

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL ONES ELECTROMAGNÈTIQUES

- 8.1. Introducció
- 8.2. Generalització del teorema d'Ampère: corrent de desplaçament
- 8.3. Equacions de Maxwell en el buit
- 8.4. Equació d'ones
- 8.5. Ones electromagnètiques planes

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.4. Equació d'ones

OBTENCIÓ DE L'EQUACIÓ D'ONES

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.4. Equació d'ones

Obtenció de l'equació d'ones

- En una regió de l'espai sense càrregues ni corrents ($\rho = 0$; $\vec{J} = 0$), les equacions de Maxwell són:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- Constitueixen un conjunt d'equacions diferencials de primer ordre acoblades.
- Poden desacoblar-se si calculem el rotor del rotor.

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.4. Equació d'ones

Obtenció de l'equació d'ones

■ Per a E :
$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

■ Per a B :
$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.4. Equació d'ones

Obtenció de l'equació d'ones

- Com que: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

- Obtenim: $\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

- Hem desacoblat les equacions, però el preu 'pagat' és que ara són de segon ordre.
- Aqueixes equacions de segon ordre són equacions d'ones.

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.4. Equació d'ones

VELOCITAT DE LES ONES ELECTROMAGNÈTIQUES

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.4. Equació d'ones

Obtenció de l'equació d'ones: velocitat de l'ona

- Si recordem les equacions diferencials que descriuen una ona escalar, en una i en tres dimensions:

$$f(z) \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \qquad f(\vec{r}) \rightarrow \nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Funció
escalar

- Podem veure que cada component dels camps E i B compleix una equació d'ones tridimensional (cartesianes):

$$\nabla^2 E_{x,y,z} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_{x,y,z}}{\partial t^2} \qquad \nabla^2 B_{x,y,z} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_{x,y,z}}{\partial t^2}$$

- Per comparació, deduïm que la velocitat de l'ona de E i B :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.4. Equació d'ones

Obtenció de l'equació d'ones: velocitat de l'ona

- Els valors de $\mu_0\epsilon_0$ ja eren coneguts; per tant, Maxwell va trobar que la velocitat de les ones electromagnètiques és:

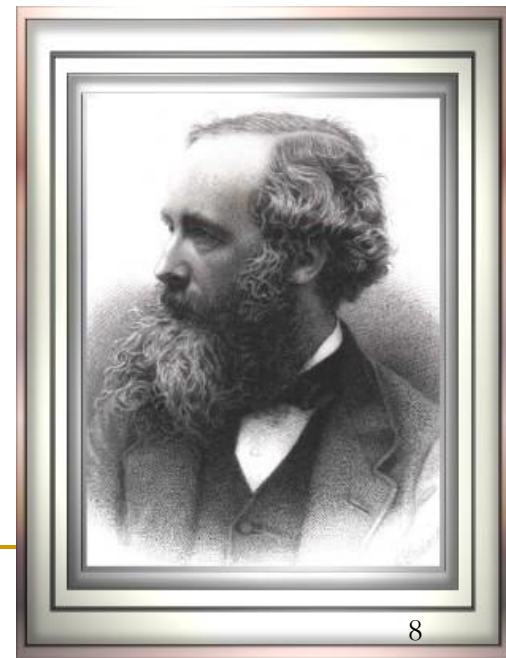
$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.99796 \times 10^8 \text{ m/s} \cong 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

- La velocitat de la llum és (exactament):

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$$

- Aquest resultat demostrava que la llum era una ona electromagnètica $v = c$

http://www.clerkmaxwellfoundation.org/html/who_was_maxwell-.html



Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.4. Equació d'ones

Obtenció de l'equació d'ones

- Cal assenyalar que els valors de $\mu_0\epsilon_0$ es determinen a partir d'experiments elèctrics i magnètics.
- Abans de Maxwell existia llum, electricitat i magnetisme.
- Els treballs d'Oersted, Ampère i Faraday van lligar l'electricitat i el magnetisme.
- Finalment, Maxwell va UNIFICAR els tres fenòmens.
- Ací es veu el paper fonamental del terme introduït per Maxwell ($\mu_0\epsilon_0 \partial E / \partial t$) sense el qual no s'obtindria l'equació d'ones.

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.4. Equació d'ones

Obtenció de l'equació d'ones

- Maxwell deia que “les úniques pertorbacions (elèctriques i magnètiques) que es poden propagar així són transversals a la direcció de propagació i amb una velocitat de propagació que és igual a la velocitat de la llum en el medi (èter)”.
- Hertz va demostrar l'existència d'ones electromagnètiques generant-les (a baixa freqüència) i fent experiències de transmissió, interferència, difracció...
- La identificació de la llum com a fenomen electromagnètic és un dels fets científics més importants del segle XIX.
- El desenvolupament actual (radio, televisió, telefonia, fibra òptica...) és conseqüència d'aquest pas.

