Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL ELECTROSTÀTIC

4.1. Introducció. Conductors en electrostàtica
4.2. Teoremes d'unicitat
4.3. Solució formal aplicant el teorema de Green
4.4. El mètode de les imatges
4.5. El mètode de separació de variables (coordenades esfèriques)

Universitat de València OpenCourseWare

M. Carmen Martínez Tomás

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

COORDENADES ESFÈRIQUES

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Funció potencial

Factorització en *coordenades* ***esfèriques*** de l'eq. Laplace

- L'equació de Laplace en c. esfèriques s'expressa com:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)=0$$

- En aquest cas es factoritza la funció ϕ en la forma:

$$\phi(r,\varphi,z)=\frac{R(r)}{r}\Phi(\varphi)\Theta(\theta)$$

- L'equació, ja en derivades totals:

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Factorització en *coordenades* ***esfèriques*** de l'eq. Laplace

- L'equació, ja en derivades totals:

$$\frac{\Phi\Theta}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\frac{R}{r}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{R\Theta}{r}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{R\Phi}{r}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)=0$$

- Multiplicant per $\sin^2\theta$:

$$\Phi\Theta\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\frac{R}{r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{R\Theta}{r}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{R\Phi}{r}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)=0$$

- Multiplicant per: $\dfrac{r^3}{R\Phi\Theta}$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Factorització en *coordenades* ***esfèriques*** de l'eq. Laplace

- L'equació s'expressa com:

$$r\sin^2\theta \frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr}\frac{R}{r}\right) + \underbrace{\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}}_{-m^2} + \frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta}\right) = 0$$

- La solució per a φ serà:

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -m^2$$

$$\Phi(\varphi) = a_1 e^{-jm\varphi} + a_2 e^{jm\varphi} \quad = A_1 \cos m\varphi + A_2 \sin m\varphi$$

4.5. Mètode de separació de variables

Factorització en *coordenades **esfèriques*** de l'eq. Laplace

- Substituint:

$$r\sin^2\theta \frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\frac{R}{r}\right)+\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-m^2=0$$

- Dividint per $\sin^2\theta$:

$$\underbrace{\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\frac{R}{r}\right)}_{\alpha}+\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}=0$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Factorització en *coordenades **esfèriques*** de l'eq. Laplace

- La part que depèn de *r*:

$$\frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}=\alpha \qquad \frac{d^2R}{dr^2}-\alpha\frac{R}{r^2}=0$$

- La part que depèn de θ:

$$\alpha+\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}=0$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Factorització en *coordenades* ***esfèriques*** de l'eq. Laplace

- Fent el canvi de variable per $\mu = \cos\theta$ i derivant, s'arriba a l'equació generalitzada de Legendre:

$$\frac{d}{d\mu}\left(\left(1-\mu^2\right)\frac{d\Theta}{d\mu}\right)+\left(\alpha-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right)\Theta=0$$

- Que té solució si: $\alpha = l(l+1)$
- Per tant:

$$\frac{d}{d\mu}\left(\left(1-\mu^2\right)\frac{d\Theta}{d\mu}\right)+\left(l(l+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right)\Theta=0$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Pol. Legendre 1a espècie&

Pol. Legendre 2a espècie&

Factorització en *coordenades* ***esfèriques*** de l'eq. Laplace

- La solució general és: $\Theta(\mu) = B_1 P_l^m(\mu) + B_2 Q_l^m(\mu)$

  $\mu = \cos\theta$

- En molts problemes convé ajuntar la dependència angular en φ i θ en els harmònics esfèrics:

$$Y_{lm}(\varphi,\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\, e^{jm\varphi} P_l^m(\cos\theta)$$

on les funcions associades de Legendre vénen donades per:

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Factorització en *coordenades **esfèriques*** de l'eq. Laplace

- Finalment, la solució radial:

$$\frac{d^2R}{dr^2}-\alpha\frac{R}{r^2}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2R}{dr^2}-l(l+1)\frac{R}{r^2}=0$$

- Amb solució: $R(r)=A_l r^{l+1}+B_l r^{-l}$

- Per tant, la solució més general serà:

$$\phi(r,\varphi,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left(A_{lm}r^{l}+B_{lm}r^{-(l+1)}\right)Y_{lm}(\varphi,\theta)$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

CASOS PARTICULARS

Factorització en *coordenades* ***esfèriques*** de l'eq. Laplace

- Cas **amb simetria azimutal** (independència amb φ):
- Aleshores $m = 0$ i els harmònics esfèrics es redueixen als polinomis de Legendre:

$$Y_{lm}(\varphi,\theta)\Big|_{m=0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l)!}{(l)!}}\cdot 1\cdot P_l^0(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\; P_l(\cos\theta)$$

