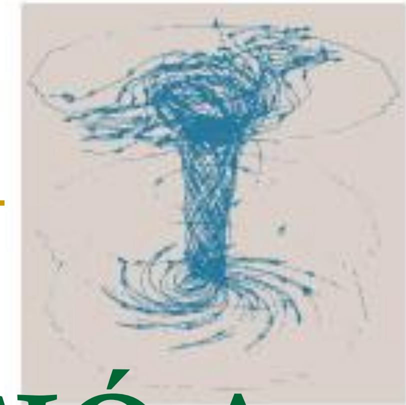
http://www.wadsworthmedia.com/math/0534409865_stewart3c3/chapter13.html



Tema 1: INTRODUCCIÓ A L'ELECTROMAGNETISME

1.0. Càlcul vectorial

- Definicions i sistemes de coordenades
- Camps escalars, operador gradient
- Camps vectorials, operadors divergència i rotacional
- Integrals i teoremes fonamentals

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: camps vectorials

- Camp vectorial $\boldsymbol{A}$: es una funció $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ que a cada punt de l'espai, li assigna una magnitud vectorial.
- Cada component és una funció escalar d'aqueix punt:

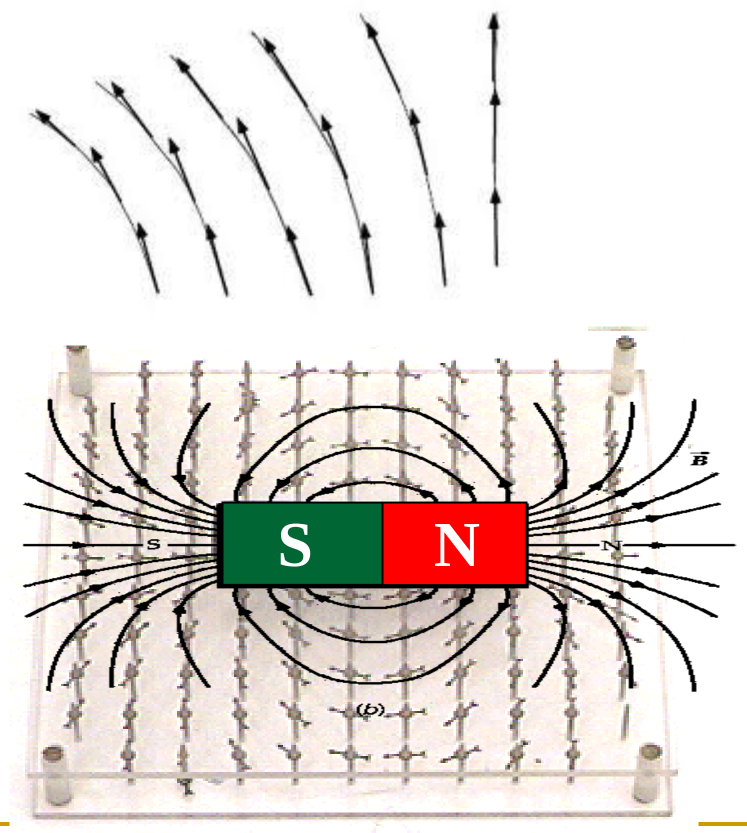
$$\boldsymbol{A}(x,y,z) = A_1(x,y,z)\,\mathbf{i} + A_2(x,y,z)\,\mathbf{j} + A_3(x,y,z)\,\mathbf{k}$$

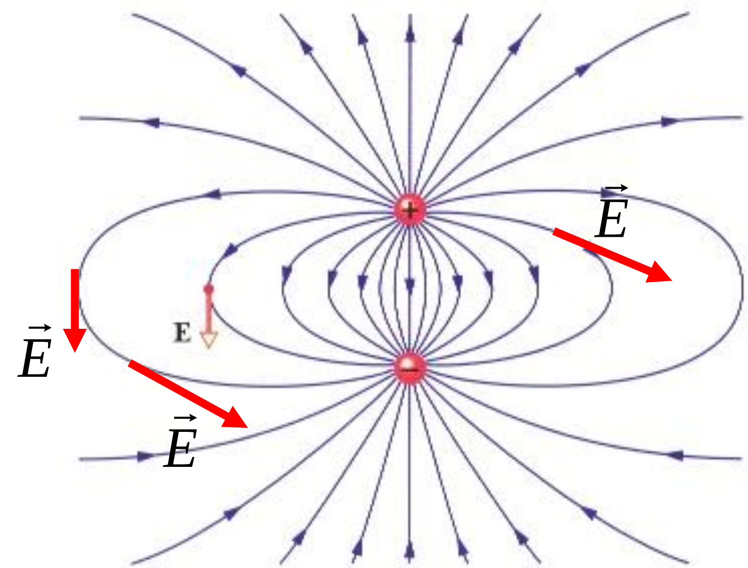
- Perquè tinga sentit físic ha de ser monovaluada.
- Exemples: el camp elèctric, el camp magnètic, etc.
- REPRESENTACIÓ: línies de camp, corbes que són tangents en cada punt al camp vectorial

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: camps vectorials

- REPRESENTACIÓ: línies de camp, corbes que són tangents en cada punt al camp vectorial