Tema 8: EQUACIONES DE MAXWELL

8.4. Equació d'ones

Obres de Maxwell en la web

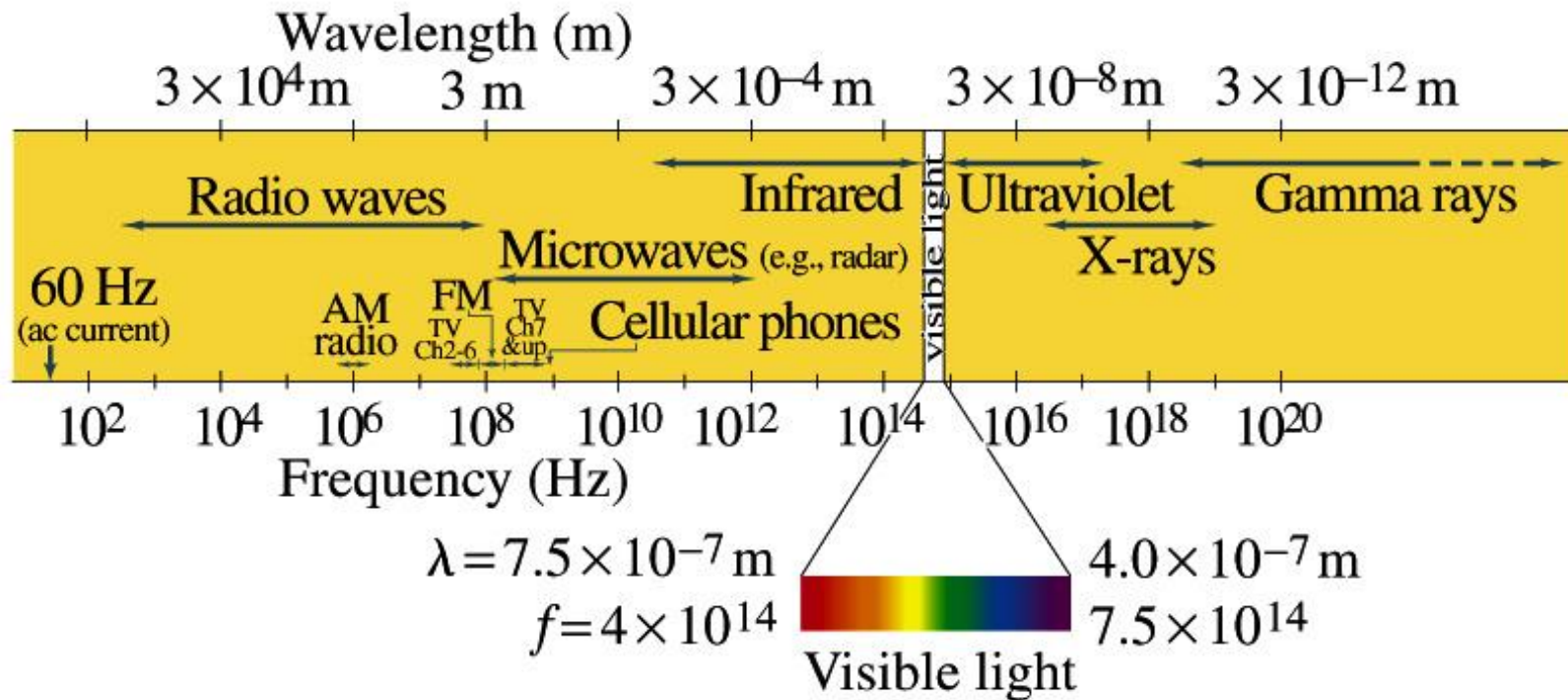
- CLERK MAXWELL FOUNDATION
<http://www.clerkmaxwellfoundation.org/>
- *On Physical Lines of Force* (1861)
[http://en.wikisource.org/wiki/On_Physical_Lines_of_Force#Part I: The Theory of Molecular Vortices applied to Magnetic Phenomena](http://en.wikisource.org/wiki/On_Physical_Lines_of_Force#Part_I:_The_Theory_of_Molecular_Vortices_applied_to_Magnetic_Phenomena)
- Facsímil de: *A treatise on Electricity and Magnetism* (1873)
[http://en.wikisource.org/wiki/Index:A Treatise on Electricity and Magnetism - Volume 1.djvu](http://en.wikisource.org/wiki/Index:A_Treatise_on_Electricity_and_Magnetism_-_Volume_1.djvu)

Tema 8: EQUACIONES DE MAXWELL

8.4. Equació d'ones

Espectre electromagnètic

$$v = \frac{\lambda}{T} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$



<http://physics.unl.edu/~cbinek/index.htm>

Tema 8: EQUACIONES DE MAXWELL

8.4. Equació d'ones

ONES PLANES

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.5. Ones electromagnètiques planes

