Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL ONES ELECTROMAGNÈTIQUES

8.1. Introducció
8.2. Generalització del teorema d'Ampère: corrent de desplaçament
8.3. Equacions de Maxwell en el buit
8.4. Equació d'ones
8.5. Ones electromagnètiques planes

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL ONES ELECTROMAGNÈTIQUES

BIBLIOGRAFIA

Griffiths	Tema 7
Pomer	Tema 7
Reitz-Milford-Christy	Tema 16

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.1. Introducció

Resum d'equacions generals

- En aquest tema plantejarem les equacions que regeixen els fenòmens electromagnètics en el buit.
- Tema 7: hem vist que un camp magnètic variable amb el temps equival a una font de rotor del camp elèctric que, per tant, deixa de ser conservatiu. $$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
- Tema 8: generalitzarem la llei d'Ampère, ja que veurem com un camp elèctric variable amb el temps produeix una contradicció que Maxwell va resoldre modificant l'expressió del rotor del camp magnètic: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + ¿?$

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.2. Generalització del t. Ampère: corrent de desplaçament

Incompatibilitat

- Quan Maxwell va comparar l'expressió del rotor del camp magnètic amb l'equació de continuïtat, va trobar una incompatibilitat:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J} \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{J}=\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

- Quina equació és correcta i quina no ho és? Per contestar, analitzem el grau de generalitat d'ambdues equacions.

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.2. Generalització del t. Ampère: corrent de desplaçament

Incompatibilitat

- El rotacional del camp magnètic (teorema d'Ampère) es va obtenir considerant corrents estacionaris ($\nabla \cdot J = 0$).
- Al contrari, l'equació de la conservació de la càrrega es va obtenir sense restriccions; és una equació GENERAL.
- Maxwell va suposar que el teorema d'Ampère s'havia de modificar afegint-hi un altre corrent, que va denominar ***corrent de desplaçament:***

$$\vec{J}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \vec{J}_{total} = \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- Aquesta generalització és un postulat. Va ser confirmada per Hertz en 1888.

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.2. Generalització del t. Ampère: corrent de desplaçament

Incompatibilitat

- La nova expressió del rotor: $$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

- No afecta la magnetostàtica, on els camps són constants amb el temps. $$\vec{\nabla}\times\vec{B}_{estàtic}=\mu_0\vec{J}$$

- És per aquest motiu pel qual Faraday i altres investigadors no van trobar mai aquest terme.

- És a dir, la nova expressió del rotor postulada per Maxwell engloba expressions anteriors, alhora que justifica nous fenòmens.

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.2. Generalització del t. Ampère: corrent de desplaçament

Incompatibilitat

- D'aquesta manera:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\left(\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\rightarrow\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{J}=\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B}-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=-\vec{\nabla}\left(\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

- Així, ara resulten compatibles les dues equacions.

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.2. Generalització del t. Ampère: corrent de desplaçament

Significat físic del corrent desplaçament

- Si en l'equació de conservació de la càrrega substituïm:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=0$$

  veiem que la divergència del parèntesi ha de ser zero.

- <u>Interpretació</u>: el corrent total, constituït pel corrent degut a càrregues lliures i pel corrent de desplaçament, és estacionari ($\nabla\cdot J_{total}=0$) i circula en bucles tancats.

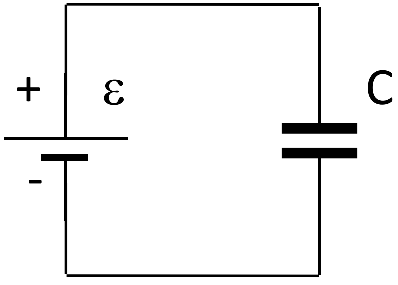
$$\vec{J}_{total}=\vec{J}+\vec{J}_D \qquad \vec{J}_D=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_{total}=0$$

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.2. Generalització del t. Ampère: corrent de desplaçament

Significat físic del corrent desplaçament: EXEMPLE

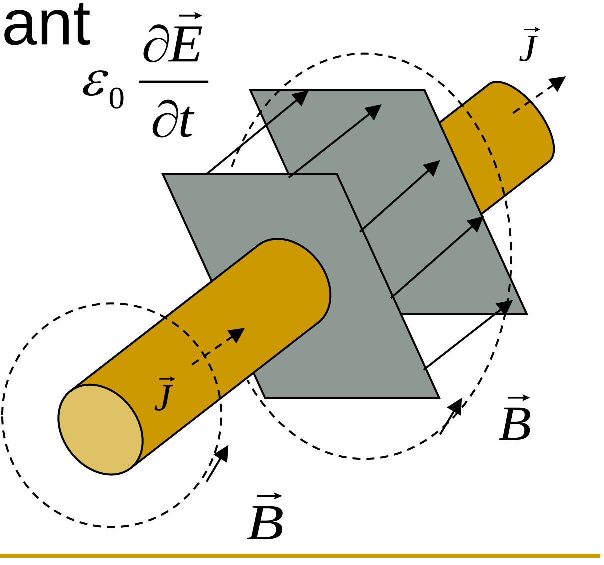
- Durant el procés de càrrega (o descàrrega) d'un condensador...