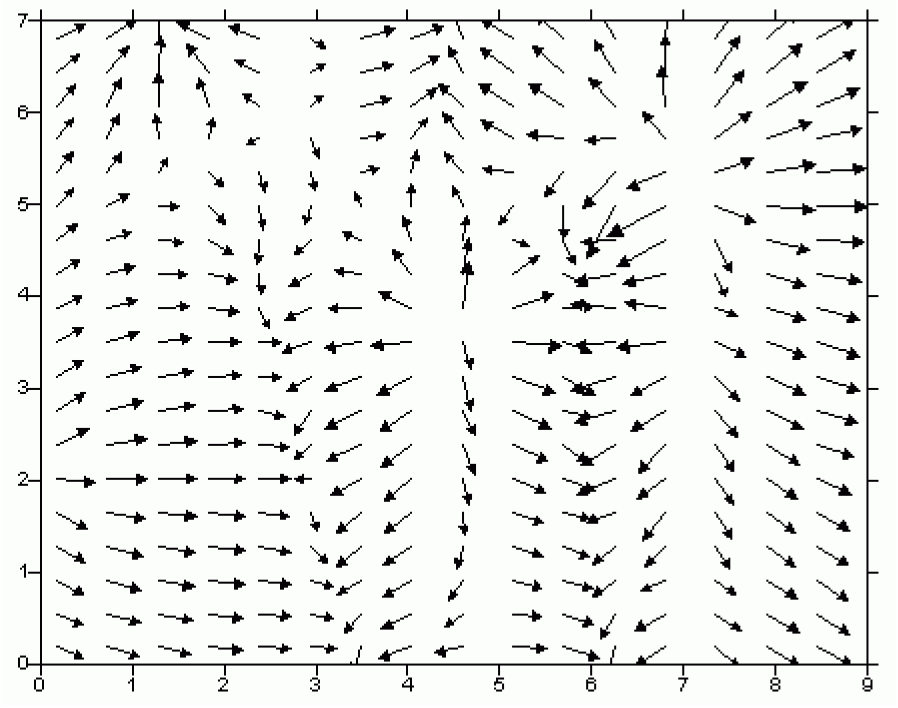


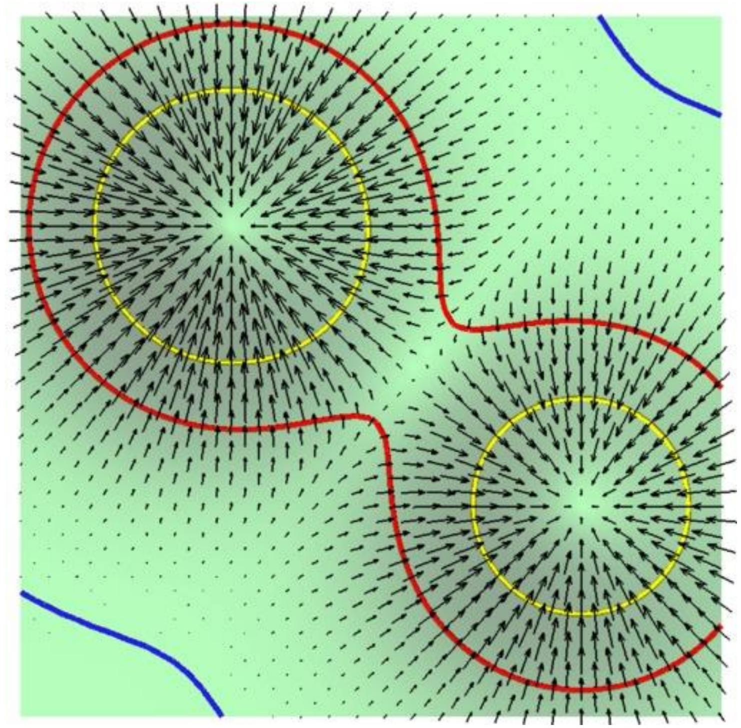
http://www.arborsci.com/

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: camps vectorials

- REPRESENTACIÓ: vectors en cada punt; de vegades la llargària informa de la intensitat del camp





http://visual.atzibala.com/vis09/wiki/CamposEscalaresContornos

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: camps vectorials, operador divergència

- Operador divergència:

  (cartesianes)

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

- S'aplica sobre una funció vectorial. El resultat que s'obté és una funció escalar que, avaluada en un punt, proporciona un valor escalar.

S'entén millor en una superfície tancada

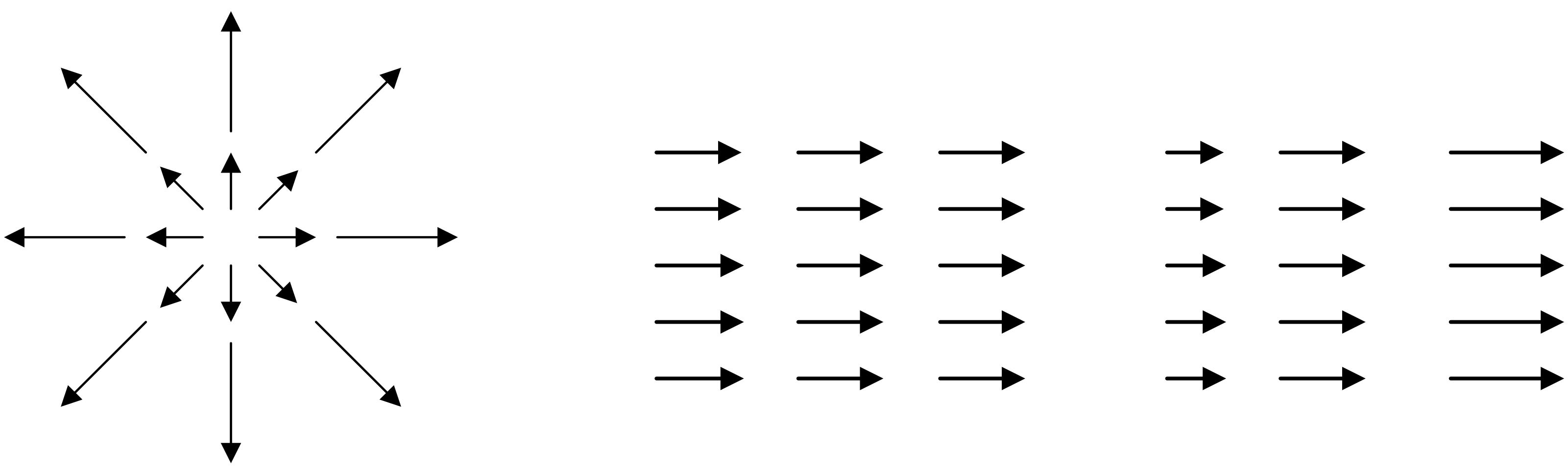
Significat físic del escalar que s'obté:

- Aplicat a un punt, en quina mesura els vectors canvien, en direcció (divergeixen/convergeixen), en mòdul (augmenta/disminueix).
- EXISTENCIA D'UNA FONT DE LÍNIES DE CAMP

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: camps vectorials, operador divergència

- Grau de variació en:
  - direcció: línies que convergeixen/divergeixen
  - mòdul: augmenta/disminueix



(*a*) Divergència positiva (*b*) Divergència zero (*c*) Divergència positiva

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: camps vectorials, operador rotacional

- Operador rotacional o rotor:
  (cartesianes)

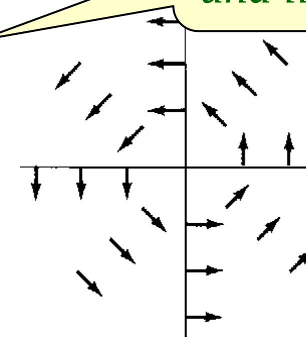
$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}=rot\vec{A}=curl\vec{A}$$

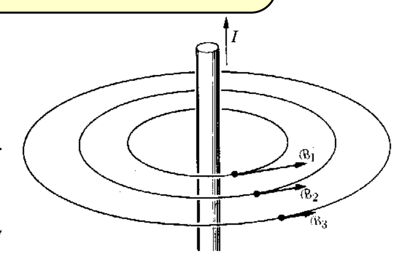
- S'aplica sobre una funció vectorial, i el resultat que s'obté és una altra funció vectorial, que avaluada en un punt, proporciona un vector.

S'entén millor en una línia tancada

<u>Significat físic</u> del vector que s'obté:

- Aplicat a un punt: mesura quant "s'enrotlla" sobre si mateix el camp.





- EXISTÈNCIA D'UNA FONT D'ENROTLLAMENT DE LES LÍNIES DE CAMP

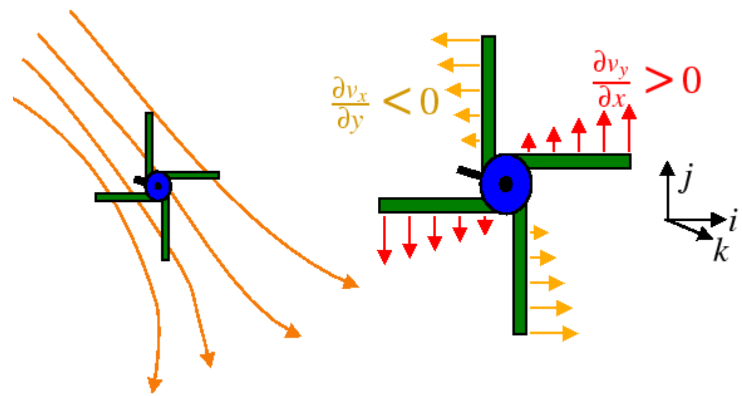
TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

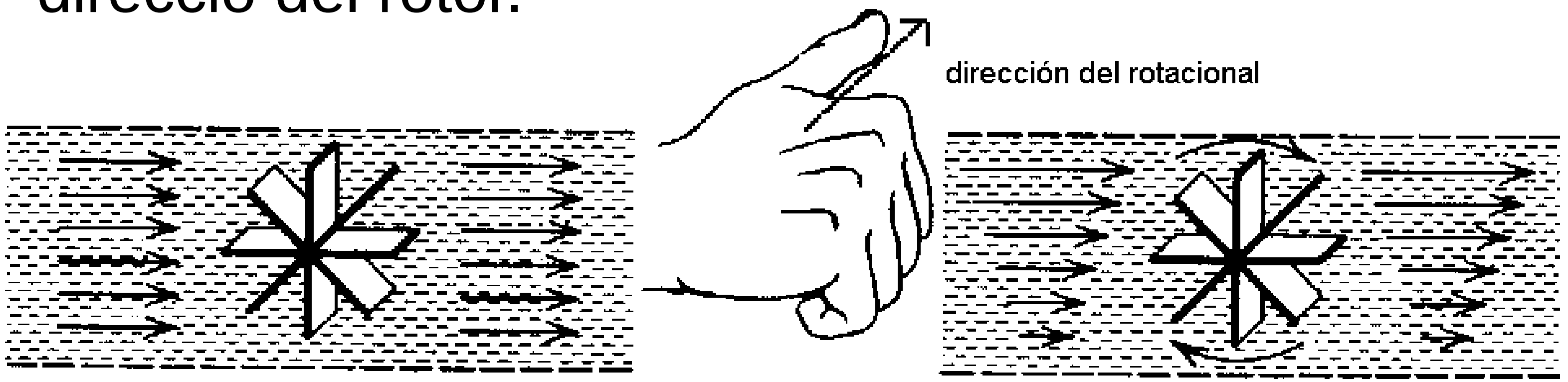
1.0 Càlcul vectorial: camps vectorials, operador rotacional

Significat físic del vector que s'obté (símil en fluids):

- El camp de velocitats d'un fluid amb rotacional no nul faria girar les pales d'una turbina.

  L'aplicació de la regla de la mà dreta al gir de la turbina dóna la direcció del rotor.