Ones monocromàtiques, ones planes

- Qualsevol ona pot expressar-se com una combinació d'ones sinusoidals, cadascuna de les quals amb una única freqüència (monocromàtiques).
- És per aquesta raó que es fa l'estudi d'ones amb una única freqüència.
- L'expressió d'una ona monocromàtica amb freqüència ω i vector d'ones \vec{k} , en un punt de posició \vec{r} , en notació complexa, és:

$$f = A e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

- L'ona sinusoidal se suposa representada per la part real:

$$A e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + j A \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad \underline{f = \operatorname{Re}(A e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)})}$$

Tema 8: EQUACIONES DE MAXWELL

8.5. Ones electromagnètiques planes

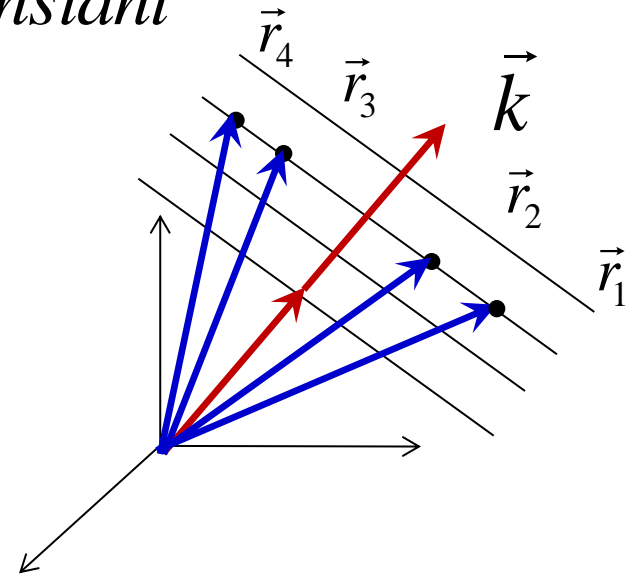
Ones monocromàtiques, ones planes

- En ones tridimensionals els fronts d'ona són superfícies definides per punts que, en un instant donat, estan en el mateix estat d'oscil·lació, és a dir, amb la mateixa fase.

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \text{constant} \quad \rightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{r} = \text{constant}$$

- Les ones planes es caracteritzen per tenir un front d'ona pla.

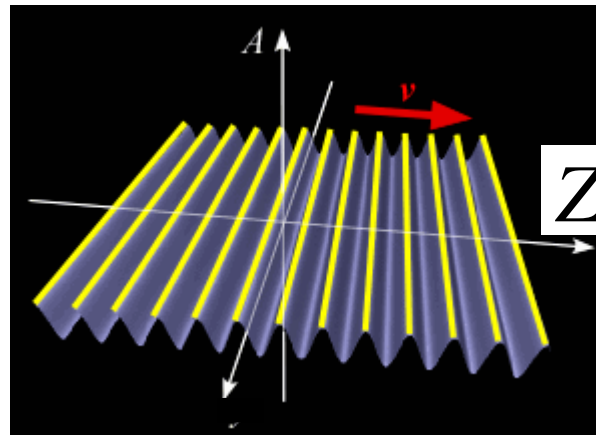
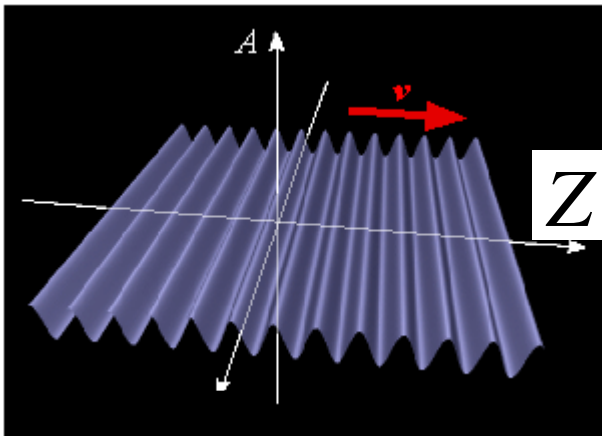
– si k és el vector de propagació, la condició: $\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{constant}$ (mateixa projecció de r sobre k) defineix aqueixos plans).



Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

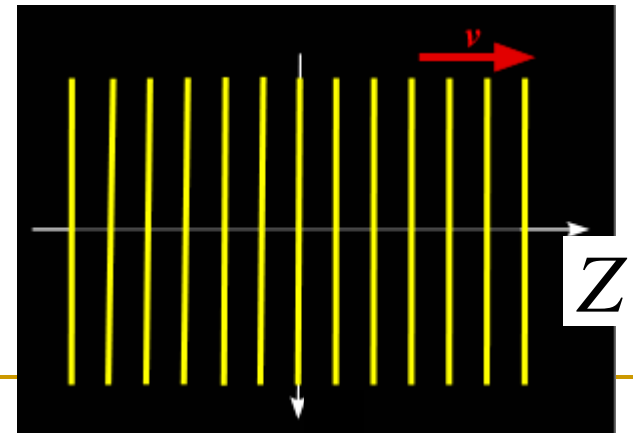
8.5. Ones electromagnètiques planes

Ones monocromàtiques, ones planes: REPRESENTACIÓ



- Una ona plana i la seua representació

<http://www.rpi.edu/dept/phys/ScIT/InformationTransfer/waves/waves.html>



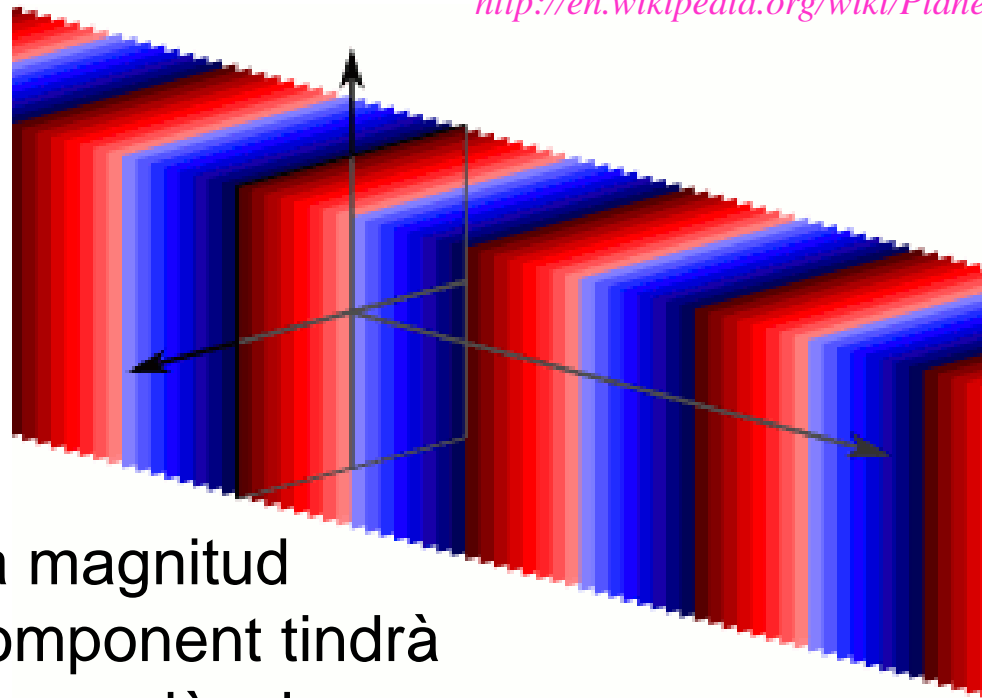
Tema 8: EQUACIONES DE MAXWELL

8.5. Ones electromagnètiques planes

Ones monocromàtiques, ones planes: REPRESENTACIÓ

http://en.wikipedia.org/wiki/Plane_wave

- Animació d'una ona plana en 3D
- Si es tracta d'una magnitud vectorial, cada component tindrà aqueix tipus de dependència:



$$A_x = A_{0x} e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}; \quad A_y = A_{0y} e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}; \quad A_z = A_{0z} e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Tema 8: EQUACIONES DE MAXWELL