- ... podem calcular el camp magnètic creat pel corrent (transitori) mitjançant l'equació d'Ampère:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{tancada}$$

- Però SEGONS ON considerem el recorregut per calcular el corrent tancat, obtenim resultats diferents:



Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.2. Generalització del t. Ampère: corrent de desplaçament

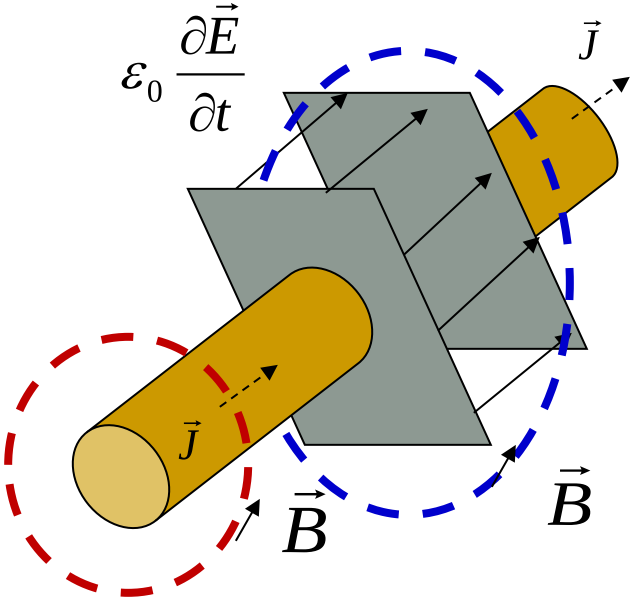
Significat físic del corrent desplaçament: EXEMPLE

- Si la línia tancada comprèn el **cable** pel qual passa corrent:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{tancada} \neq 0$$

- Si la línia tancada es troba en la zona entre plaques del **condensador**:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{tancada} = 0$$



Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.2. Generalització del t. Ampère: corrent de desplaçament

Significat físic del corrent desplaçament: EXEMPLE

- S'obté la mateixa contradicció si raonem en base al flux del rotor de *B* que travessa una superfície (punt de partida del teorema d'Ampère):

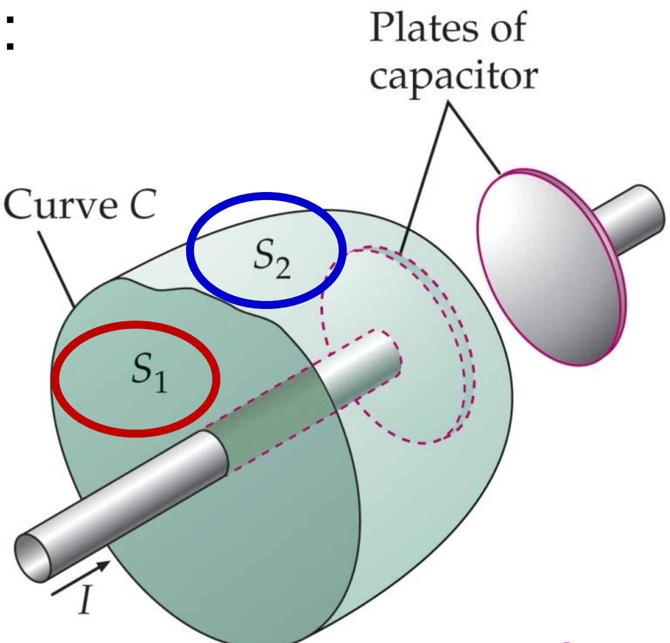


Fig. 30-01 Tipler 5ª Ed.

