

3. Desenvolupament multipolar del potencial electrostàtic en el buit

3.1. Calculeu els moment dipolar i quadrupolar de les següents distribucions de càrrega:
 a) Tres càrregues, de valor q , q i $-2q$, situades en els vèrtexs d'un triangle equilàter de costat a . b) Quatre càrregues, de valor q , $-q$, q i $-q$, situades en els vèrtexs d'un quadrat de costat a . Repetiu el càlcul amb les mateixes càrregues, però distribuïdes de la forma q , q , $-q$ $-q$. c) Tres càrregues de valor q , q i $-q$ situades en els vèrtexs d'un triangle equilàter de costat a .

3.2. Donades dues càrregues $+q$ i $-q$ situades en $(0,0,a/2)$ i en $(0,0,-a/2)$, respectivament, calculeu el moment dipolar i els components del moment quadrupolar del sistema en coordenades cartesianes. Deduïu a partir d'aquests resultats com es comporta el potencial creat per aquestes càrregues a grans distàncies comparades amb a . Analitzeu el cas del límit $a \rightarrow 0$ i $q \rightarrow \infty$ (sent $q \cdot a = \text{constant} = p$).

3.3. Determineu el comportament del camp elèctric creat per un disc dividit en dues meitats amb càrrega $+q$ i $-q$, en punts de l'eix normal per el seu centre i a grans distàncies comparades amb el radi del disc.

3.4. Sobre un disc de radi a es té una densitat de càrrega que varia segons la llei:

$$\sigma(r) = \frac{q}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}}$$

a) Obteniu el camp en punts de l'eix normal al disc per el seu centre i en punts pròxims a aquest. b) Doneu el comportament del potencial a distàncies grans comparades amb a , escrivint els dos primers termes.

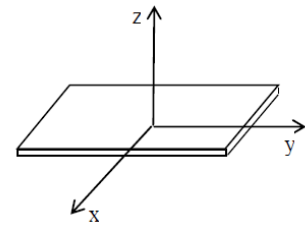
3.5. Dues distribucions lineals de càrrega paral·leles, rectilínies i indefinides, estan separades una distància a , i tenen densitats lineals $+\lambda$, i $-\lambda$. a) Calculeu el potencial en tot l'espai. b) Calculeu el potencial quan la distància entre els fils és molt menuda respecte a la resta de distàncies del problema. c) Calculeu una distribució lineal equivalent de dipols per a l'apartat anterior.

3.6. Es té una distribució lineal de dipols en forma d'anell de radi a , centrada respecte de l'origen i situada en el pla $z = 0$, amb una densitat lineal de moment dipolar $t \vec{u}_z$. Calculeu el potencial i el camp en els punts de l'eix Z . Estudieu-ne el comportament a grans distàncies.

Problemes addicionals

- 1) Una làmina de superfície infinita i gruix negligible està carregada amb la densitat de càrrega:

$$\begin{cases} \sigma = +\sigma_0 \cdot e^{-k \cdot x^2} \cdot e^{-k \cdot y^2} & \text{si } i < 0 \\ \sigma = -\sigma_0 \cdot e^{-k \cdot x^2} \cdot e^{-k \cdot y^2} & \text{si } i > 0 \end{cases}$$

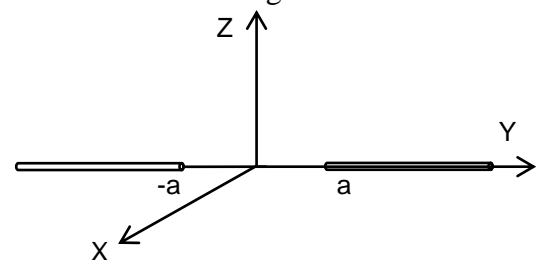


sent σ_0 i k constants. Calculeu:

- (a) El moment dipolar.
- (b) El potencial i el camp a grans distàncies utilitzant el desenvolupament multipolar fins al segon ordre (aproximació dipolar).
- (c) Particularitzeu els resultats de l'apartat anterior per a punts de l'eix Z i comproveu-ne la validesa.

- 2) Siga un fil de longitud L partit per la meitat. Una meitat del fil es carrega amb càrrega $+q$ i l'altra meitat, amb càrrega $-2q$. Calculeu:

- (a) El camp elèctric i el potencial en punts de l'eix Z (vegeu figura)
- (b) El camp elèctric en punts pròxims a l'eix Z.
- (c) Calculeu el camp elèctric en qualsevol punt de l'espai utilitzant el desenvolupament multipolar fins al terme dipolar.