8.5. Ones electromagnètiques planes

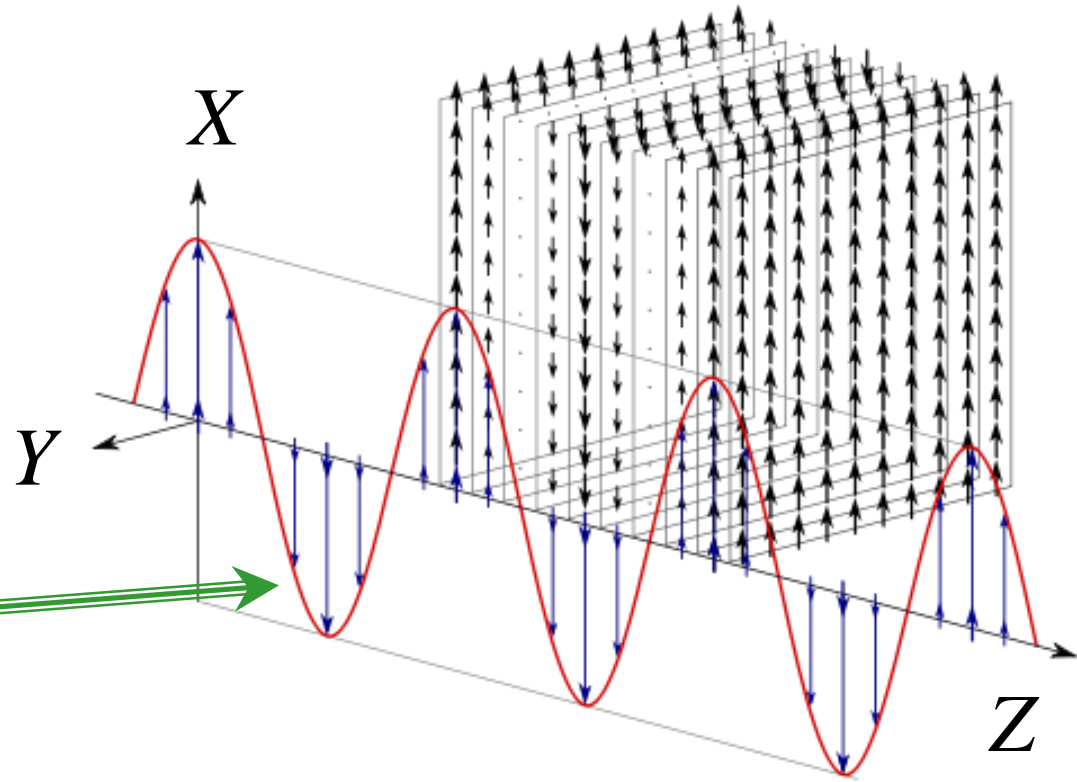
Ones monocromàtiques

- Una ona vectorial plana sinusoidal en 3D

$$A_x = A_{0x} e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)},$$

$$A_y = A_{0y} e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)};$$

$$A_z = A_{0z} e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$



http://en.wikipedia.org/wiki/Plane_wave

Tema 8: EQUACIONES DE MAXWELL

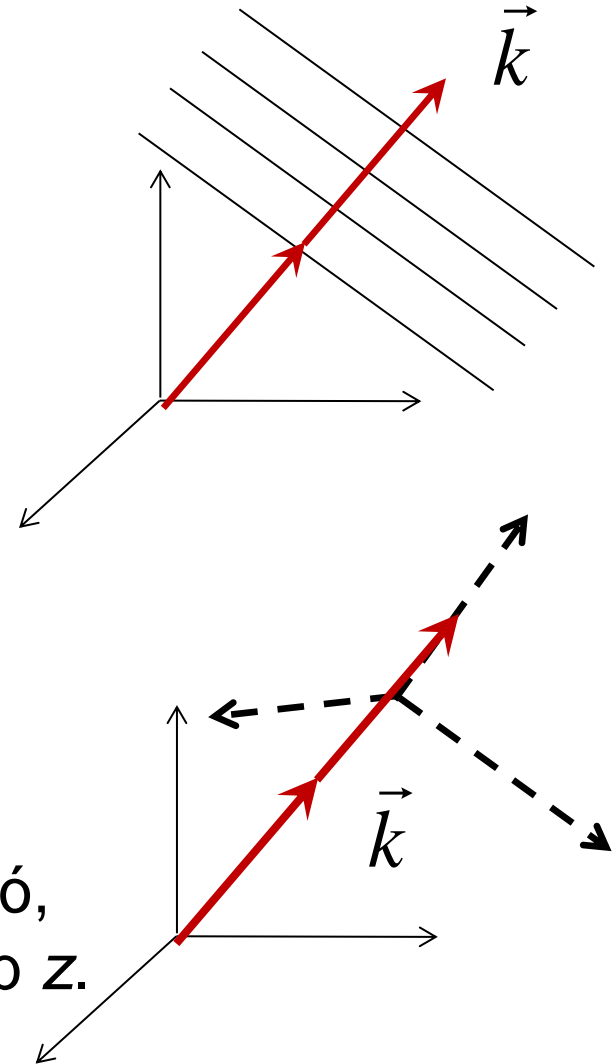
8.5. Ones electromagnètiques planes

Ones monocromàtiques, ones planes

- En les ones planes, podem definir els eixos de tal manera que la direcció de propagació coincidisca amb la direcció z :

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_z \cdot z = cte$$

- Com que les ones planes varien només en la direcció de propagació, en aquest cas variaran només amb z .



Tema 8: EQUACIONES DE MAXWELL

8.5. Ones electromagnétiques planes

ONES ELECTROMAGNÉTIQUES PLANES

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.5. Ones electromagnètiques planes

Equació d'una ona electromagnètica plana

- Les equacions d'ona per als camps fora de les fonts i en el buit són:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \cong 3 \times 10^8 \text{ m/s} = c$$

- Les equacions d'ona tenen moltes solucions, depenent de les característiques del medi de propagació i si es tracta de propagació oberta o guiada.
- La solució més senzilla s'obté quan considerem ones planes en el buit i en un medi obert (infinit). No obstant això, cal fer alguna consideració addicional.