- Flux a través de la **superfície 1**

$$\oint \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{S1} \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{S} \neq 0$$

- Flux a través de **la superfície 2**

$$\oint \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{S2} \mu_0 \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.2. Generalització del t. Ampère: corrent de desplaçament

Significat físic del corrent desplaçament: EXEMPLE

- EXPLICACIÓ: durant el procés transitori la càrrega no passa d'una placa a l'altra, només s'acumula en aquestes $\rightarrow \sigma(t)$

- Per tant, aqueixa càrrega variable amb el temps crea un camp elèctric també variable amb el temps:

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = \frac{q(t)}{\varepsilon_0 S} \qquad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 S} \frac{\partial q(t)}{\partial t}$$

- El terme $\varepsilon_0\ \partial E/\partial t$ té unitats de densitat de corrent i constitueix el corrent de desplaçament:

$$\vec{J}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.2. Generalització del t. Ampère: corrent de desplaçament

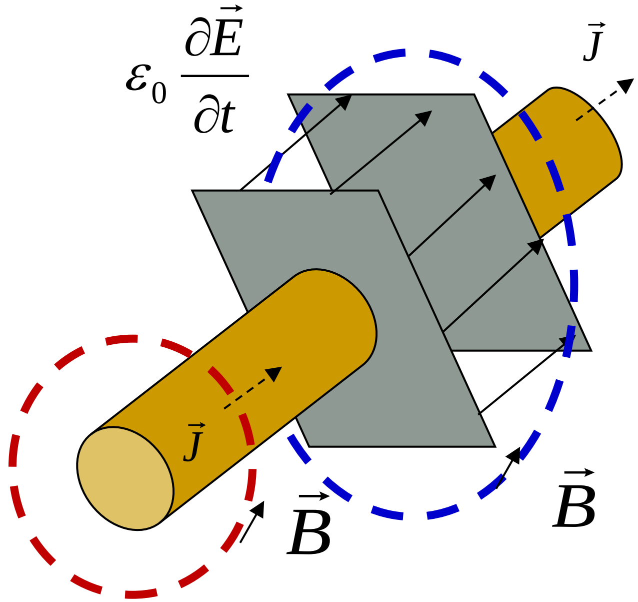
Significat físic del corrent desplaçament: EXEMPLE

- AMB EL CORRENT I_D: el càlcul mitjançant el teorema d'Ampère coincideix:
- pel contorn al voltant del **cable**:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{tancada} \neq 0$$

- pel contorn en el **condensador**:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{tancada} = \mu_0 I_D \neq 0$$



- El camp magnètic en l'exterior del condensador ha de ser continuació del corresponent en el cable.

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.2. Generalització del t. Ampère: corrent de desplaçament

Significat físic del corrent desplaçament: OBSERVACIONS

- En temes anteriors no ha fet falta considerar el corrent de desplaçament perquè:

  − quan els camps són constants amb el temps, la seua derivada és zero (electrostàtica i magnetostàtica);

  − quan el corrent de desplaçament està confinat a regions de l'espai molt menudes, el seu valor es pot considerar negligible;

  − quan els materials són molt bons conductors, el corrent de desplaçament és negligible comparat amb el de conducció.

EQUACIONS DE MAXWELL

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu\,\vec{H}$$

$$\vec{J} = \sigma\,\vec{E}$$

Mètode deductiu: *del general al particular*

Mètode inductiu: *del particular al general*

Generalització de les observacions

Procés seguit històricament

CAMPS QUE NO VARIEN AMB EL TEMPS	CAMPS QUE VARIEN LENTAMENT AMB *t*	CAMPS QUE VARIEN FORTAMENT AMB *t*
$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$	$\vec{J} >> \varepsilon_0\partial\vec{E}/\partial t$	$\partial\vec{E}/\partial t >>$ $\partial\vec{B}/\partial t >>$
$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$
$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$	$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$
$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$
$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$	$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$	$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$
Camps ELECTROSTÀTIC i MAGNETOSTÀTIC	Camps QUASIESTACIONARIS	CAS GENERAL DE VARIACIÓ AMB *t*

Tema 7 **Tema 8**

EQUACIONS DE MAXWELL EN EL BUIT

8.3. Equacions de Maxwell

Eq. de Maxwell en el buit

- James Clerk Maxwell va postular les seues equacions en 1865.
- Junt amb la força de Lorentz, descriuen tots els fenòmens elèctrics i magnètics coneguts; constitueixen una de les grans unificacions de la física.
- Cada una és la generalització d'una observació experimental.
- Maxwell no les va escriure de forma tan compacta, però el significat era el mateix.
- La introducció de l'eq. de desplaçament fa que aqueixes equacions prediguen les ones electromagnètiques.

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.3. Equacions de Maxwell

Eq. de Maxwell en el buit (corrents NO estacionaris)

- Divergència: $$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ *LLEI DE GAUSS*

  $$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$ *sense nom o LLEI DE GAUSS*

- Rotor: $$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$ *LLEI DE FARADAY*

  $$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$ *LLEI D'AMPÈRE modificada*

- Junt amb força de Lorentz: $$\vec{F}_L=q\cdot\vec{E}+q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

- Aquestes equacions resumeixen les equacions que descriuen l'ELECTRODINÀMICA CLÀSSICA en el buit.