- Essent:

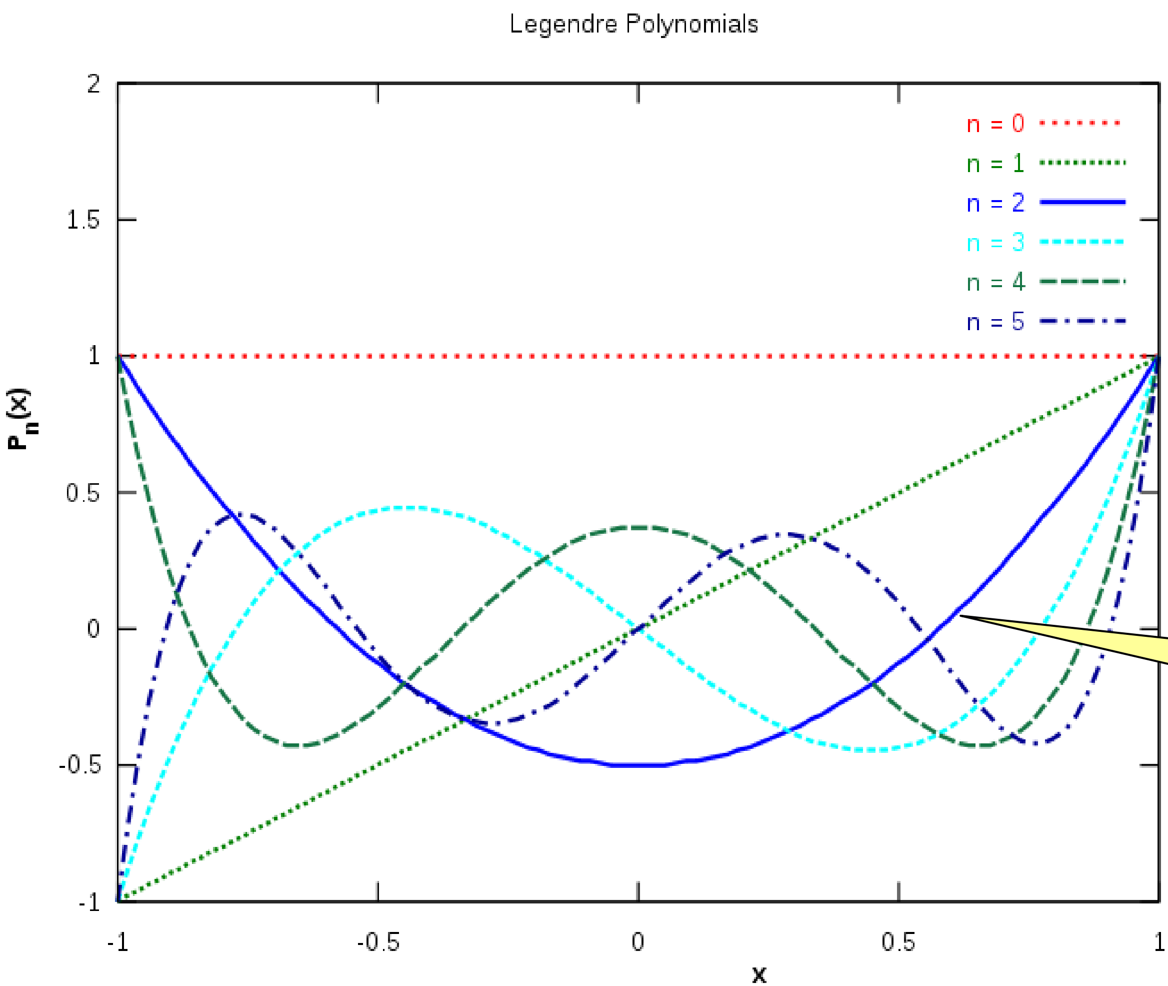
$$P_l(\cos\theta) = P_l^0(\cos\theta)$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

$x = \cos\theta$

Polinomis de Legendre



- Característiques:

$-1 < x < +1$

$-1 < P_n(x) < +1$

Ordre parell: funció parella

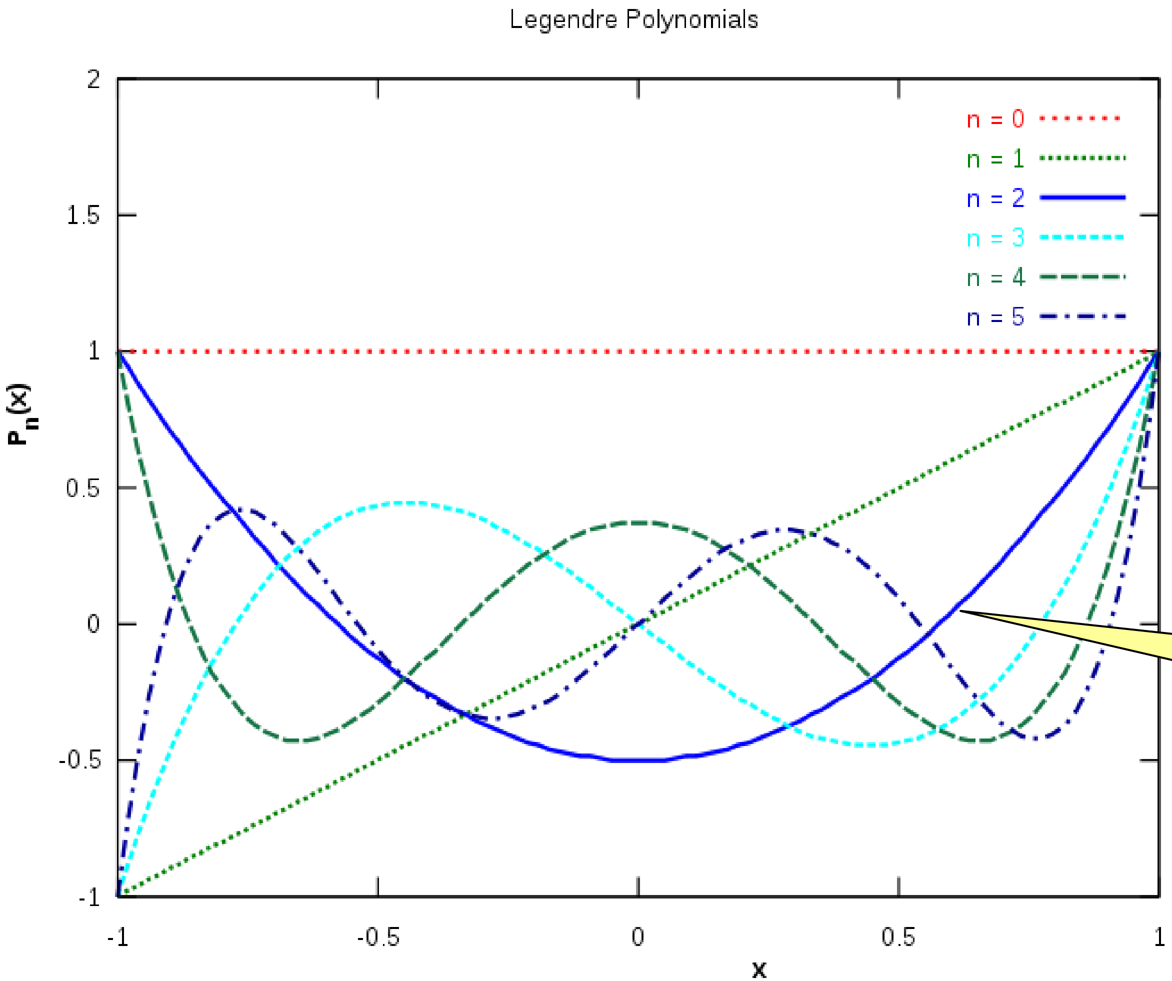
http://es.wikipedia.org/wiki/Polinomios_de_Legendre

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

$$x = \cos\theta$$

Polinomis de Legendre



- Formes explícites:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

Ordre parell: funció parella

http://es.wikipedia.org/wiki/Polinomios_de_Legendre

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

Polinomis de Legendre: condició d'ortogonalitat

- Variable x: $$\int_{-1}^{1} P_m(x)\cdot P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$$

- Variable θ: canvi de variable

$$P_0(\cos\theta) = 1$$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta$$

$$x = \cos\theta$$

$$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$$

$$\int_0^{\pi} P_m(\cos\theta)\cdot P_n(\cos\theta)\sin\theta \, d\theta = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$$

Tema 4: TEORIA DEL POTENCIAL

4.5. Mètode de separació de variables

CASOS PARTICULARS

Factorització en *coordenades **esfèriques*** de l'eq. Laplace

- La solució més general serà (simetria azimutal):

$$\phi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right)\cdot P_l(\cos\theta)$$

- Aquesta solució per al cas de simetria azimutal també es pot obtenir partint directament de la independència amb φ i resolent les equacions que se n'obtenen.