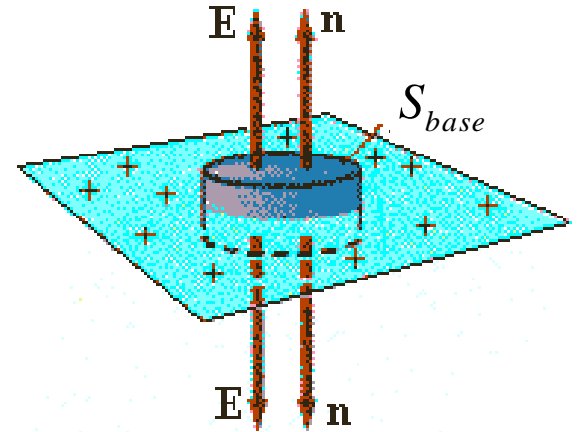
Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.4. Teorema de Gauss

http://www.physics.miami.edu/~zuo/class/spr_05/lecture%20supp.html

GEOMETRIA PLANA

- En la superfície lateral el producte escalar és zero i en les bases els vectors superfície tenen direcció oposada, però el mateix mòdul:



$$\begin{aligned}\int_{S_V} \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \int_{S_{base1}} E_z \vec{n} \cdot dS \vec{n} + 0 + \int_{S_{base2}} E_z \vec{n} \cdot dS \vec{n} = \int_{S_{base1}} E_z \cdot dS \pm \int_{S_{base2}} E_z \cdot dS = \\ &= (E_z(z_1) \pm E_z(z_2)) \int_{S_{base}} dS = (E_z(z_1) \pm E_z(z_2)) S_{base}\end{aligned}$$

- El terme de la dreta: $q_{tancada}/\epsilon_0$

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.4. Teorema de Gauss

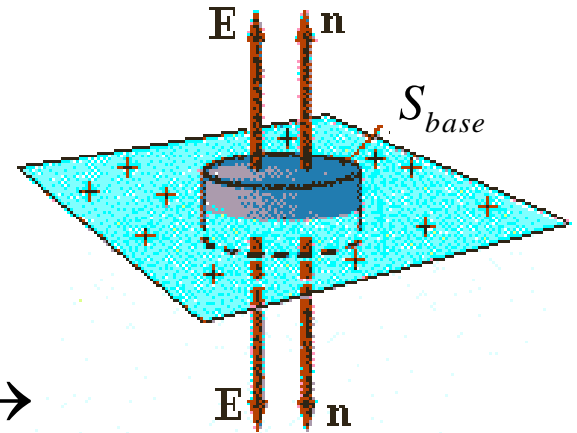
http://www.physics.miami.edu/~zuo/class/spr_05/lecture%20supp.html

GEOMETRIA PLANA

- La llei de Gauss ens permet igual& ambdós termes:

$$(E_z(z_1) \pm E_z(z_2)) S_{base} = \frac{q_{tancada}}{\epsilon_0} \rightarrow$$

$$S_{base} = \pi r^2 \rightarrow (E_z(z_1) \pm E_z(z_2)) = \frac{1}{\pi r^2} \frac{q_{tancada}}{\epsilon_0}$$



- Els signes depenen del sentit del camp en cada un dels costats del pla (paral·lel o antiparal·lel al vector **n**.)

Tema 2: EL CAMP ELECTROSTÀTIC

2.3. Camp elèctric. Divergència i rotor

Exemples

- Fil infinit amb una densitat de càrrega λ .
- Vegeu document sobre **ESTRATÈGIES DE CÀLCUL**.