8.3. Equacions de Maxwell

Eq. de Maxwell en el buit, per a corrents NO estacionaris

- L'equació de continuïtat, que és l'expressió matemàtica de la conservació de la càrrega, es pot obtenir aplicant la divergència a l'equació del rotor de *B*:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=0 \quad\rightarrow\quad \mu_0\vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=0$$

$$\rightarrow\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

- És a dir, l'equació de conservació de la càrrega està inclosa en les equacions de Maxwell i no fa falta donar-la de forma expressa.

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.3. Equacions de Maxwell

Eq. de Maxwell en el buit: COMENTARIS

- LLEI DE GAUSS (camp elèctric): $$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
- Relaciona el camp elèctric amb la càrrega que el crea (fonts de divergència).
- És una extensió de la llei de Coulomb.
- <u>Forma integral</u>: el flux total del camp elèctric a través d'una superfície tancada és igual a la càrrega neta dins de la superfície dividida per ε_0.

$$\oint_{S(V)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V(S)} \rho(\vec{r}\,')dV'$$

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.3. Equacions de Maxwell

Eq. de Maxwell en el buit: COMENTARIS

- LLEI DE GAUSS (camp magnètic): $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$

- Indica que no hi ha fonts de divergència: fins ara, els pols magnètics sempre s'observen per parelles.

- Com a conseqüència, les línies de camp magnètic són tancades: no poden començar o acabar en un punt concret.

- Forma integral: el flux total del camp magnètic a través d'una superfície tancada és zero.

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.3. Equacions de Maxwell

Eq. de Maxwell en el buit: COMENTARIS

- LLEI DE FARADAY:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- Un camp magnètic variable amb el temps pot crear un camp elèctric (font de rotor).
- Com a conseqüència, en un circuit en presència d'un camp magnètic variable amb el temps apareix un camp elèctric induït que produeix un corrent (llei d'inducció).
- <u>Forma integral</u>: la integral de línia al llarg d'un recorregut tancat del camp elèctric és igual a la integral de superfície de ∂B/∂t (*S* està recolzada en *C*):

$$\oint_{C(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S(C)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.3. Equacions de Maxwell

Eq. de Maxwell en el buit: COMENTARIS

- LLEI DE AMPÈRE-MAXWELL: $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$
- És una generalització de la llei d'Ampère.
- Descriu el fet que els corrents elèctrics i els corrents de desplaçament, deguts a camps elèctrics variables amb el temps, ambdós creen camps magnètics.
- Forma integral: La integral de línia del camp magnètic al llarg d'un recorregut tancat ve donada per la suma dels corrents tancats dins d'aquest (corrents de càrregues lliures i de desplaçam

$$\oint_{C(S)}\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\int_{S(C)}\left(\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

Eq. de Maxwell en el buit: CONDICIONS DE CONTORN

- Les equacions de Maxwell, com totes les equacions diferencials, cal completar-les amb les condicions de contorn corresponents.

- Com que aquestes condicions són òbvies (*E* i *B* són zero a gran distàncies en els cas de fonts no infinites), no s'indiquen de forma expressa i és fàcil oblidar que hi tenen un paper important.

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.3. Equacions de Maxwell

Eq. de Maxwell en el buit: FONTS

- Com que els termes $\partial E/ \partial t$, $\partial B/\partial t$ també depenen de càrregues i corrents, les equacions de Maxwell se solen escriure com:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$

  ... per emfatitzar que tots els camps elèctrics i magnètics estan definitivament produïts per càrregues i corrents.

- Aquestes equacions ens informen de com les càrregues creen camps...

  ... mentre que la llei de Lorentz ens informa de com els camps afecten les càrregues.

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.3. Equacions de Maxwell

Eq. de Maxwell en el buit: SIMETRIA

- En absència de càrregues lliures i corrents:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

- Si se substitueix E per B i B per $-\mu_0\varepsilon_0 E$, el primer parell d'equacions es converteix en el segon.

8.3. Equacions de Maxwell

Eq. de Maxwell en el buit: SIMETRIA

- Però en presència de càrregues lliures i corrents:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

- La simetria es perd.

Tema 8: EQUACIONS DE MAXWELL

8.3. Equacions de Maxwell

Eq. de Maxwell en el buit: SIMETRIA

- No es perdria si existiren càrregues elèctriques (ρ_e) i magnètiques (ρ_m, monopols), que donarien lloc a corrents elèctrics i magnètics (J_m, J_e):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu_0\vec{J}_m - \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \frac{\rho_m}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}_e + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

- És a dir, la simetria de les equacions de Maxwell DEMANA l'existència dels monopols.
- No obstant això, fins ara ningú no ha trobat mai monopols.