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.5. Ones electromagnètiques planes

Equació d'una ona electromagnètica plana

- MENTRE que... tota solució de les equacions de Maxwell (en el buit) ha de complir l'equació d'ones...
- ... el contrari no és cert: no totes les ones compleixen les equacions de Maxwell.
- Les equacions de Maxwell imposen unes condicions que no totes les ones poden complir. Veurem les condicions imposades a les ones electromagnètiques per:
 - la divergència (igual a zero),
 - el rotacional (relació entre components creuats).

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.5. Ones electromagnètiques planes

Equació d'una ona electromagnètica plana

- Suposant que la direcció de propagació és la direcció z, expressarem la solució dels camps en ones planes com:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 e^{j(k_z \cdot z - \omega t)} = (E_{0x} \vec{u}_x + E_{0y} \vec{u}_y + E_{0z} \vec{u}_z) e^{j(k_z \cdot z - \omega t)} \\ &= E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y + E_z \vec{u}_z\end{aligned}$$

- Els components no poden ser qualsevol. Apliquem les equacions de Maxwell per trobar les relacions entre aquests.

$$\begin{array}{lll}(\rho = 0; \vec{J} = 0) & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{array}$$

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.5. Ones electromagnètiques planes

Equació d'una ona electromagnètica plana: *cond. divergència*

- Com que només hi ha variació amb z , la divergència la podem expressar com:

$$\left(\vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \vec{E} = 0 \qquad \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\left(\vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \vec{B} = 0 \qquad \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

Concloem que el component dels camps (E_z , B_z) en la direcció de propagació (z) no depèn d'aqueixa variable:

$$E_z \neq E_z(z)$$

$$B_z \neq B_z(z)$$

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.5. Ones electromagnètiques planes

Equació d'una ona electromagnètica plana: *cond. rotacional*

- En el rotacional, considerem també que només hi ha dependència amb z :

$$\left(\vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \left(\vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- Multiplicant escalarment per u_z aquestes equacions:

$$\vec{u}_z \cdot \left(\vec{u}_z \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \right) = - \vec{u}_z \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{u}_z \cdot \left(\vec{u}_z \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \right) = \mu_0 \epsilon_0 \vec{u}_z \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- Concloem que el component dels camps en la direcció de propagació (z) no depèn del temps: $E_z \neq E_z(t)$

$$B_z \neq B_z(t)$$

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.5. Ones electromagnètiques planes

Equació d'una ona electromagnètica plana: *transversalitat*

- Si el component dels camps en la direcció de propagació (z) no depèn ni de l'espai (z) ni del temps (t), ha de ser constant: $E_z = \text{constant}; \quad B_z = \text{constant}$
- Com que són constants, no són magnituds que es propaguen i no s'inclouen en la solució de l'equació d'ones. Per tant: $E_z = 0$
 $B_z = 0$
- És a dir, les ones electromagnètiques són ONES TRANSVERSALS a la direcció de propagació.
- Si z és la direcció de propagació, el camps E i B només tindran components x i y .

$$\vec{E} = (E_{0x}\vec{u}_x + E_{0y}\vec{u}_y)e^{j(k_z \cdot z - \omega t)} \quad \text{---} \quad \vec{B} = (B_{0x}\vec{u}_x + B_{0y}\vec{u}_y)e^{j(k_z \cdot z - \omega t)}$$

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.5. Ones electromagnètiques planes

Equació d'una ona electromagnètica plana: *cond. rotacional*

- En el rotacional, considerarem que la derivada respecte de z és k_z . Per al rotacional del camp elèctric:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} -k_z E_{0y} &= \omega B_{0x} \\ k_z E_{0x} &= \omega B_{0y} \end{aligned}$$

- De forma compacta s'expressa com: $\vec{B}_0 = \frac{k_z}{\omega} (\vec{u}_z \times \vec{E}_0)$
- És a dir, els vectors E i B estan en fase, són mútuament perpendiculars i la relació entre les seues amplituds (reals) és:

$$B_0 = \frac{k_z}{\omega} E_0 = \frac{1}{c} E_0$$

Tema 8: EQUACIONES DE MAX

8.5. Ones electromagnètiques planes

Ones electromagnètiques planes

- Si, p. ex., E es troba en l'eix X , aleshores B es troba en l'eix Y .

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}_x e^{j(k_z \cdot z - \omega t)}$$