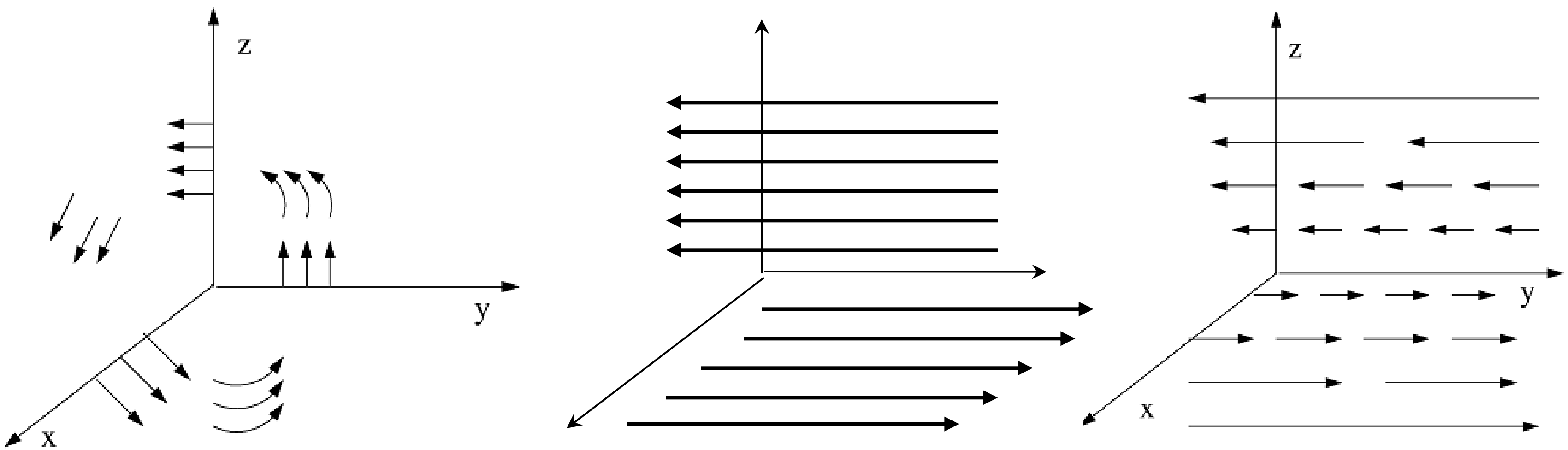
Circulación nula

Circulación diferente de cero

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: camps vectorials, operador rotacional

- Grau "d'enrotllament" de les línies de camp.



(*a*) Rotor positiu en la direcció x (*b*) Rotor zero (*c*) rotor no zero

- <u>Atenció</u>: de vegades els terbolins es tanquen en l'infinit.

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: integrals

- Sobre camps escalars i vectorials es poden definir integrals de *línia*, de *superfície* i de *volum.*

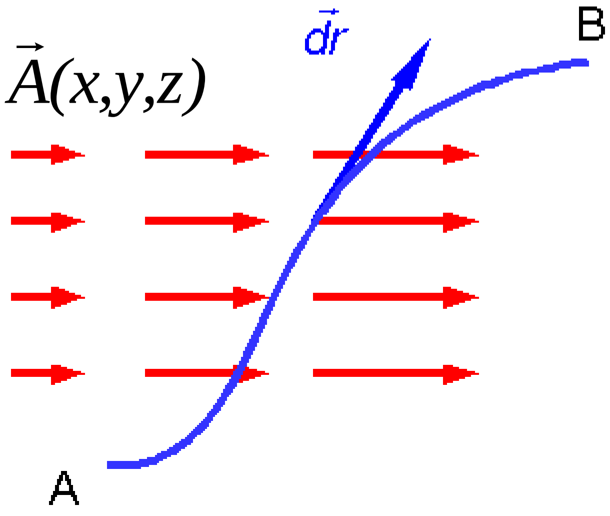
1.0 Càlcul vectorial: integrals

INTEGRAL DE LÍNIA

- **Circulació** d'un camp vectorial ***A*** al llarg d'un recorregut L (de *A* cap a *B*):

$$C = \int_L \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

- <u>Sentit físic</u>: suma de les projeccions del vector sobre el recorregut.
- Si el camp ***A*** és una força, la circulació = treball per a recórrer L.
- <u>Camps conservatius</u>: la circulació no depèn del camí, només dels punts *A* i *B* (si recorregut tancat, $L = 0$)



http://es.wikipedia.org/wiki/Circulaci%C3%B3n_de_un_campo_vectorial_a_lo_largo_de_un_camino

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: integrals

Representació vectorial de superfícies

- L'àrea i l'orientació de superfícies elementals es poden descriure matemàticament associant-los un vector (pseudovector), tal que:

$$\vec{S} = S\,\vec{n}$$

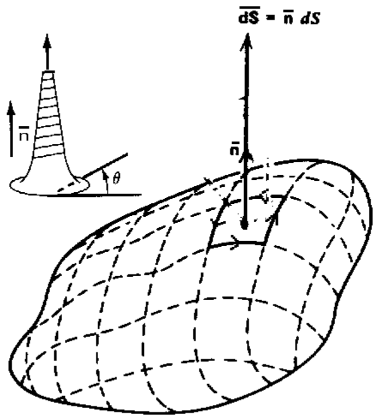
− mòdul: àrea de la superfície

− direcció: perpendicular a la superfície

− sentit: arbitrari

> en una superfície tancada se sol prendre el signe positiu "cap a fora"

> quan hi ha algun vector associat al perímetre s'aplica la regla de Maxwell



TEMA 1: INTRODUCC

1.0 Càlcul vectorial: integrals

Flow: massa per unitat d'àrea i unitat de temps kg/(m^2·s).
Flux: massa que travessa una superfície per unitat de temps kg/s.

INTEGRAL DE SUPERFÍCIE

- **Flux** d'un camp vectorial ***A*** a través d'una superfície *S* ($\vec{n}$ és el vector normal a la superfície i cap a fora)

$$flux = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS$$

- Significat físic: quantitat de línies de camp que travessen una superfície.
- Si es tractara d'un fluid: massa que travessa una superfície per unitat de temps (kg/s).
- Superfície tancada: flux net a través de la superfície (balanç línies que hi entren/n'ixen)