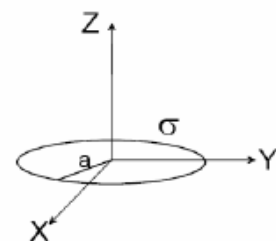
Compareu aquest resultat amb els obtinguts en els apartats a i b.

- 3) Una làmina dielèctrica de dimensions $a \times b$ i gruix d està carregada amb una densitat de càrrega ρ distribuïda uniformement. Damunt se situa una làmina de les mateixes dimensions però carregada amb una densitat de càrrega $-\rho$. Calculeu el camp elèctric i el potencial en qualsevol punt de l'espai utilitzant l'aproximació dipolar.

- 4) Un disc de radi a es troba carregat amb una densitat superficial de càrrega σ que varia amb la distància al centre del disc (r) i amb l'angle azimuthal (φ) en la forma

$$\sigma = \frac{k}{r} \sin \varphi, \text{ sent } k \text{ una constant positiva i } r, \text{ la coordenada radial del sistema de coordenades cilíndriques. Calculeu:}$$

- (a) El camp electrostàtic en qualsevol punt de l'eix Z.
- (b) Els moments monopolar i dipolar de la distribució de càrrega i els dos primers termes del desenvolupament multipolar del camp i el potencial.
- (c) Compareu els resultats obtinguts en els apartats anteriors amb aquells punts on siguin vàlides ambdues expressions.



- 5) Dos anells de radi a i b es disposen en el pla XY de manera que els seus centres coincideixen. Els anells estan carregats amb densitats lineals de càrrega $+l$ i $-l$. Calculeu:

- (a) El camp i el potencial en punts de l'eix perpendicular que passa pel centre dels anells.

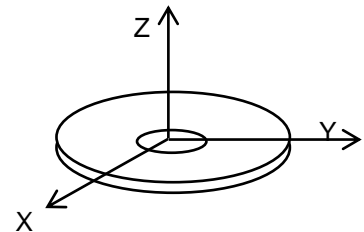
- (b) El potencial a grans distàncies utilitzant el desenvolupament multipolar.
- (c) Compareu els resultats obtinguts en els apartats anteriors

- 6) Un anell de radi interior a i exterior b de gruix negligible està carregat amb una densitat de càrrega

$$\begin{cases} \sigma = +\sigma_0 \cdot r^{-3} \varphi: & [0, \pi] \\ \sigma = -\sigma_0 \cdot r^{-3} \varphi: & [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

on σ_0 és una constant. Calculeu:

- (a) el camp elèctric i el potencial en punts de l'eix Z
- (b) el seu valor per a punts llunyans (z gran)
- (c) el camp elèctric en qualsevol punt de l'espai utilitzant el desenvolupament multipolar fins al terme dipolar. Compareu aquest resultat amb els obtinguts en l'apartat b.

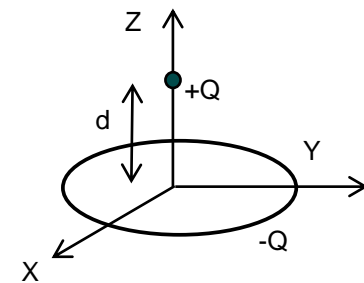


- 7) Es té un anell de gruix negligible i radi a carregat amb una densitat de càrrega: $\lambda = \frac{-Q}{\pi a} \sin^2 \varphi$. Se situa una càrrega

puntual $+Q$ a una distància d del centre de l'anell.

Calculeu:

- (a) el camp elèctric i el potencial en punts de l'eix Z;
- (b) el camp elèctric en punts llunyans de l'eix Z;
- (c) el camp elèctric en qualsevol punt de l'espai utilitzant el desenvolupament multipolar fins al terme dipolar. Compareu aquest resultat amb els obtinguts en els apartats a i b.



Resum de problemes:

Coord	Q puntuals	Disc/lamina	Cable/anell	Distr. dipols
cart	3.1			
cart	3.2			
cilind		3.3		
cilind		3.4		
cilind			3.5	3.5
cilind				3.6
cart		Ad-1		
cart			Ad-2	
cart		Ad-3		
cilind		Ad-4		
cilind			Ad-5	
cilind		Ad-6		
cilind			Ad-7	