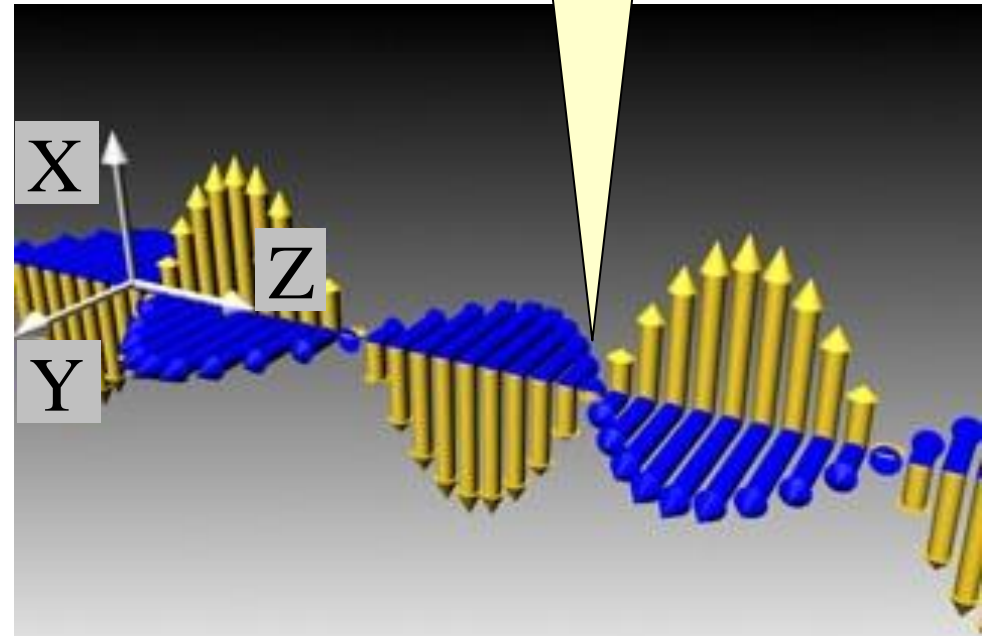
$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \vec{u}_y e^{j(k_z \cdot z - \omega t)}$$

- Les expressions reals:

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}_x \cos(k_z \cdot z - \omega t)$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \vec{u}_y \cos(k_z \cdot z - \omega t)$$

*E i B estan en fase
(coincideixen els màxims,
els mínims...)*

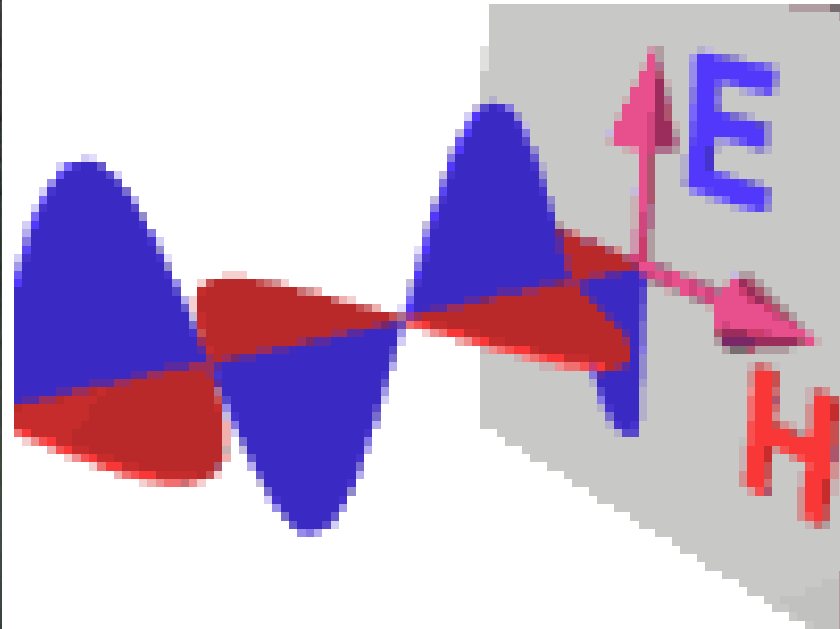
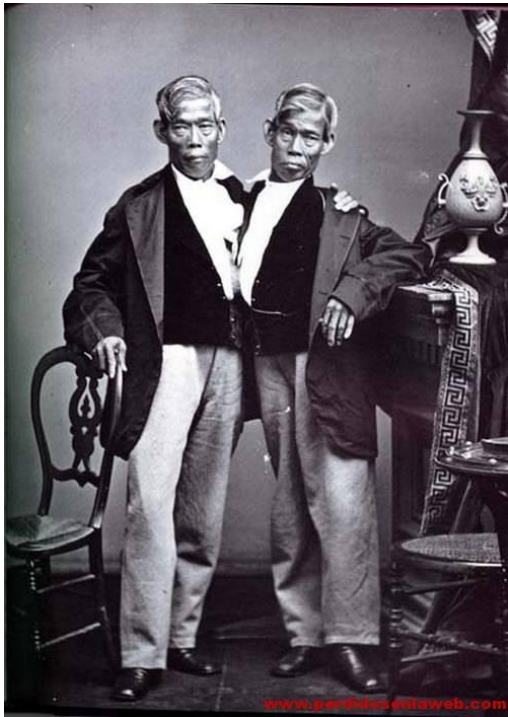


Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.5. Ones electromagnètiques planes

Ones electromagnètiques planes

- Els camps elèctric i magnètic en una ona guarden entre ells una relació concreta que es manté.