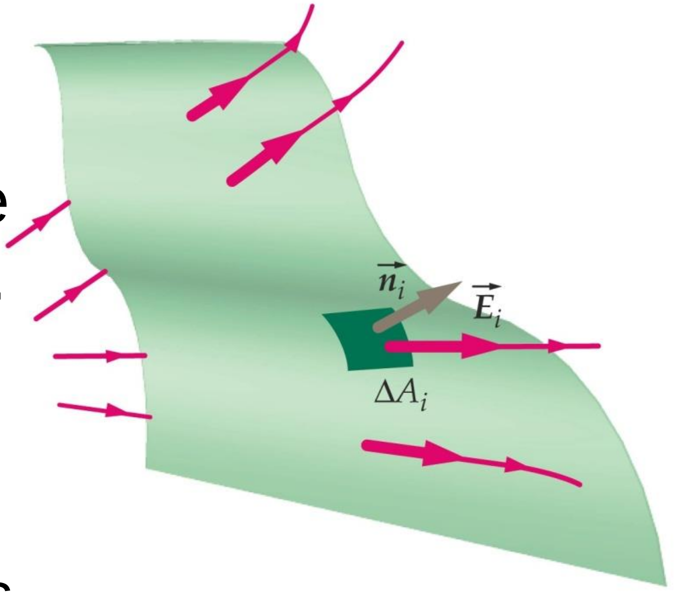


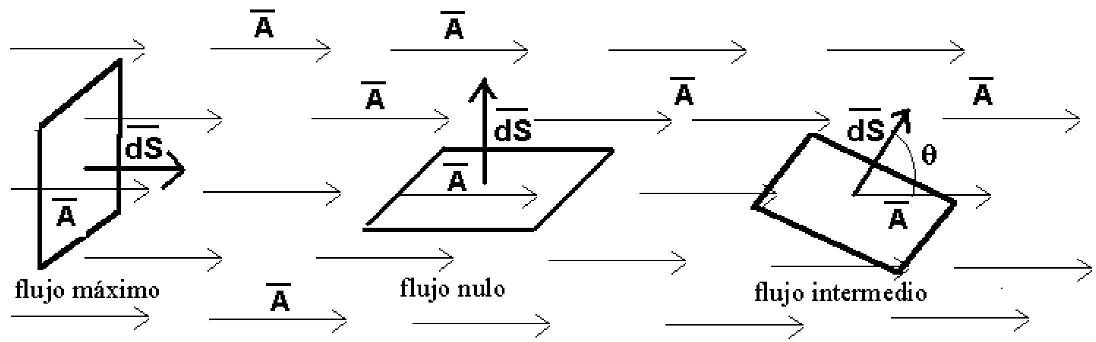
Figura 22.16 Tipler, 5a ed.

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

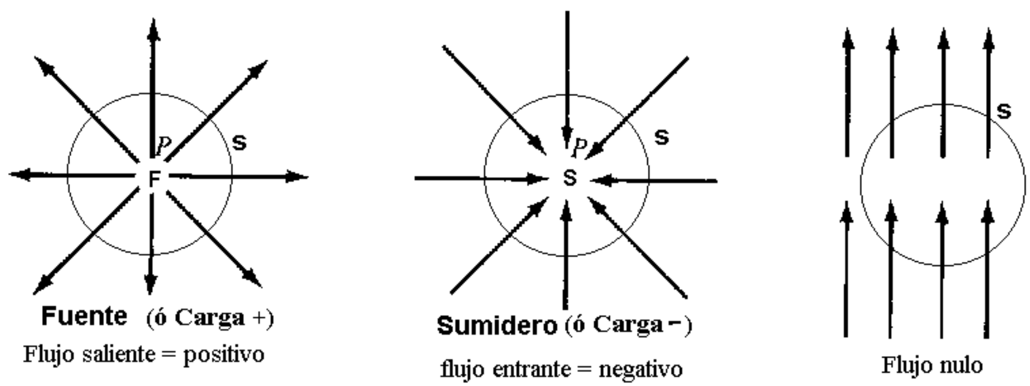
1.0 Càlcul vectorial: integrals

INTEGRAL DE SUPERFÍCIE

- **Flux** en funció de l'angle d'inclinació de la superfície



- **Flux** com a indicació de la divergència



1.0 Càlcul vectorial: integrals - teoremes

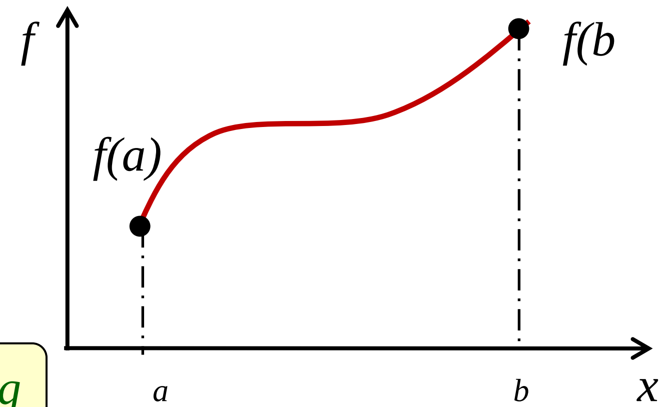
- A cada una de les formes d'aplicar l'operador ∇ (gradient, divergència i rotor), li correspon un *TEOREMA FONAMENTAL* que relaciona l'operador diferencial amb algun tipus d'integrals.

DERIVADA 1 VARIABLE

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: teoremes

TEOREMA FONAMENTAL 1 variable



- La integral de la derivada d'una funció és igual al valor de la funció en els punts inicial i final:

f primitiva de g

$$\int_a^b \left(\frac{df}{dx} \right) dx = f(b) - f(a) \qquad \left(\int_a^b g(x)\,dx = f(b) - f(a) \right)$$

punts extrems a,b

- El format base d'aquest teorema es repeteix en els teoremes que afecten ∇:

  La integral d'una derivada sobre algun tipus d'interval ve donada pel valor de la funció en els punts extrems (o contorn).

GRADIENT

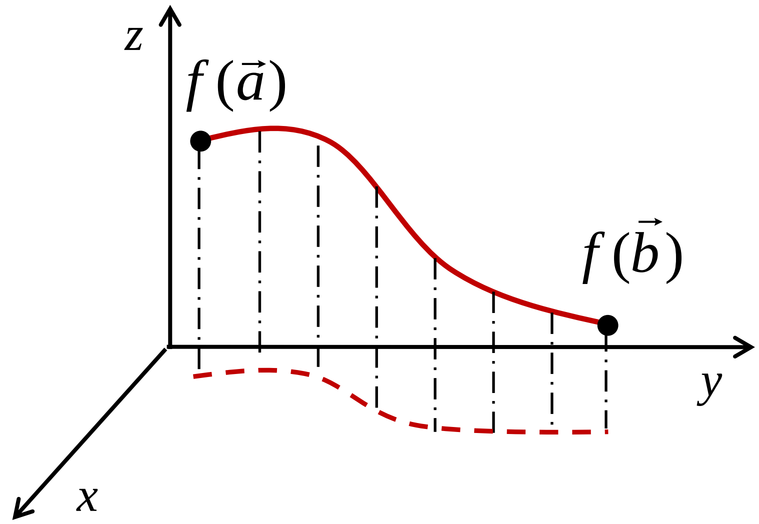
TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: teoremes

TEOREMA DEL GRADIENT

- La **integral de línia del gradient** d'una funció és igual al valor de la funció en els **punts** inicial i final:

$$\int_a^b \left(\vec{\nabla} f\right) d\vec{r} = f(\vec{b}) - f(\vec{a})$$



- Per tant: $df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$

(escalar = producte escalar de dos vectors)

- Corol·laris: $\oint \left(\vec{\nabla} f\right) d\vec{r} = 0$

$\int_a^b \left(\vec{\nabla} f\right) d\vec{r}$ és independent del camí recorregut

DIVERGÈNCIA

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: teoremes

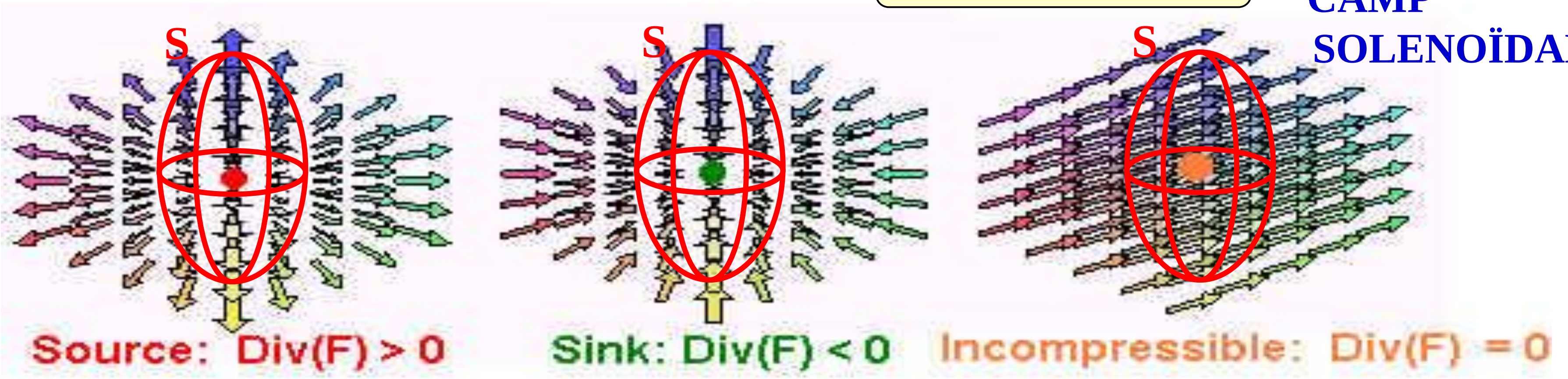
TEOREMA DE LA DIVERGÈNCIA O DE GAUSS

- La **integral de volum** de la divergència d'una funció és igual a la **integral de superfície** d'aqueixa funció a través de la superfície tancada que envolta el volum (flux) .

$$\int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\,dV = \int_{S(V)} \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

punts extrems: S(V)

CAMP SOLENOÏDAL



http://www.ltcconline.net/greenl/courses/202/vectorIntegration/divergenceTheorem.htm

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: teoremes

TEOREMA DE LA DIVERGÈNCIA O DE GAUSS

- Interpretació geomètrica:

  - Integral de volum: quantitat de fonts en un volum.

  - Integral de superfície: flux total a través d'una superfície

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV = \int_{S(V)} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

- Altra definició de divergència (punt ~ volum infinitesimal)):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{S(V)} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

>> divergència = flux a través d'un volum infinitesimal

>> densitat volumètrica de flux

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

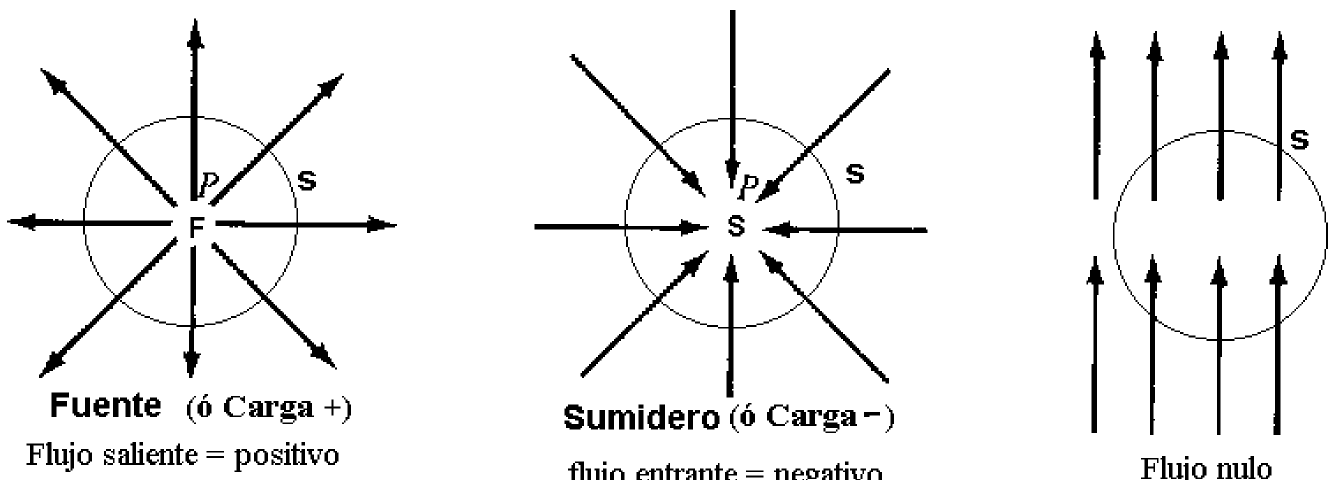
1.0 Càlcul vectorial: camps vectorials, operador divergència