Tema 8: EQUACIONES DE MAXWELL

8.5. Ones electromagnètiques planes

Ones electromagnètiques planes

- Podem generalitzar, considerant k la direcció de propagació:

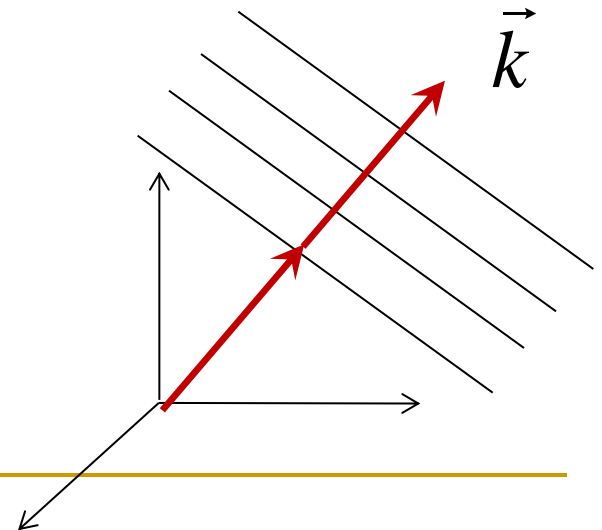
$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B}_0 = \frac{k_z}{\omega} (\vec{u}_z \times \vec{E}_0) \rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega} e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

- Les expressions reals:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

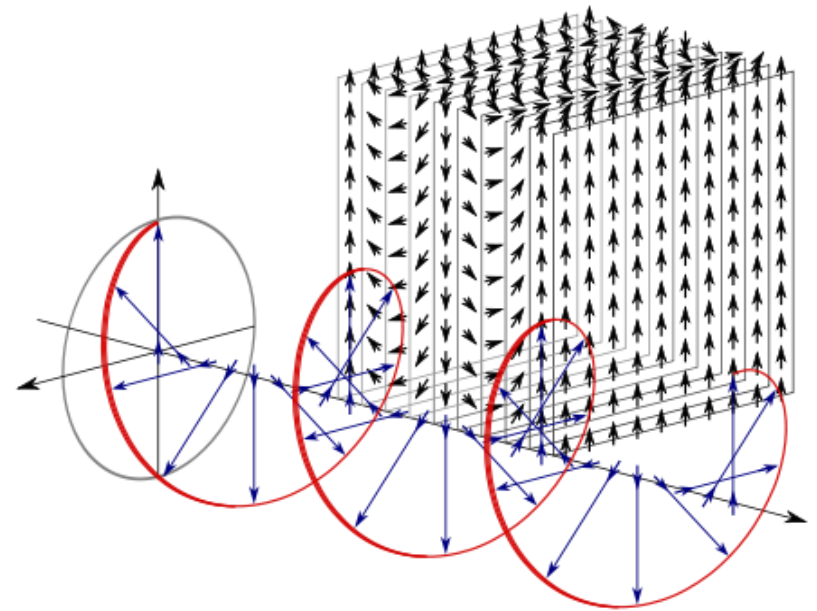
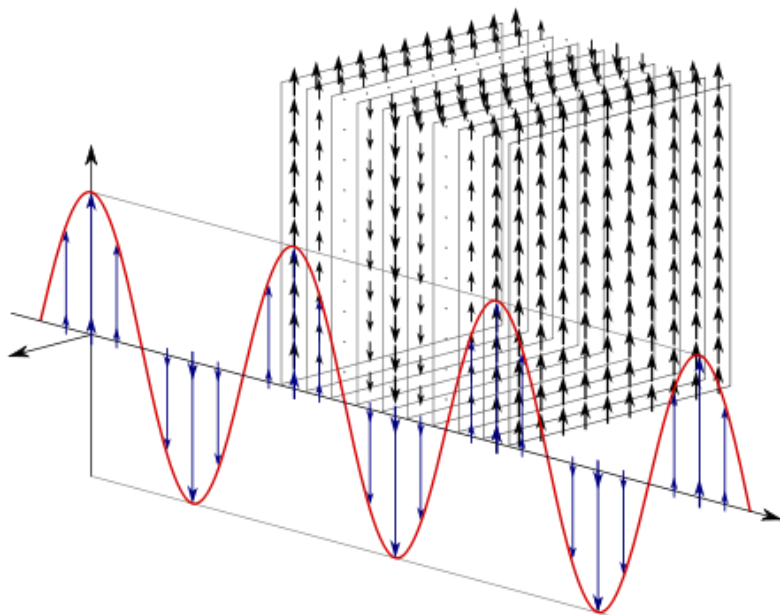


Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.5. Ones electromagnètiques planes

Ones electromagnètiques planes

- Ona polaritzada linealment: quan la direcció d'oscil·lació és constant.



- Ona polaritzada circularment: quan la direcció d'oscil·lació descriu cercles.

http://en.wikipedia.org/wiki/Plane_wave