- Relació fonts/flux:

  - si $div\ \mathbf{A} \neq 0$: EXISTEIX ALGUNA FONT / HI HA FLUX NET

  - si $div\ \mathbf{A} = 0$: NO EXISTEIX CAP FONT / NO HI HA FLUX NET (camp solenoïdal: no té fonts de divergència)

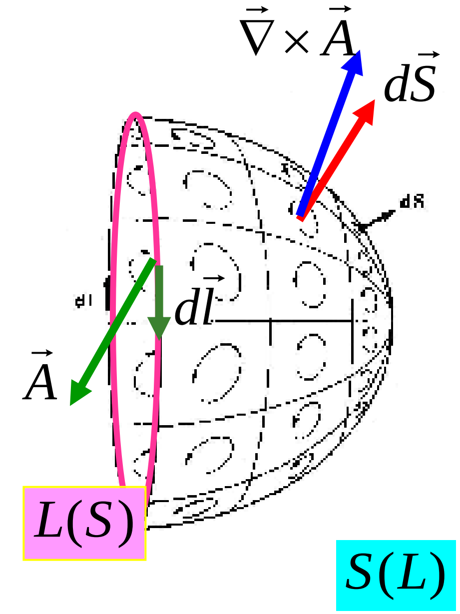
- Divergència com a densitat volumètrica de flux



ROTACIONAL

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: teoremes

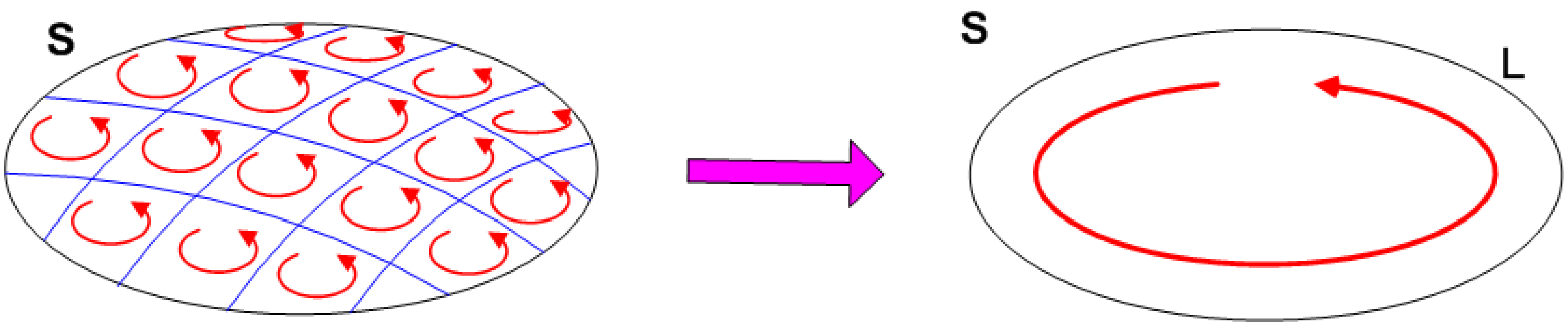


TEOREMA DE CIRCULACIÓ O DE STOKES

- La **integral de superfície del rotor** d'una funció (flux del rotor) és igual a la integral de línia d'aqueixa funció al llarg del **perímetre L** de la superfície **S**.

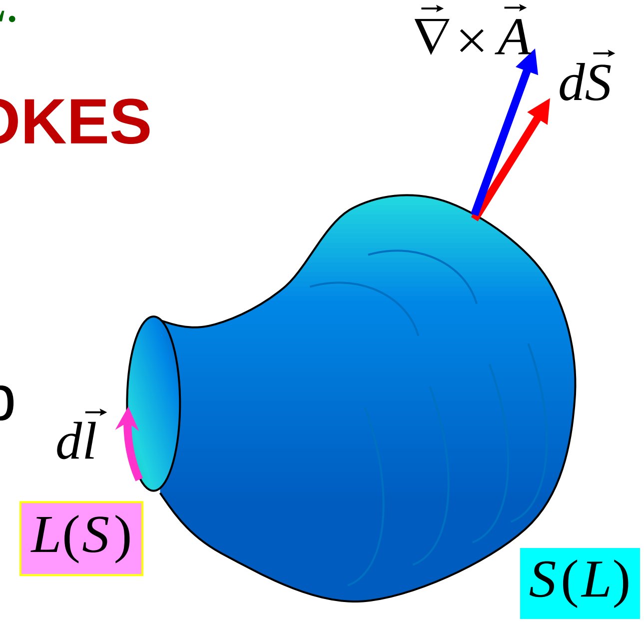
$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_{L(S)} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

punts extrems L(S)



*La superfície de integració pot ser qualsevol, sempre que recolze en **L**.*

TEOREMA DE CIRCULACIÓ O DE STOKES



- <u>Interpretació geomètrica</u>:

  - Integral de superfície: flux del rotor.

  - Integral de línia: circulació del camp

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_{L(S)} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

- <u>Una altra definició de rotor (punt ~ volum infinitesimal))</u>:

$$\left|\vec{\nabla} \times \vec{A}\right| = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \int_{L(S)} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

>> rotor = circulació a través d'un recorregut infinitesimal

>> densitat superficial de la circulació

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: denominacions especials

- Els camps amb propietats concretes reben noms especials
  - Camps conservatius
  - Camps solenoïdals

CAMPS CONSERVATIUS

1.0 Càlcul vectorial: denominacions especials

Camp vectorial **CONSERVATIU** (o irrotacional)

- Un camp és conservatiu quan el seu rotacional és zero:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$$

- (*a*) La circulació del camp és independent del camí i només depèn del punt inicial i final (camí tancat = 0):

$$C = \int_a^b \vec{A} \cdot d\vec{r} = f(\vec{b}) - f(\vec{a}) \quad \rightarrow \quad \oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0$$

- (*b*) Tot camp conservatiu es pot expressar com el gradient d'un camp escalar (potencial escalar):

$$\vec{A} = \vec{\nabla} f \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0$$

- (*c*) Els <u>camps radials</u> són CONSERVATIUS:

$$\vec{\nabla} \times f(r)\,\vec{u}_r = 0$$

CAMPS SOLENOÏDALS

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: denominacions especials

Camp vectorial **SOLENOÏDAL** (o divergència nul·la)

- Un camp és solenoïdal quan la seua divergència és zero:

$$div\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

- (*a*) No existeixen fonts del camp ni embornals: les línies de camp són tancades (poden tancar-se en l'infinit).

- (*b*) Tot camp solenoïdal (en l'espai euclidià R3), es pot expressar com el rotor d'un altre camp vectorial:

$$\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) = 0$$

- (c) Per a un perímetre determinat L, la integral de superfície del camp és independent de la superfície S:

$$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{S'} \vec{A} \cdot d\vec{S}' \quad \rightarrow \quad \oint_{L(S)} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

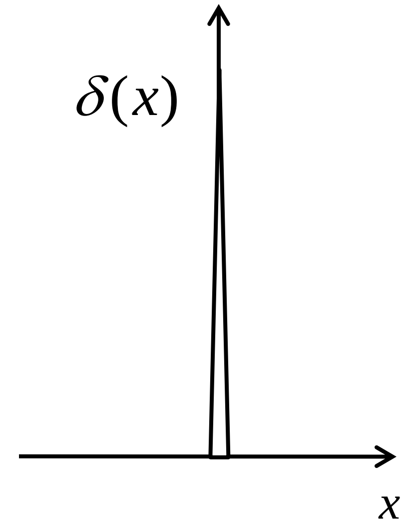
1.0 Càlcul vectorial: denominacions especials

- Les càrregues puntuals es defineixen com una càrrega *Q* que ocupa un espai infinitament menut.
- Aquesta definició (i les equivalents) produeixen punts singulars en les expressions dels camps.
- La funció **delta de Dirac** permet representar aqueixa singularitat mitjançant una funció que resulta molt útil per a mantenir el formalisme matemàtic.

DELTA DE DIRAC

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: denominacions especials



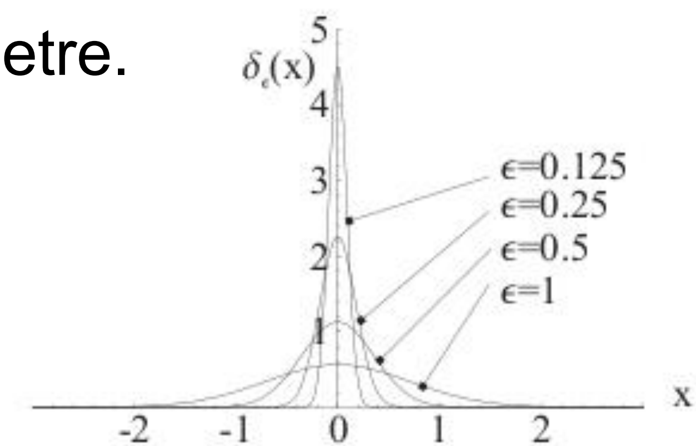
Funció **delta de Dirac**

- Es defineix a partir de les seues propietats:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \neq 0 \\ \infty & si \quad x = 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

- No és una funció en el sentit usual:
  - És el límit d'una successió de funcions dependents d'un paràmetre.
  - Exemple de successió:

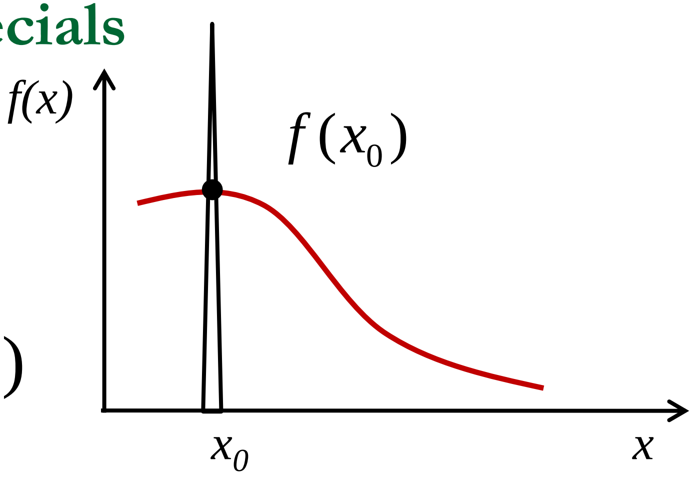
$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to \infty} \delta_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \to \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi \varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon^2}$$



TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: denominacions especials

Funció **delta de Dirac**



- Propietat:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)$$

- Generalització a 3D: $\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$

$$\delta(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & si \quad \vec{r} \neq 0 \\ \infty & si \quad \vec{r} = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\vec{r})\,dV = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r})\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\,dV = f(\vec{r}_0)$$

- Resultats interessants:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 4\pi\,\delta(\vec{r}) \qquad \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\,\delta(\vec{r})$$

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: denominacions especials

GIMNÀSTICA DE CÀLCUL, comproveu que:

- Per a tota funció escalar *f*: $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}f=0$
- Per a tot camp vectorial: $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=0$
- Per a tot camp radial: $\vec{\nabla}\times f(r)\,\vec{u}_r=0$

TEMA 1: INTRODUCCIÓ A L'EM

1.0 Càlcul vectorial: denominacions especials

Curs del **MIT** sobre **camps elèctrics i magnètics** amb animacions

- http://web.mit.edu/8.02t/www/802TEAL3D/visualizations/guidedtour/GuidedTour.htm

Apunts de la **Universitat de Sevilla** sobre **camps electromagnètics**

- http://laplace.us.es/campos/teoria/teoria.phpGeneral